文章编号：1004-4353(2019)01-0001-05

变时滞非线性微分方程零解的渐近稳定性

黄明辉
（广州城建职业学院，广东 广州 510925）

摘要：利用 Banach 不动点定理研究了变时滞非线性微分方程. 在一定的条件下，通过构造适当的压缩映射，得到了方程在完备度量空间 S_ψ 上零解渐近稳定的新条件，即允许系数函数改变符号且不要求时滞有界，并通过算例证明了本文结论的有效性.

关键词：非线性；不动点定理；渐近稳定性
中图分类号：O175.14 **文献标识码：**A

Asymptotic stability of the zero solution for nonlinear differentialequations with variable delays

HUANG Minghui
(*Guangzhou City Construction College*, *Guangzhou* 510925, *China*)

Abstract: By using Banach fixed point theory, the nonlinear differential equation with variable delays is considered. Under certain conditions, by constrcutng appropriate contraction mappings, a new condition for asymptotic stability of zero solution of the equation on a complete metric space S_ψ is obtained. Allowing coefficient functions to change sign and do not require the boundedness of delays are given. An example is given to illustrate the validity of the conclusion in this paper.

Keywords: nonlinear; fixed point theory; asymptotic stability

0 引言

因时滞微分方程在物理学、生物学、系统工程等领域有着广泛的应用，因此一直以来受到广大研究者的关注，并取得了一系列研究成果[1-11]. 如作者在文献[1-3]中，利用 Banach 不动点方法研究了时滞线性微分的稳定性；A. Ardjouni 在文献[4-5]中利用 Banach 不动点方法研究了时滞非线性微分方程的渐近稳定性. 受文献[2]和文献[5]的启发，本文研究如下变时滞非线性微分方程

$$x'(t)=-\sum_{j=1}^{N}b_j(t)g(x(t-\tau_j(t)))+\sum_{j=1}^{N}c_j(t)x'(t-\tau_j(t))Q'(x(t-\tau_j(t))) \tag{1}$$

零解的渐近稳定性. 其中 $b_j\in C(R^+,R)$；$c_j\in C^1(R^+,R)$；$\tau_j\in C(R^+,R^+)$；当 $t\to\infty$ 时，$t-\tau_j(t)\to\infty$，$j=1,2,\cdots,N$.

1 主要结果及其证明

设 $C(S_1,S_2)$ 表示所有连续函数 $\phi:S_1\to S_2$ 的集合，$C^1(S_1,S_2)$ 表示所有连续可微函数 $\phi:S_1\to S_2$

收稿日期：2019－02－28 **基金项目：**国家自然科学基金资助项目(61773128)
作者简介：黄明辉(1988—)，男，讲师，研究方向为微分方程与动力系统.

的集合,对任意 $t_0 \geqslant 0$,有 $m_j(t_0)=\inf\{t-\tau_j(t), t\geqslant t_0\}$, $m(t_0)=\min\{m_j(t_0), 1\leqslant j\leqslant N\}$.

定理 1 设 τ_j 二次可微,对任意 $t>0$, $\tau_j'(t)\neq 1$,且存在连续函数 $h_j:[m(t_0),\infty)\to R$, $j=1,2,\cdots,N$ 和常数 $\alpha\in(0,1)$. 若以下条件成立:

(H1) g,Q 是局部的 Lipschitz 连续函数,即存在正数 L_1 和 L_2,若 $|x|,|y|<L$,有:

$|Q(x)-Q(y)|\leqslant L_1\|x-y\|$, $|Q(0)|=0$;

$|g(x)-g(y)|\leqslant L_2\|x-y\|$, $|g(0)|=0$.

(H2) $\lim\limits_{t\to\infty}\inf\int_0^t H(s)\mathrm{d}s>-\infty$.

