文章编号: 1004-4353(2018)04-0340-04

复多值函数积分问题的探讨

盛屹浩, 王宁, 尹虹丹, 陶元虹*

(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 以教材中的习题为例,探讨了复变函数中多值函数的积分计算问题.首先利用留数定理给出了例题 1 的解法 1;然后在割破平面确定单值解析分支的基础上,使用牛顿莱布尼兹公式给出了例题 1 的解法 2,并分析了影响解法 1 和解法 2 结果的因素;最后,通过构建新的辅助函数计算了涅尔积分例题,从而推广了实积分的计算方法.

关键词: 复变函数; 多值函数; 留数定理; 单值分支

中图分类号: O174.5　　**文献标识码:** A

Discussion on integral problems of complex multivalued functions

SHENG Yihao, WANG Ning, YIN Hongdan, TAO Yuanhong*

(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Taking an exercise in textbooks as an example, this paper discusses the integral calculation of multi-valued functions with complex variables. Firstly, the solution 1 of example 1 is given by residue theorem; secondly, the solution 2 of example 1 is given by using Newton Leibniz formula on the basis of cutting the plane to determine the single-valued analytic branch, and the factors affecting the results of solution 1 and solution 2 are analyzed; finally, the example of Nell integral is calculated by constructing a new auxiliary function, thus the calculation method of real integral is extended.

Keywords: complex function; multivalued functions; residue theorem; single valued branch

多值函数是复变函数研究中的一个重要内容.在复变函数的教学研究中,学者们对多值函数的单值分支确定问题和单值复函数的积分问题进行了较多的研究[1-11],但对多值复函数的积分计算问题研究得较少.本文利用复积分的两种常用计算方法(留数定理和牛顿莱布尼兹公式)计算一道教材中的积分习题,分析影响多值函数积分计算结果的因素,并给出多值函数积分计算和应用的例子.

1 例题 1 的不同解法及其结果

例 1[12] 计算积分 $\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta$($a$ 为实数,且 $a\neq 0$).

解法 1 利用柯西留数定理求解.由于 $\tan(\theta+\mathrm{i}a)=\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}}=\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}+1}$,作变量代换 $z=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}$,则 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}\cdot 2\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z}$.显然,上述变换将变量 θ 在 $[0,\pi]$ 上的变化转换为变量 z 沿圆周 $C:|z|=|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)}|=\mathrm{e}^{-2a}$ 逆时针旋转一周.于是有

$$\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\int_C\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z}=-\frac{1}{2}\int_C\frac{z-1}{z(z+1)}\mathrm{d}z.$$

收稿日期: 2018-10-26　　**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11761073)

* **通信作者:** 陶元红(1973—),女,教授,研究方向为函数论.

由于积分变量在圆周 C 上变化，因此需考虑圆 C 的半径 e^{-2a} 的取值. 下面分两种情况进行讨论：

i）当 $a>0$ 时，圆 C 的半径 $e^{-2a}<1$，则在 C 内被积函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$ 仅有 1 个一级极点 $z=0$. 由柯西留数定理可得 $\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta=-\dfrac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-\pi\mathrm{i}(-1)=\pi\mathrm{i}$.

ii）当 $a<0$ 时，圆 C 的半径 $e^{-2a}>1$，则在 C 内被积函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$ 有 2 个一级极点：$z=0$ 和 $z=-1$. 由柯西留数定理可得

$$\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\left[\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1}f(z)\right]=-\pi\mathrm{i}(-1+2)=-\pi\mathrm{i}.$$

