

文章编号: 1004-4353(2018)04-0348-05

# 扭摆转动惯量和扭转模量的不确定度测量分析

王丽, 兰文政, 徐佳慧  
( 营口理工学院, 辽宁 营口 115014 )

**摘要:** 根据不确定度理论, 推导了转动惯量和扭转模量的不确定度传递公式. 以 DH4601 扭摆转动惯量测试仪为试验装置, 对实例数据进行了计算. 结果表明: 利用 DH4601 扭摆转动惯量测试仪测得的转动惯量和扭转模量的相对不确定度比文献[5-8, 10]所给出的结果更小, 说明该实验仪器的测量结果更为准确和可靠. 本文结果可对测量刚体转动惯量实验的实验方法选择和仪器参数的标定提供参考.

**关键词:** 转动惯量; 扭转模量; 不确定度

**中图分类号:** O4-34

**文献标识码:** A

## Analysis on the uncertainty of rotational inertia and torsional constant of torsion pendulum

WANG Li, LAN Wenzheng, XU Jiahui  
( Yingkou Institute of Technology, Yingkou 115014, China )

**Abstract:** According to the uncertainty theory, the uncertainty transfer formulas of moment of inertia and torsion modulus are derived. With DH4601 torsional pendulum moment of inertia tester as the experimental device, the moment of inertia and the torsional modulus of the suspension line are measured. The results show that the uncertainty of rotation inertia and torsion constant of DH4601 torsion pendulum is smaller than that of the literature [5-8, 10], the measurement results of the instrument are more accurate and reliable. Which have importantly practical significance to choosing experimental methods and calibrating instrument parameters.

**Keywords:** rotation inertia; torsion constant; uncertainty

## 0 引言

刚体的转动惯量是描述刚体转动惯性大小的物理量, 它取决于刚体的质量、质量分布以及转轴的位置<sup>[1]</sup>. 对于质量分布均匀、几何形状规则的刚体, 其转动惯量一般可以直接用数学公式计算得到; 对于质量分布不均, 没有规则几何形状的刚体, 通常要用实验方法来间接测定其转动惯量的数值. 在实际生产生活中, 人们通常接触的是不规则形状的刚体, 因此, 用实验方法测定刚体转动惯量的准确程度具有非常重要的实际意义. 研究表明, 引入不确定度的概念, 可以对测量结果的准确程度给出一个量化的比较<sup>[2-4]</sup>. 目前, 测量转动惯量的方法主要为三线摆法和扭摆法. 文献[5-6]对三线摆法测转动惯量的不确定度进行了分析, 文献[7-8]对扭摆法测转动惯量的不确定度进行了分析. 上述研究显示, 扭摆法所得的不确定度小于三线摆法所得的不确定度, 但是文献[7-8]并没有对仪器的扭转模量进行标定. 本文通过推导转动惯量和扭转模量的不确定度传递公式, 以杭州大华仪器制造有限公司生产的 DH4601 扭摆转

**收稿日期:** 2018-04-24

**作者简介:** 王丽(1983—), 女, 讲师, 研究方向为原子与分子物理、大学物理实验.

**基金项目:** 营口理工学院院级教改课题(JG201715); 营口理工学院院级教学团队项目(JT201705); 营口理工学院院级精品资源共享课项目(JP201713)

动惯量测试仪为实验装置,间接测量该实验仪载物盘(圆盘)的转动惯量,并标定悬线(碳钢材料)的扭转模量.实例计算表明,该仪器的测量结果精度更高.

