

文章编号: 1004-4353(2018)04-0344-04

基于任意正多边形孔径的菲涅尔衍射

王海涛, 郭振平*, 徐梦远
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 在基尔霍夫衍射公式的基础上,通过模拟仿真研究了任意正多边形小孔的菲涅尔衍射规律. 首先利用 Matlab 中的 for 循环给出衍射平面的球面波复振幅分布,再利用函数 graythresh 和 im2bw 读取 Photoshop 绘制的小孔图像得到孔径函数;然后通过函数 fft2 对点扩散函数和衍射平面的复振幅分布与孔径函数的乘积进行傅里叶变换;最后利用函数 ifft2 对输出频谱做傅里叶逆变换,从而得到衍射条纹分布. 研究结果表明:在正多边形各边的垂直方向上,衍射条纹清晰;在各角的方位上,衍射呈条带分布(正多边形边数为奇数时为亮条带,正多边形边数为偶数时为暗条带),正多边形的边数越多,衍射条纹越密集.

关键词: 任意正多边形孔径; 菲涅尔衍射; Matlab 模拟; Photoshop 绘图

中图分类号: O436.1 **文献标识码:** A

Fresnel diffraction based on the aperture of any regular polygon

WANG Haitao, GUO Zhenping*, XU Mengyuan
(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: On the basis of Kirchhoff diffraction formula, the Fresnel diffraction law of any regular polygon small hole is studied by simulation. Firstly, the spherical wave complex amplitude distribution of the diffraction plane is given by using the For loop in Matlab, and then the aperture function is obtained by using the function Graythresh and IM2BW to read the small hole image drawn by Photoshop, and then the product of complex amplitude distribution and aperture function of the point diffusion function and the diffraction plane is Fourier transform through the function fft2, and finally the diffraction stripe distribution is obtained by using the function ifft2 to make Fourier inverse transformation to the output spectrum. The results show that the diffraction stripes are clear in the vertical direction of each edge of the regular polygon, and in the azimuth of each angle, the diffraction shows a strip distribution (bright strip when the polygon edge is odd, dark strip when the polygon edge is even). Moreover, the more the number of sides of the regular polygon, the denser the diffraction fringes.

Keywords: any regular polygon aperture; Fresnel diffraction; the Matlab simulation; Photoshop graphics

近年来,国内外学者对衍射现象进行了深入的研究,其研究成果被广泛应用于光谱望远镜^[1]、空间望远镜^[2-3]以及孔径测量^[4]等方面. 衍射现象可以利用菲涅尔-基尔霍夫衍射公式来讨论,但由于其数学公式在使用时较为复杂,因此在解决具体问题存在较多困难. 为了建立清晰的物理图像,加深对各种现象的理解,有必要通过计算机模拟

拟仿真各种条件下的光学衍射现象. 通过模拟不仅可以形象直观地观察光的衍射现象,探究光的衍射规律和相关技术问题,而且不受实验仪器和实验场所的限制,对理解光学理论和衍射技术的应用具有积极的作用.

目前,计算机数值模拟衍射现象的研究主要聚焦于光的圆孔和矩孔衍射现象^[5-9]. 由于实际工

程中并不只局限于圆孔和矩孔的衍射孔形,因此有研究者对其他孔形进行了研究.例如,刘有菊等研究了“E”形孔的夫琅禾费衍射现象^[10],宋易知模拟了任意正多边形小孔的夫琅禾费衍射现象^[11],Jeffrey 等利用快速菲涅尔衍射算法模拟了孔形为数字“2”的衍射^[12],Qian 等研究了菲涅尔和弗伦霍夫衍射的数值模拟^[13].在上述研究的启发下,本文采用 Photoshop 精绘衍射孔形,利用 Matlab 处理点光源球面波,并运用傅里叶变换和卷积技术探究任意正多边形孔径的非涅尔衍射条纹分布规律.

1 衍射的理论基础

1.1 球面波的复振幅

从点光源发出的光,其波面为球面波.波面上各点的振幅与该点到球心的距离成反比.当直角坐标系中心与球面波的中心重合时,单色球面波在场中任意一点 P 所产生的复振幅可表示为

$$U_0(P)=\frac{a_0}{r_0}e^{jkr_0}.$$

(1)

其中: r_0 是点光源 S 到 P 点的矢径; a_0 是 $r_0=1$ 处的振幅值; k 是波数,表示单位长度的相位变化, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$.