解法 2 利用牛顿莱布尼兹公式求解. 显然，$\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}(\theta+\mathrm{i}a)$. 作变量代换 $z=\theta+\mathrm{i}a$，则 $I=\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta=\int_{\mathrm{i}a}^{\pi+\mathrm{i}a}\tan z\,\mathrm{d}z=-\int_{\mathrm{i}a}^{\pi+\mathrm{i}a}\dfrac{\mathrm{d}(\cos z)}{\cos z}=-\ln(\cos z)\Big|_{\mathrm{i}a}^{\pi+\mathrm{i}a}=\ln(\cos\mathrm{i}a)-\ln(\cos(\pi+\mathrm{i}a))$. 又因为 $\cos\mathrm{i}a=\dfrac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}a)}+e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}a)}}{2}=\dfrac{e^{a}+e^{-a}}{2}>0$，所以

$$I=\ln(\cos\mathrm{i}a)-\ln(-\cos\mathrm{i}a)=\ln|\cos\mathrm{i}a|+2k\pi\mathrm{i}-\ln|-\cos\mathrm{i}a|\pm\mathrm{i}\pi-2k\pi\mathrm{i}=\pm\mathrm{i}\pi,$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由以上解题过程可知，解法 2 虽然得到了与解法 1 相同的结果，但不能确定在什么条件下取 $\mathrm{i}\pi$ 或 $-\mathrm{i}\pi$，因此需要作进一步讨论.

在解法 2 中，虽然通过求解原函数之后，利用牛顿莱布尼兹公式计算了该积分，但是能使用牛顿莱布尼兹公式的前提条件是该函数在单连通区域内单值解析；而对数函数是多值函数，因此需要先割破平面，将对数函数划分单值解析分支之后才能使用牛顿莱布尼兹公式. 为此，不妨设 $\omega=f(z)=\cos z$，$z_1=\mathrm{i}a$，$z_2=\pi+\mathrm{i}a$，则 $|f(z_1)|=|f(z_2)|=\dfrac{e^{a}+e^{-a}}{2}$. 首先考察 ω 平面上变量的变化路径情况，如图 1 所示. 在 ω 平面上沿原点到 ∞ 割破正实轴，则在此割破了的平面上对数函数 $\ln f(z)$ 可以被划分出单值解析分支. 在已给单值分支 $\ln f(z)$ 的情况下，有如下结果：

$$\ln f(z_2)=\ln|f(z_2)|+\mathrm{i}\arg f(z_2)=\ln|f(z_2)|+\mathrm{i}\left[\arg f(z_2)-\arg f(z_1)+\arg f(z_1)\right],$$

即 $\ln f(z_2)=\ln|f(z_2)|+\mathrm{i}\arg f(z_2)=\ln|f(z_2)|+\mathrm{i}\Delta_C\arg f(z)+\mathrm{i}\arg f(z_1)$，其中 C 是 ω 平面上的一条联结起点 $f(z_1)$ 与终点 $f(z_2)$ 且不穿过支割线的简单曲线. 因为 $\ln f(z_1)=\ln|f(z_1)|+\mathrm{i}\arg f(z_1)$，所以所求积分值 $I=\ln f(z_1)-\ln f(z_2)=\ln\left|\dfrac{f(z_1)}{f(z_2)}\right|-\mathrm{i}\Delta_C\arg f(z)=-\mathrm{i}\Delta_C\arg f(z)$. 由此可知，该积分值 I 与给定的对数函数的单值分支无关，仅与 ω 平面上 $f(z)$ 的积分路径有关. $f(z)$ 在 ω 平面上有 C_1 和 C_2 两种积分路径（见图 1）. 当选取积分路径 C_1 时，积分值 $I=\mathrm{i}\pi$；当选取积分路径 C_2 时，积分值 $I=-\mathrm{i}\pi$.

在什么情况下选取 C_1 和 C_2 路径呢？首先考察积分变量 z 在 z 平面上的路径变化问题，然后明确 $\omega=f(z)$ 在 ω 平面上积分路径的选取，如图 2 所示. 当积分变量 z 沿直线变化时，即 $z:\mathrm{i}a\to\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}a\to$