(H3) $$L_1\sum_{j=1}^N\left|\frac{c_j(t)}{1-\tau_j'(t)}\right|+\sum_{j=1}^N\int_{t-\tau_j(t)}^t|h_j(s)|\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^N\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}[|h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))|+L_2|b_j(s)|+L_1|r_j(s)|]\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^N\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^s|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s<\alpha.$$

其中 $H(t)=\sum\limits_{j=1}^N h_j(t)$, $r_j(t)=\dfrac{[c_j(t)H(t)+c_j'(t)](1-\tau_j'(t))+c_j(t)\tau_j''(t)}{(1-\tau_j'(t))^2}$. 则方程(1)的零解渐近稳定,当且仅当 $t\to\infty$ 时,有

$$\int_0^t H(s)\mathrm{d}s\to\infty. \tag{2}$$

证明 对任意 $t_0\geqslant 0$,设

$$K=\sup_{t\geqslant 0}\{\mathrm{e}^{-\int_0^t H(s)\mathrm{d}s}\}. \tag{3}$$

对固定的 $\psi\in C([m(t_0),t_0],R)$,令

$$S_\psi=\{x\in C([m(t_0),\infty),R): t\to\infty, x(t)\to 0 \text{ 且 } x(t)=\psi(t), t\in[m(t_0),t_0]\},$$

且其范数为 $\|x\|=\max\{|x(t)|: m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0\}$,则 S_ψ 是一个完备度量空间.

将方程(1)两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t H(s)\mathrm{d}s}$,并从 t_0 到 t 积分,得

$$x(t)=\psi(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t H(u)\mathrm{d}u}+\sum_{j=1}^N\int_{t_0}^t h_j(s)x(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^N\int_{t_0}^t b_j(s)g(x(s-\tau_j(s)))\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^N\int_{t_0}^t c_j(s)x'(s-\tau_j(s))Q'(x(s-\tau_j(s)))\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

对上式进行分部积分,得

$$\begin{aligned}x(t)=&\left(\psi(t_0)-\sum_{j=1}^N\frac{c_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)}Q(\psi(t_0-\tau_j(t_0)))-\sum_{j=1}^N\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}h_j(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t H(u)\mathrm{d}u}+\\&\sum_{j=1}^N\frac{c_j(t)}{1-\tau_j'(t)}Q(x(t-\tau_j(t)))+\sum_{j=1}^N\int_{t-\tau_j(t)}^t h_j(s)x(s)\mathrm{d}s+\\&\sum_{j=1}^N\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}(h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))x(s-\tau_j(s))-b_j(s)g(x(s-\tau_j(s)))-\\&r_j(s)Q(x(s-\tau_j(s))))\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^N\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}H(s)\left(\int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u)x(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{4}$$

将式(4)定义为算子 $P: S_\psi\to S_\psi$. 对任意 $t\in[m(t_0),t_0]$, $(Px)(t)=\psi(t)$;当 $t\geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}(Px)(t)=&\left(\psi(t_0)-\sum_{j=1}^N\frac{c_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)}Q(\psi(t_0-\tau_j(t_0)))-\sum_{j=1}^N\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}h_j(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t H(u)\mathrm{d}u}+\\&\sum_{j=1}^N\frac{c_j(t)}{1-\tau_j'(t)}Q(x(t-\tau_j(t)))+\sum_{j=1}^N\int_{t-\tau_j(t)}^t h_j(s)x(s)\mathrm{d}s+\\&\sum_{j=1}^N\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}(h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))x(s-\tau_j(s))-b_j(s)g(x(s-\tau_j(s)))-\end{aligned}$$

$$r_j(s)Q(x(s-\tau_j(s))))\,\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}H(s)\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}h_j(u)x(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s:=\sum_{i=1}^{5}I_i(t).\tag{5}$$

显然，$(Px)\in C([m(t_0),\infty),R)$. 以下证明当 $t\to\infty$ 时，$(Px)(t)\to 0$. 由于 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to 0$ 和 $t-\tau_j(t)\to\infty$. 因此对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T_1>t_0$，使得当 $s\geqslant T_1$ 时有 $|x(s-\tau_j(s))|<\varepsilon$，$j=1,2,\cdots,N$. 由条件(H1)—(H3) 和式(2) 易证当 $t\to\infty$ 时，$|I_i|\to 0$，$i=1,2,3,4$. 此外，当 $t\to\infty$，有

$$|I_5|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}H(s)\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}h_j(u)x(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right|+$$
$$\left|\sum_{j=1}^{N}\int_{T_1}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}H(s)\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}h_j(u)x(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\sup_{s\geqslant m(t_0)}|x(s)|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s+$$
$$\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\int_{T_1}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s.$$