1.2 基尔霍夫衍射公式

小孔衍射简图如图 1 所示.图 1 中,位于点 P_0 的单色点光源照明平面屏幕, P 为孔径平面 Σ 上任意一点, Q 为孔径后方光场中的观察点, r 和 r_0 分别是 Q 和 P_0 到 P 的距离, \boldsymbol{n} 表示孔径平面的法线的正方向.依据基尔霍夫衍射公式可得 Q 点的复振幅^[14]:

$$U(Q)=\frac{1}{j\lambda}\iint U_0(P)K(\theta)\frac{e^{jkr}}{r}\mathrm{d}S,$$

(2)

式(2)中

$$K(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})-\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)].$$

(3)

1.3 菲涅尔衍射

图 2 为小孔衍射示意图.考虑傍轴近似条件^[14],式(3)中 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\approx 1$, $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)\approx -1$, $K(\theta)\approx 1$,且

$$r=z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}.$$

(4)

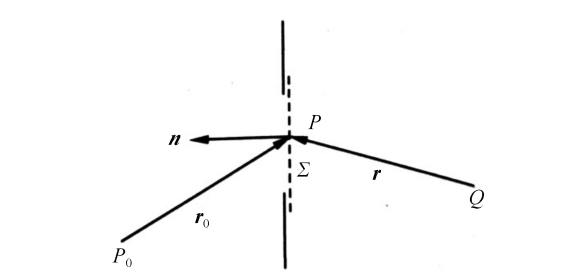


图 1 小孔衍射简图

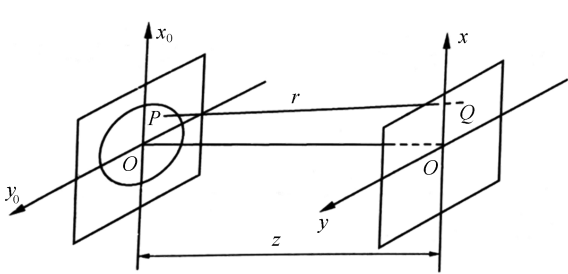


图 2 小孔衍射示意图

将式(4) 做二项式展开,得

$$r=z\left[1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z^2}+\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2}{8z^4}+\dots\right],$$

(5)

其中右边第 3 项所引起的相位变化为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2}{8z^3}.$$

(6)

傍轴近似要求,式(5)中 $[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2$ 取最大值时, $\Delta\varphi\ll 2\pi$,即

$$z^3\gg\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]_{\max}^2}{8\lambda}.$$

(7)

此时衍射光场的复振幅分布为

$$U(x,y)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(x_0,y_0)\cdot\exp\left[jk\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0,$$

(8)

其中脉冲响应可以表示为

$$h(x-x_0,y-y_0)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\cdot\exp\left[jk\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right].$$

(9)

则菲涅尔衍射可以表示为

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(x_0,y_0)h(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0=U_0(x,y)*h(x,y),$$

(10)

其中

$$h(x,y)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[jk\frac{x^2+y^2}{2z}\right].\tag{11}$$

对式(10) 做傅里叶变换得

$$A(\xi,\eta)=A_0(\xi,\eta)H(\xi,\eta).\tag{12}$$

式(12) 中:

$$H(\xi,\eta)=F[h(\xi,\eta)],\tag{13}$$

$$A_0(\xi,\eta)=F[U_0(x,y)*t_0(x,y)].\tag{14}$$

最后再对式(12) 做傅里叶逆变换可得观察平面的复振幅分布为

$$U(x,y)=F^{-1}[A(\xi,\eta)].\tag{15}$$

2 衍射模拟

根据式(12)—(15), 先计算出衍射平面的孔径透过率函数 $t_0(x,y)$, 然后对衍射屏上的复振幅分布与透过率函数的乘积做傅里叶变换, 再与传递函数相乘可得观察平面的复振幅分布的傅里叶变换 $A(\xi,\eta)$, 最后做傅里叶逆变换即可得观察屏上的复振幅分布.