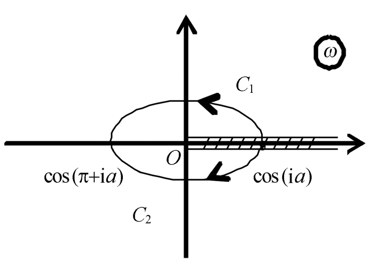

图 1 ω 平面上变量的变化路径

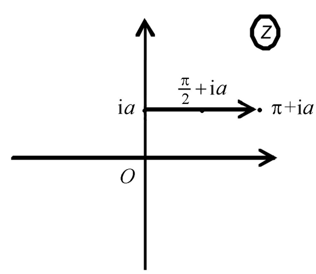

图 2 z 平面上变量的变化路径

$\pi+\mathrm{i}a$，则有 $\cos(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}a)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}a)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}a)}}{2}=\frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{a})}{2}$. 因此，当 $a>0$ 时，$\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{a}}{2}<0$，此时选取积分路径 C_2；当 $a<0$ 时，$\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{a}}{2}>0$，此时选取积分路径 C_1.

通过上述分析可得 $\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\pi\mathrm{i},\ a>0;\\-\pi\mathrm{i},\ a<0.\end{cases}$ 解法 2 得到了与解法 1 相同的结论.

2 两种影响复积分计算结果的因素

在上述两种解题方法中，解法 1 相对简单一些. 但在原函数易求且单值解析分支易划分的情况下，解法 2 也不失为一种简便的方法，如例 2.

例 2 计算积分 $\int_{1-\mathrm{i}}^{1+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z-1}}$.

解 被积函数 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{z-1}}$ 是多值函数，$z=1$，$z=\infty$ 为支点. 从 $z=1$ 到 $z=\infty$ 沿正实轴割破平面后可得到单值解析分支，因此由牛顿莱布尼兹公式可得 $I=\int_{1-\mathrm{i}}^{1+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z-1}}=2\sqrt{z-1}\,\Big|_{1-\mathrm{i}}^{1+\mathrm{i}}$. 由于 $f(z)$ 的原函数 $2\sqrt{z-1}$ 仍为多值函数，在代入上下限计算时需要考虑对应的单值分支. 下面取 $f(z)$ 的如下分支进行讨论：

1) 规定 $\arg(z-1)\big|_{上岸}=0$，则此时 $0\leqslant\arg(z-1)\leqslant 2\pi$. 在此单值分支上有 $\arg(z-1)\big|_{z=1-\mathrm{i}}=\frac{3\pi}{2}$，$\arg(z-1)\big|_{z=1+\mathrm{i}}=\frac{\pi}{2}$，故 $I=2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}})=2\sqrt{2}$.

2) 规定 $\arg(z-1)\big|_{上岸}=2\pi$，则有 $I=2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}})=-2\sqrt{2}$.

上述两个例题均利用牛顿莱布尼兹公式进行了计算，而使用该公式的前提是必须保证被积函数在积分区域内单值解析. 因此，在复多值函数积分计算问题中，需要考虑以下两方面因素：一是要明确划分出单值解析分支，二是要注意积分路径. 这两个因素紧密相关，因为积分路径要避开多值函数的支点，且不能穿过多值函数的支割线.

根据以上分析结果，本文利用复多值函数计算菲涅尔积分(例 3). 首先给出如下两个引理：

引理 1[12](小圆弧引理) 设 $f(z)$ 沿圆弧 S_r：$z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$($\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$，$r$ 充分小) 上连续，且 $\lim\limits_{r\to 0}(z-a)f(z)=\lambda$ 于 S_r 上一致成立，则有 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{S_r}f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)\lambda$.

引理 2 设函数 $g(z)$ 沿半圆周 Γ_R：$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$($0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$R$ 充分大) 上连续，且 $\lim\limits_{R\to\infty}g(z)=0$ 在 Γ_R 上一致成立，则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z=0\ (m>0)$.

证明 将教材[12] 中 Jordan 引理证明过程中的角度改为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 即可得证.

例 3 利用泊松积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，计算菲涅尔积分 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$.

解 教材[12] 中给出了一种通过选取辅助函数 $f(z)=\mathrm{e}^{-z^2}$ 计算例 3 的方法，本文则通过构造不同的辅助函数来计算例 3.