1 实验原理

DH4601 扭摆转动惯量测试仪的基本构造如图 1 所示,测试仪的上端为金属丝,下端为金属圆盘.圆盘作为转动惯量测试仪的载物盘,理论上可以将任何待测物体置于圆盘上进行测量.实验时在圆盘上施加一个外力矩的作用,使其扭转一个小角度  $\theta$  ( $\theta < 5^\circ$ ).由于悬线上端是固定的,悬线会因扭转而产生弹性恢复力矩.当撤去外力矩后,圆盘在弹性恢复力矩的作用下作角简谐振动,其运动微分方程为

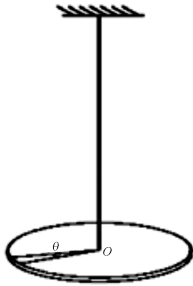


图 1 DH4601 扭摆转动惯量测试仪的基本构造

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{J_0}\theta = 0, \tag{1}$$

式中  $J_0$  为圆盘绕悬线轴转动的转动惯量,  $K$  为金属丝悬线的扭转模量,  $\omega^2 = \frac{K}{J_0}$  为角简谐振动的圆频率.在方程(1)中,若忽略空气阻尼力矩的作用,圆盘绕悬线轴简谐振动的周期为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{K}}. \tag{2}$$

当扭转模量  $K$  未知时,可以将一个已知圆盘悬线轴转动惯量的物体(本实验中使用一个质量分布均匀、形状规则的圆环)附加在圆盘上,组成一个复合体,使其绕着悬线轴作定轴转动,以此满足角简谐振动运动规律.复合体的振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_1}{K}}, \tag{3}$$

其中圆环对悬线轴的转动惯量为

$$J_1 = \frac{m}{8}(d_1^2 + d_2^2), \tag{4}$$

式中  $m$  表示圆环的质量,  $d_1$  和  $d_2$  分别表示圆环的内、外直径.

由式(2)–(4)可得圆盘绕悬线轴的转动惯量为

$$J_0 = \frac{mT_0^2}{8(T^2 - T_0^2)}(d_1^2 + d_2^2), \tag{5}$$

悬线轴的扭转模量为

$$K = \frac{m\pi^2}{2(T^2 - T_0^2)}(d_1^2 + d_2^2). \tag{6}$$

金属丝悬线的扭转模量  $K$  不仅与悬线材料的切变模量  $G$  有关,还与悬线的长度  $L$ 、悬线的直径  $d$  有关,其理论计算公式为

$$K = \frac{\pi G d^4}{32L}. \tag{7}$$

2 测量结果的不确定度评定

2.1 直接测量量的不确定度评定

多次直接测量时,测量量的 A 类标准不确定度为

$$\mu_A(x) = t_n(p) \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}, p = 0.683. \tag{8}$$

其中： $x_i$  为测量量； $\bar{x}$  为测量量的平均值； $n$  为测量次数； $t_n(p)$  为置信因子，置信概率  $p=0.683$  时， $t_n(p)$  的值参见表 1。对于单次测量，通常不考虑 A 类标准不确定度，此时  $\mu_A(x) = 0$ 。

多次直接测量时，测量量的 B 类标准不确定度为

$$\mu_B(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_{\text{仪}}, p = 0.683, \tag{9}$$

其中  $\Delta_{\text{仪}}$  表示仪器的最大允许误差。

将 A 类和 B 类标准不确定度合成为直接测量量的标准不确定度，为

$$\mu(x) = \sqrt{\mu_A^2(x) + \mu_B^2(x)}, p = 0.683. \tag{10}$$

直接测量量的扩展不确定度为

$$U(x) = k\mu(x), k = 2 \text{ 时}, p = 0.95. \tag{11}$$

2.2 间接测量量的不确定度评定

1) 扭摆载物盘转动惯量  $J_0$  的不确定度评定公式。

根据不确定理论，可推导出扭摆载物盘转动惯量的相对合成标准不确定度的评定公式，为

$$\frac{\mu_{J_0}}{J_0} = \sqrt{\left(\frac{\mu_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{d}_1\mu_{d_1}}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{d}_2\mu_{d_2}}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{T}\mu_T}{\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{T}^2\mu_{T_0}}{T_0(\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2)}\right)^2}. \tag{12}$$