2.1 模拟过程

2.1.1 衍射屏复振幅分布的模拟 首先利用绘图软件 Photoshop 绘制面积为 1 mm^2 的任意正多边形孔径, 然后利用 Matlab 软件中的函数 imread 读入孔径图像建立透过率函数 $t_0(x,y)$ 01 二维矩阵, 再利用 for 循环计算发散球面波在衍射平面左侧上的复振幅分布, 最后将球面波的复振幅与透过率函数相乘得到衍射屏右侧的复振幅分布. 其程序代码如下:

```
%以下长度单位均为10-5 m
N=1024;
i=imread(PS绘制的孔径图像.jpg);
lev=graythresh(i);
u=im2bw(i,lev);
subplot(2,2,1),imshow(u);
title('孔径图像');
lam=500e-4;
k=2*pi/lam;
z=400000;
z1=400000;
a0=200000;
x2=0:1:1023;
```

```
y2=0:1:1023;
for i=1:1:1024
    for j=1:1:1024
        r(i,j)=sqrt(((x2(i)-512)^2+(y2(j)-512)^2+z1^2));
        U1(i,j)=a0/r(i,j)*exp((-1)^(1/2)*k*r(i,j));
    end
end
u1=U1.*u;
```

2.1.2 衍射图像的模拟 首先对透过率函数与衍射屏上的复振幅分布乘积做傅里叶变换, 然后将该变换结果与点扩散函数的傅里叶变换相乘得观察平面上的复振幅的傅里叶变换, 再对此计算结果进行傅里叶逆变换得观察平面的复振幅分布, 最后对复振幅取绝对值的平方得菲涅尔衍射图像. 对于不同的衍射孔径的图像需要调整不同的点光源到衍射屏的距离 z_1 、衍射屏到观察平面的距离 z 以及点光源在 $r=1$ 处的振幅值 a_0 , 以实现最为明显的衍射图像. 该部分的程序为:

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-N,N,N));
U=fftshift(fft2(u1));
h=exp(1j*k*z)*exp((1j*k*(x.^2+y.^2))/(2*z))/(1j*lam*z);
H=fftshift(fft2(h));
A=fftshift(iff2(H.*U));
axis image;
colormap(hot)
I=abs(A)^2;
subplot(2,2,2),imshow(I);
title('衍射图像');
axis image;
colormap(hot)
subplot(2,2,3),mesh(I),title('光强分布');
subplot(2,2,4),plot(x(1,:),I(521,:)),title('二维分布')
```

2.2 模拟结果及分析

图 3—图 10 为三至六边形孔径及其在观察平面的衍射图像. 在图中可以明显看出, 光强分布呈旋转对称性, 且在方位上都旋转了 π/n (n 为多边形的边数); 在衍射图像的对称中心都有明亮的艾里亮斑; 在正多边形各边的垂直方向上, 衍射条

纹较为清晰,而在各角的方位上衍射呈条带分布(n 为奇数时为亮条带, n 为偶数时为暗条带);正多边形的边数越多,衍射条纹越密集。

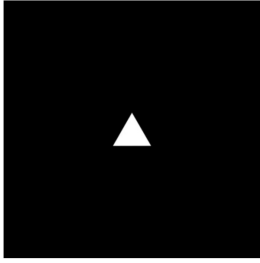


图3 三角形孔径

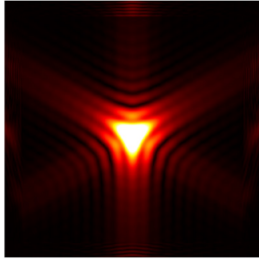


图4 三角形孔径衍射图像

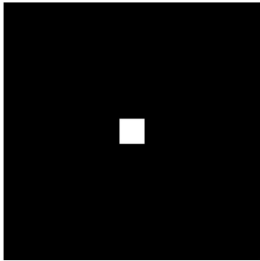


图5 正方形孔径

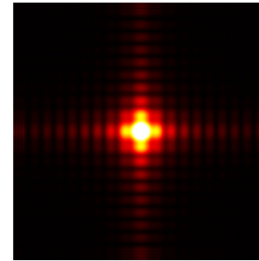


图6 正方形孔径衍射图像

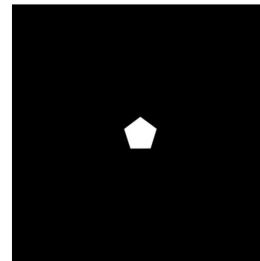


图7 五边形孔径

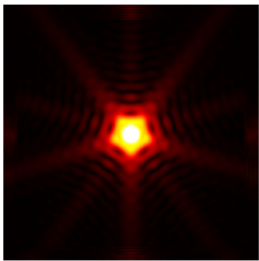


图8 五边形孔径衍射图像

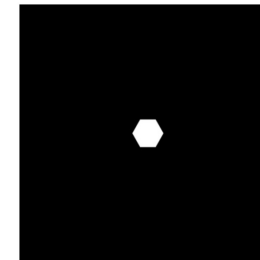


图9 六边形孔径

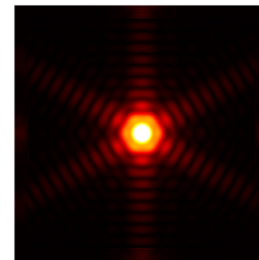


图10 六边形孔径衍射图像

3 结论

本文在基尔霍夫衍射公式的基础上,通过模拟仿真研究了任意正多边形小孔的非涅尔衍射规律。研究发现:以艾里亮斑为对称中心,衍射条纹呈旋转对称性;正多边形的边数越多,衍射条纹越密集;在正多边形各边的垂直方向上,衍射条纹较为清晰,而在各角的方位上衍射呈条带分布(正多

边形的边数 n 为奇数时呈亮条带, n 为偶数时呈暗条带)。当衍射孔径面积为 1 mm^2 ,且光源到衍射屏的距离和衍射屏到观察屏的距离均为 4 m 时,衍射现象最为明显。屏上的衍射图样在垂直于各直边方向上光强强弱分布比较明显。在衍射距离不变时,随着衍射孔径的增大,衍射现象逐渐减弱。当正多边形边数 $n>7$ 时,衍射图像十分接近于圆孔衍射。本文模拟的矩孔衍射图样与参考文献[11]的结果吻合,表明本文模拟仿真方法具有可行性。

参考文献:

- [1] 李仲怡. 基于菲涅尔衍射的光谱望远镜研究[D]. 长春: 长春理工大学, 2016.
- [2] 郑耀辉, 阮萍, 曹尚. 空间薄膜衍射望远镜展开结构设计分析[J]. 红外与激光工程, 2016, 45(1): 0118004.
- [3] 王若秋, 张志宇, 国成立, 等. 用于空间望远镜的大口径高衍射效率薄膜菲涅尔衍射元件[J]. 红外与激光工程, 2017, 46(9): 1-8.
- [4] 罗晓贺, 惠梅. 基于菲涅尔衍射的圆孔直径测量[J]. 激光与红外, 2018, 48(3): 380-383.
- [5] 孙向阳. 圆孔衍射与像分辨本领的 Matlab 仿真分析[J]. 湖北工业大学学报, 2004, 19(5): 47-49.
- [6] 王竞争, 刘显龙, 殷文金, 等. 基于 Matlab 的光的干涉和衍射现象的模拟研究[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2009, 35(4): 319-322.
- [7] 成海英, 陈冬冬, 张亚. 基于 Matlab 的圆孔衍射实验模拟[J]. 盐城工学院学报(自然科学版), 2011, 24(2): 11-13.
- [8] 王永祥. 矩孔菲涅尔衍射的光强分布[J]. 量子电子学学报, 2010, 27(3): 265-269.
- [9] 郝忠秀, 赵亚军, 李立功, 等. 基于 Matlab 的矩孔夫琅和费衍射场模拟计算[J]. 河北大学学报(自然科学版), 2009, 29(3): 266-269.
- [10] 刘有菊, 杨庆辞. “E”字孔的夫琅禾费衍射场[J]. 保山学院学报, 2017, 36(2): 19-21.
- [11] 宋易知. 任意正多边形小孔夫琅禾费衍射成像探讨[J]. 物理实验, 2017, 37(11): 48-51.
- [12] Jeffrey A D, Don M C. Simulation of Anderson localization in a random fiber using a fast Fresnel diffraction algorithm[J]. Optical Engineering, 2016, 55(6): 066122.
- [13] Qian H, Lin W, Qi X. Numerical simulation of Fresnel and Fraunhofer diffractions of monochromatic and white light[J]. Optical Engineering, 2016, 55(8): 084104.
- [14] 苏显渝, 李继陶, 曹益平, 等. 信息光学[M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2011: 23-46.