作变量代换 $x^2=t$，$\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$，则有 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$；$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. 构造辅助函数 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}$，并取如图 3 所示的积分路径. 在原点处做一个半径为 r 的小圆弧 C_r，并从 $z=0$ 到 $z=\infty$

沿负实轴割破 z 平面. 该方法可以避开 $f(z)$ 的支点，从而保证辅助函数 $f(z)$ 在积分路径围成的区域内单值解析.

考虑对应的单值分支，规定$\sqrt{z}$ 沿正实轴取正值，则 $\arg z=0$ $(z\in\mathbf{R}^{+})$. 根据柯西积分定理有

$$0=\int_{C}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z=\int_{r}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_{C_r^-}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z+\mathrm{i}\int_{R}^{r}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y\mathrm{i}}}\mathrm{d}y+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z,\tag{1}$$

其中$\sqrt{y\mathrm{i}}=\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ 为所取适合条件的分支，在$[r,R]$ 上$\sqrt{z}=\sqrt{x}$ $(x>0)$.

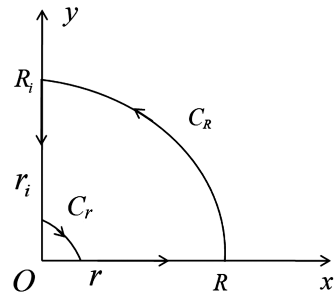

图 3　辅助函数的积分路径

下面根据不同路径分别讨论积分的值：

1) 由于 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{z\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}=0$，应用引理 1，得 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z=0$.

2) 在 C_R 上，应用引理 2，得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$.

3) 当 $r\to 0$，$R\to\infty$ 时，$\mathrm{i}\int_{+\infty}^{0}\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y\mathrm{i}}}\mathrm{d}y=-\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\mathrm{d}y=-\dfrac{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=-\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$ $(y=t^2)$，则式(1) 变为$\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. 比较该式子的实部和虚部，可得$\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. 因此，菲涅尔积分的值为

$$I=\int_{0}^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3　结论

本文通过讨论复多值函数积分的计算方法，得到了积分例题 1 的两种正确解法，并归纳了两种影响复积分计算结果的因素. 另外，本文通过构造新的辅助函数，选取恰当的积分区域，给出了一种新的菲涅耳积分算法. 本文结果为多值函数积分问题的计算提供了一种新的思路，今后我们将通过更多的例题进一步验证和改善本文方法.

参考文献：

[1]　储亚伟，王雪，徐传友. 一类单值分支确定问题的教学探讨[J]. 吉林工程技术师范学院学报，2016，32(11)：108-110.
[2]　徐丹青，李鑫. 关于复变函数积分求法的讨论[J]. 科技经济导刊，2017(7)：183.
[3]　邱双月. 复积分的计算[J]. 邯郸学院学报，2009，19(3)：59-62.
[4]　李高翔. 多值函数的积分及其在量子光学中的应用[J]. 高等函授学报(自然科学版)，2005，19(5)：21-24.
[5]　柴国庆. 关于复变函数积分的计算[J]. 高等函授学报(自然科学版)1995(3)：27-30.
[6]　黄隽. 复变函数积分计算方法的探讨[J]. 常州工学院学报，2008，21(4)：73-75.
[7]　张昆实. 留数定理与复变函数的积分[J]. 高等函授学报(自然科学版)，2003，16(1)：13-14.
[8]　黄得隆. 复变函数积分计算中的几种方法[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版)，1995(2)：71-74.
[9]　智丽丽，李艳青. 留数定理在积分计算中的应用[J]. 昌吉学院学报，2014(1)：74-76.
[10]　岳红云，刘功伟. 复变函数积分计算中 C_{-1} 的异同[J]. 数学学习与研究，2016(1)：135-135.
[11]　王文鹏，阙建华. 复变函数积分的求解策略[J]. 重庆科技学院学报(自然科学版)，2007，9(4)：149-151.
[12]　钟玉泉. 复变函数论[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2013：65-80，219-251.