由式(2) 知，存在 $T_2\geqslant T_1$，使得当 $t\geqslant T_2$ 时有

$$\sup_{s\geqslant m(t_0)}|x(s)|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s<\varepsilon.$$

由条件(H3) 知，$|I_5|<\varepsilon+\alpha\varepsilon<2\varepsilon$. $I_5\to 0$. 因此，当 $t\to\infty$ 时，$(Px)(t)\to 0$，所以有 $(Px)\in S_\psi$. 以下证明 P 是压缩映射. 由条件(H3) 知，对任意 $x,y\in S_\psi$ 以及 $t\geqslant t_0$，有

$$|(Px)(t)-(Py)(t)|\leqslant\left\{L_1\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{c_j(t)}{1-\tau_j'(t)}\right|+\sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}|h_j(s)|\mathrm{d}s+\right.$$
$$\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}[|h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))|+L_2|b_j(s)|+L_1|r_j(s)|]\mathrm{d}s+$$
$$\left.\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right\}\|x-y\|\leqslant\alpha\|x-y\|,$$

所以 P 是压缩映射. 再由压缩映射定理知，P 在空间 S_ψ 上存在唯一不动点 $x(t)$，它是方程(1) 的解. 且 $x(t)$ 满足：当 $t\in[m(t_0),t_0]$ 时，$x(t)=\psi(t)$；当 $t\to\infty$ 时，$x(t,t_0,\psi)\to 0$.

为了证明方程(1) 零解的渐近稳定性，需要证明方程(1) 的零解是稳定的. 假设给定的任意 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ $(\varepsilon<\delta)$ 满足 $2\delta K\mathrm{e}^{-\int_0^{t_0}H(u)\mathrm{d}u}+\alpha\varepsilon<\varepsilon$. 如果 $x(t)=x(t,t_0,\psi)$ 是方程(1) 的解，则满足 $\|\psi\|<\delta$ 且 $x(t)=(Px)(t)$.

下面证明对所有的 $t\geqslant t_0$，$|x(t)|<\varepsilon$. 显然，当 $s\in[m(t_0),t_0]$ 时，有 $|x(s)|<\varepsilon$. 如果存在 $t^*>t_0$，使得 $x(t^*)=\varepsilon$，且当 $m(t_0)\leqslant s<t^*$，有 $|x(s)|<\varepsilon$. 进一步由式(5) 得

$$x(t^*)\leqslant\|\psi\|\left(1+L_1\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{c_j(t_0)}{1-\tau_j'(t_0)}\right|+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0-\tau_j(t_0)}^{t_0}|h_j(s)|\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t^*}H(u)\mathrm{d}u}+$$
$$\varepsilon L_1\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{c_j(t^*)}{1-\tau_j'(t^*)}\right|+\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\int_{t^*-\tau_j(t^*)}^{t^*}|h_j(s)|\mathrm{d}s+$$
$$\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t^*}\mathrm{e}^{-\int_s^{t^*}H(u)\mathrm{d}u}(|h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))|+L_2|b_j(s)|+L_1|r_j(s)|)\mathrm{d}s+$$
$$\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^{t^*}H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\leqslant 2\delta K\mathrm{e}^{-\int_0^{t_0}H(u)\mathrm{d}u}+\alpha\varepsilon<\varepsilon.$$

该结果与 t^* 的定义相矛盾. 这说明，如果条件(H3) 成立，方程(1) 的零解渐近稳定. 相反地，如果条件(H3) 不成立，由条件(H2) 知，存在序列 $\{t_n\}$ 满足当 $n\to\infty$ 时，$t_n\to\infty$，存在 $l\in R$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{t_n}H(u)\mathrm{d}u=l$. 此