转动惯量的合成标准不确定度为

$$\mu_{J_0} = \frac{\mu_{J_0}}{J_0} \cdot \bar{J}_0, p = 0.683. \tag{13}$$

转动惯量的扩展不确定度为

$$U_{J_0} = 2\mu_{J_0}, p = 0.95. \tag{14}$$

2) 扭摆扭转模量  $K$  的不确定度评定公式。

扭摆扭转模量的相对合成标准不确定度为

$$\frac{\mu_K}{K} = \sqrt{\left(\frac{\mu_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2d_1\mu_{d_1}}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2d_2\mu_{d_2}}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{T}\mu_T}{\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_0\mu_{T_0}}{\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2}\right)^2}. \tag{15}$$

扭摆扭转模量的合成标准不确定度为

$$\mu_K = \frac{\mu_K}{K} \cdot \bar{K}, p = 0.683. \tag{16}$$

扭摆扭转模量的扩展不确定度为

$$U_K = 2\mu_K, p = 0.95. \tag{17}$$

3 实例计算

分别测量圆盘绕悬线轴的运动和圆环+圆环复合体绕悬线轴的运动。圆盘绕悬线轴运动的周期  $T_0$  和圆盘+圆环复合体绕悬线轴运动的周期  $T$  的测量使用累积放大法，每次测量 30 个周期的时间。仪器使用依照说明书进行，各参数如下：周期测量仪的最大允许误差为 0.03 s；圆环内、外直径  $d_1$  和  $d_2$  的测量使用游标卡尺，最大允许误差为 0.02 mm；圆环的质量  $m=533$  g，不考虑其 A 类不确定度， $\Delta_{\text{仪}} = 0.02$  g；悬线（碳钢材料）直径  $d$  使用螺旋测微器测量，悬线长度  $L$  使用毫米刻度尺（最小分度 1 mm）测量。实验测量结果见表 1。

表 1 刚体转动惯量的直接测量数据

实验次数	圆环内径 $d_1/\text{mm}$	圆环外径 $d_2/\text{mm}$	圆环 $30T_0/\text{s}$	圆环 $T_0/\text{s}$	圆环+圆盘 $30T/\text{s}$	圆环+圆盘 $T/\text{s}$	悬线直径 $d/\text{mm}$	悬线长度 $L/\text{mm}$
1	99.62	120.12	53.84	1.795	90.72	3.024	0.813	311.2
2	99.70	120.02	53.83	1.794	90.75	3.025	0.810	311.4
3	99.62	120.00	53.83	1.794	90.71	3.024	0.811	311.5
4	99.80	120.08	53.83	1.794	90.73	3.024	0.810	311.7
5	99.72	120.10	53.82	1.794	90.70	3.023	0.809	311.2
6	99.68	120.06	53.82	1.794	90.71	3.024	0.814	311.5
平均值	99.69	120.06	53.83	1.794	90.72	3.024	0.811	311.4

3.1 测量量  $d_1, d_2, T_0, T, m$  的不确定度

根据表 1 数据,利用式(8)一(10) 分别计算直接测量量  $d_1, d_2, T_0, T, m$  的不确定度,结果见表 2. 由表 2 的计算结果可以看出,圆环质量  $m$  的相对不确定度分量小于最大的相对不确度分量的 1/3,因此可以省略该项在不确定公式中的贡献.

表 2 直接测量量不确定度的计算结果( $p=0.683$ )

参数	$\bar{x}$	$\mu_A(x)$	$\Delta_{\text{仪}}$	$\mu_B(x)$	$\mu(x)$	$\frac{\mu(x)}{x}/\%$
$d_1/\text{mm}$	99.69	0.031	0.02	0.012	0.036	0.036
$d_2/\text{mm}$	120.06	0.019	0.02	0.012	0.022	0.018
$T_0/\text{s}$	1.794	0.000 11	0.03	0.000 58	0.000 59	0.033
$T/\text{s}$	3.024	0.000 25	0.03	0.000 58	0.000 60	0.020
$m/\text{g}$	533	—	0.02	0.012	0.012	0.002

3.2 圆盘转动惯量及其不确定度

将表 1 的测量结果代入式(5),可得圆盘转动惯量的最佳估计值:

$$\bar{J}_0 = \frac{m\bar{T}_0^2}{8(\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2)}(\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2) = 8.818 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