时可以选取正常数 J,满足对所有的 $n\geqslant 1$ 有 $-J\leqslant\int_0^{t_n}H(u)\mathrm{d}u\leqslant J$. 对所有 $s\geqslant 0$,定义 $F(s)$ 如下:

$$F(s):=\sum_{j=1}^{N}\left[\,|h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))|+L_2|b_j(s)|+L_1|r_j(s)|+|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\right].$$

由条件(H3)知 $\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha$,即 $\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\int_0^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}\leqslant\mathrm{e}^J$,这表明序列 $\left\{\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s\right\}$ 有界,因此 $\left\{\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s\right\}$ 存在收敛子序列. 假设存在 $\gamma\in R^+$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s=\gamma$. 选取一足够大的正整数 m,使得对所有的 $n\geqslant m$,有 $\int_{t_m}^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s<\frac{\delta_0}{4K}$,其中 $K=\sup\limits_{t\geqslant 0}\{\mathrm{e}^{-\int_0^t H(s)\mathrm{d}s}\}$,$\delta_0>0$ 满足 $2\delta_0K\mathrm{e}^J+\alpha\leqslant 1$.

以下考虑方程(1)的解 $x(t)=x(t,t_m,\psi)$ 满足 $\psi(t_m)=\delta_0$ 和当 $s\leqslant t_m$ 时,$\psi(s)\leqslant\delta_0$. 对所有 $t\geqslant t_m$,有 $|x(t)|\leqslant 1$. 选取适当的 ψ 使得

$$\psi(t_m)-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j(t_m)}{1-\tau_j'(t_m)}Q(\psi(t_m-\tau_j(t_m)))+\int_{t_m-\tau_j(t_m)}^{t_m}h_j(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right]\geqslant\frac{1}{2}\delta_0.$$

由式(5)和 $x(t)=(Px)(t)$ 知,对所有的 $n\geqslant m$,有

$$\begin{aligned}&\left|x(t_n)-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j(t_n)}{1-\tau_j'(t_n)}Q(\psi(t_n-\tau_j(t_m)))+\int_{t_n-\tau_j(t_n)}^{t_n}h_j(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right]\right|\geqslant\\&\frac{1}{2}\delta_0\mathrm{e}^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}-\int_{t_m}^{t_n}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}\delta_0-\mathrm{e}^{-\int_0^{t_m}H(u)\mathrm{d}u}\int_{t_m}^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s\right)\geqslant\\&\mathrm{e}^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}\delta_0-K\int_{t_m}^{t_n}\mathrm{e}^{\int_0^s H(u)\mathrm{d}u}F(s)\mathrm{d}s\right)\geqslant\frac{1}{4}\delta_0\mathrm{e}^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)\mathrm{d}u}\geqslant\frac{1}{4}\delta_0\mathrm{e}^{-2J}>0.\end{aligned}\tag{6}$$

另外,若方程(1)的零解渐近稳定,则当 $t\to\infty$ 时,$x(t)=x(t,t_m,\psi)\to 0$. 因为当 $n\to\infty$,$t_n-\tau_j(t_n)\to\infty$. 由条件(H3)知,当 $n\to\infty$ 时,有

$$x(t_n)-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j(t_n)}{1-\tau_j'(t_n)}Q(x(t_n-\tau_j(t_n)))+\int_{t_n-\tau_j(t_n)}^{t_n}h_j(s)x(s)\mathrm{d}s\right]\to 0.$$

该结果与式(6)相矛盾. 所以式(2)是方程(1)零解渐近稳定的充要条件. 证毕.

2 算例

例 1 考虑以下变时滞非线性微分方程:

$$x'(t)=-\sum_{j=1}^{2}b_j(t)g(x(t-\tau_j(t)))+\sum_{j=1}^{2}c_j(t)x'(t-\tau_j(t))Q'(x(t-\tau_j(t))).\tag{7}$$

其中 $\tau_1(t)=0.05t$,$\tau_2(t)=0.08t$,$b_1(t)=\frac{1}{1+0.95t}$,$b_2(t)=\frac{1}{1+0.92t}$,$c_1(t)=0.03$,$c_2(t)=0.01$,$Q(x)=0.52(1-\sin x)$,$g(x)=0.002\cos x$.