将表 1 和表 2 的数据代入式(12)一(14),可得圆盘转动惯量  $J_0$  的相对合成标准不确定度( $\frac{\mu_{J_0}}{J_0}=0.13\%$ )、

合成标准不确定度( $\mu_{J_0} = \frac{\mu_{J_0}}{J_0} \cdot \bar{J}_0 = 1.1 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ) 和扩展不确定度( $U_{J_0} = 2\mu_{J_0} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ). 综上,圆盘转动惯量测量结果的表达式为

$$J_0 = \bar{J}_0 \pm U_{J_0} = (8.818 \pm 0.022) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, p=0.95.$$

3.3 扭摆扭转模量的理论值和测量值及其不确定度

将表 1 数据代入式(7) 可得扭转模量的理论值:

$$K_{\text{理论}} = \frac{\pi G \bar{d}^4}{32L} = 1.078 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2},$$

其中  $G$  为悬线材料碳钢切向模量( $G=79 \text{ GPa}$ )<sup>[9]</sup>.

将表 1 数据代入式(6) 可得扭转模量的最佳估计值:

$$\bar{K} = \frac{m\pi^2}{2(\bar{T}^2 - \bar{T}_0^2)}(\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2) = 1.080 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

将表 1、表 2 的数据代入式(15)一(17),得扭转模量的相对合成标准不确定度( $\frac{\mu_K}{K}=0.09\%$ )、合成标

准不确定度( $\mu_K = \frac{\mu_K}{K} \cdot \bar{K} = 0.9 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ) 和扩展不确定度( $U_K = 2\mu_K = 0.0018 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ).

综上,扭摆扭转模量测量结果的表达式为

$$K = \bar{K} \pm U_K = (1.0800 \pm 0.0018) \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, p = 0.95.$$

扭摆扭转模量的实验值与理论值的相对误差为

$$E_K = \left| \frac{E - E_{\text{理论}}}{E_{\text{理论}}} \right| \times 100\% = 0.19\%.$$

4 结论

本文对扭摆的转动惯量(载物盘)和扭转模量的不确定度公式进行了推导,并结合实验数据进行了实例计算.结果显示:扭摆(载物盘)转动惯量的相对标准不确定度为 0.13%,小于文献[7-8]中的计算结果,扭转模量的相对误差为 0.09%,小于文献[10]中的值.由此可以看出,本实验选用的 DH4601 扭摆转动惯量测试仪的测量结果更为准确、可靠.此外,通过计算仪器扭转模量的理论值和实验值,可以实现扭摆转动惯量仪的参数标定.

参考文献:

[1] 孙炳全,赵涛,刘凤智,等.大学物理实验[M].北京:化学工业出版社,2016:54-57.  
[2] 韩国华,王云才.探讨大学物理实验中物理常量的使用和测量结果的表示[J].大学物理,2010,29(12):45-48.  
[3] 盛虹.大学物理实验数据处理中不确定度的计算[J].大学物理实验,2011,24(3):92-94.  
[4] 李春贵.大学物理实验中 A 类不确定度探讨[J].大学物理,2012,31(1):35-38.  
[5] 强蕊.三线摆法测刚体转动惯量的不确定度分析[J].西安科技大学学报,2011,31(5):631-635.  
[6] 楼航宇,王威,孙维民.三线摆测量转动惯量方法的改进及不确定度分析[J].大学物理实验,2015,28(6):102-105.  
[7] 马亚林,陈建新.扭摆法测物体转动惯量的不确定度分析[J].大学物理实验,2011,24(1):93-96.  
[8] 刘宇清,李传涛,黄宁,等.扭摆法测转动惯量实验装置的研究[J].大学物理实验,2016,29(5):89-92.  
[9] 张大伟,王丽,滕继慧,等.扭摆法测转动惯量摆长最佳值的探究[J].延边大学学报(自然科学版),2017,43(2):125-127.  
[10] 陈金晶,徐平川,黄安梁.扭摆的扭转常数的标定[J].西华师范大学学报(自然科学版),2016,37(2):221-226.