证明 选取 $h_1(t)=\frac{0.62}{1+t}$,$h_2(t)=\frac{0.58}{1+t}$,由定理 1 可得 $H(t)=\frac{1.2}{1+t}$,$L_1=0.052$,$L_2=0.002$. 进一步计算可得:

$$L_1\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{c_j(t)}{1-\tau_j(t)}\right|=0.052\left(\frac{0.03}{0.95}+\frac{0.01}{0.92}\right)<0.002\,3,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}|h_j(s)|\mathrm{d}s=\int_{0.95t}^{t}\frac{0.62}{1+s}\mathrm{d}s+\int_{0.92t}^{t}\frac{0.58}{1+s}\mathrm{d}s=0.62\ln\frac{1+t}{1+0.95t}+0.58\ln\frac{1+t}{1+0.92t}<0.081,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_j(s)}^{s}|h_j(u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s<\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{1.2}{1+u}\mathrm{d}u}\frac{1.2}{1+s}\times 0.081\mathrm{d}s<0.081,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{-\int_s^t H(u)\mathrm{d}u}\left[\,|h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))|+L_2|b_j(s)|+L_1|r_j(s)|\,\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.2}{1+u}\mathrm{d}u}\left[\frac{0.62\times 0.95}{1+0.95s}+\frac{0.002}{1+0.95s}+0.52\frac{0.03\times 1.26}{0.95(1+s)}\right]\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.2}{1+u}\mathrm{d}u}\left[\frac{0.38\times 0.92}{1+0.92s}+\frac{0.002}{1+0.92s}+0.52\frac{0.01\times 0.26}{0.92(1+s)}\right]\mathrm{d}s<$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.2}{1+u}\mathrm{d}u}\frac{1.2\times 0.8354}{1+s}\mathrm{d}s<0.8354.$$

因此，定理 1 中的 $\alpha=0.0023+0.081+0.081+0.8354=0.9997<1$，进而由定理 1 知方程(7) 的零解是渐近稳定的.

参考文献：

[1] ZHANG B. Fixed points and stability in differential equations with variable delays[J]. Nonlinear Anal，2005,63(5):233-242.

[2] ARDJOUNI A. Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays[J]. Nonlinear Analysis，2011(74):2062-2070.

[3] JIN C H，LUO J W. Asymptotic stability of differential equations with several delays[J]. Publ Math Debrecen，2011,78(1):89-102.

[4] ARDJOUNI A. Fixed points and stability in nonlinear neutral volterra intergo-differential equations with variable delays[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，2013,2013(28):1-13.

[5] ARDJOUNI A. Stability in totally nonlinear neutral differential equations with variable delay using fixed point[J]. Proyecciones Journal of Mathematics，2015,34:25-44.

[6] MESMOULI M B. Periodic solutions and stability in a nonlinear neutral system of differential equations with infinite delay[J]. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana，2018,24(1):239-255.

[7] 钟越. 一类非线性 Volterra 方程零解的稳定性[J]. 数学物理学报，2015,35(5):878-883.

[8] GE F，KOU C. Stability analysis by Krasnoselskii's fixed point theorem for nonlinear fractional differential equations[J]. Applied Mathematics & Computation，2015,257:308-316.

[9] 姚洪兴. 一类四阶时滞微分方程的渐进稳定性[J]. 江苏大学学报(自然科学版)，2010,31(5):616-620.

[10] 黄明辉. 多时滞的非线性微分方程的渐近稳定性[J]. 广东工业大学学报，2016,33(1):62-66.

[11] 黄明辉. 带可积时滞的非线性中立型微分方程的 h-渐近稳定性[J]. 南阳师范学院学报，2017,38(9):5-11.