文章编号：1004-4353(2018)04-0315-07

基于广义诱导连续区间有序函数比例加权平均算子的区间型组合预测模型

袁宏俊[1]， 胡凌云[2]， 张敏[1]
(1. 安徽财经大学 统计与应用数学学院；2. 安徽财经大学 管理科学与工程学院：安徽 蚌埠 233030)

摘要：以抽象单调函数为基础，构建了一类函数族的广义诱导连续区间有序函数比例加权平均(GICOWFPA)算子. 在灰色趋势关联度为最优准则下，建立了基于 GICOWFPA 算子的区间型组合预测模型. 实例分析表明，该模型的预测精度优于 3 种单项预测方法及文献[9,11]中提出的组合预测方法，因此本文预测方法是一种有效的组合预测方法.

关键词：区间组合预测；GICOWFPA 算子；灰色趋势关联度；单调函数
中图分类号：F224　　　　**文献标识码**：A

The interval combination forecasting model based on GICOWFPA operator

YUAN Hongjun[1]， HU Lingyun[2]， ZHANG Min[1]
(1. *School of Statistics and Applied Mathematics*, *Anhui University of Finance and Economics*; 2. *School of Management Science and Engineering*, *Anhui University of Finance and Economics*: *Bengbu* 233030, *China*)

Abstract: Based on the abstract monotonic function, a generalized induced continuous interval ordered function proportional weighted averaging (GICOWFPA) operator of a family of functions is constructed. An interval combination forecasting model based on GICOWFPA operator is established under the optimal criterion of grey trend relevance degree. An illustrative example shows that the forecasting accuracy of the model is better than the three single forecasting methods and the combination forecasting method proposed in [9,11]. Therefore, the model is an effective combination forecasting method.

Keywords: interval combination forecasting; GICOWFPA operator; grey trend relevance degree; monotonic function

0 引言

研究表明，组合预测方法可有效地提高预测的精度，减少单一预测方法所带来的预测风险，因此该方法受到学者们的关注，并取得了许多研究成果[1-5]. 信息集结算子是一种数据合成的方法，它可以按照某种规则将高精度的单项预测方法赋予较大的权系数，低精度的单项预测方法赋予较小的权系数，从而可获取到更加精确的组合预测值. 目前，基于信息集结算子的区间型组合预测的研究已取得了一些成果，例如：袁宏俊等[6]以 IGOWC-OWGA 算子和向量夹角余弦准则构建了最优区间型组合预测；胡凌云等[7]以 IGOWLA 算子和区间数距离准则构建了最优区间型组合预测；金飞飞等[8]以 CIOWA 算子和误差平方和准则构建了最优区间型组合预测；曹晓俊等[9]以 IOWC-GOWHA 算子和灰色趋势关联度

收稿日期：2018－07－26　　**基金项目**：国家社会科学基金资助青年项目(13CTJ006)
作者简介：袁宏俊(1978—)，男，副教授，研究方向为预测理论与方法、决策分析.

准则构建了最优区间型组合预测;朱家明等[10]以UWPA算子和绝对误差之和准则构建了最优区间型组合预测;张超等[11]以IGOWLC-OWHA算子和改进的Theil不等系数准则构建了最优区间型组合预测;胡纪纲等[12]以IOWGA算子和区间关联度准则构建了最优区间型组合预测.在上述文献中,研究者们虽然通过构建不同的信息集结算子和不同的最优准则,建立了具有较好预测精度的区间型组合预测模型,但是这些文献中的信息集结算子在形式上仅是某种单一具体的表达式,并没有推广到一般的函数形式.由于信息集结算子的形式多种多样,因此有必要将这些不同形式的算子加以分析总结,归纳出具有函数形式的信息集结算子表达式.本文以加权比例平均算子为出发点,借鉴实数型组合预测模型的方法,引入函数及反函数的互逆运算,结合COWA算子和诱导有序的IOWA算子,构建一类函数族的广义诱导连续区间有序函数比例加权平均(GICOWFPA)算子,并通过实例验证本文方法的有效性.

1 基本概念

定义1 设 $X=[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ a,b\in\mathbf{R}\}$,称 X 为区间数,同时 X 还可表示为 $X=(c,r)$,其中 $c=\dfrac{b-a}{2}$, $r=\dfrac{a+b}{2}$.

定义2 设有两个任意区间数 $X_1=[a_1,b_1]=(c_1,r_1)$ 和 $X_2=[a_2,b_2]=(c_2,r_2)$,则:

1) $X_1+X_2=[a_1+a_2,b_1+b_2]=(c_1+c_2,r_1+r_2)$;

2) $kX_1=\begin{cases}[ka_1,kb_1],\ k\geqslant 0\\ [kb_1,ka_1],\ k<0\end{cases}=(kc_1,kr_1)$.

定义3[3] 设IOWA是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的 n 元函数,令

$$\mathrm{IOWA}((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2),\cdots,(v_n,\alpha_n))=\sum_{i=1}^{n}w_i\alpha_{v\text{-index}(i)},$$

其中:$w_1,w_2,\cdots,w_n$ 是与IOWA函数有关的加权系数,满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$, $w_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$;在二维数组 $\{(v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2),\cdots,(v_n,\alpha_n)\}$ 中,v_i 是 α_i 的诱导值,$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 按从大到小的顺序排列;v-index(i) 是排序后第 i 个数的下标.则称IOWA是 n 维诱导有序加权平均算子.

定义4[8] 设 $[a,b]$ 为区间数,令

$$\mathrm{COWA}([a,b])=\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}(b-y(b-a))\mathrm{d}y,$$

其中:$Q(y):[0,1]\to[0,1]$ 满足 $Q(0)=0$, $Q(1)=1$;当 $y_1>y_2$ 时,有 $Q(y_1)\geqslant Q(y_2)$.则称COWA为连续有序加权平均算子.

若态度参数为 $\theta=\int_0^1 Q(y)\mathrm{d}y$,则 $\mathrm{COWA}([a,b])$ 的等价表示形式为 $\mathrm{COWA}([a,b])=(1-\theta)a+\theta b$.

定义5[5] 设GWFPA是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的 n 元函数,令

$$\mathrm{GWFPA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=f^{-1}\left\{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}w_if^{2\lambda}(\alpha_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}w_if^{\lambda}(\alpha_i)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\},$$

其中:$w_1,w_2,\cdots,w_n$ 是与GWFPA函数有关的加权系数,满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$, $w_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$; $\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.则称GWFPA为 n 维广义加权函数比例平均算子.

2 广义诱导连续区间有序函数比例加权平均算子的构建

根据定义3—定义5,结合3种算子的特点,将3种算子重新组合,构建如下数据集结算子:

定义 6 设 F 是 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 的 n 元函数,令

$$F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))=$$
$$\mathrm{GIOWFP}((v_1,\mathrm{COWA}[a_1,b_1]),(v_2,\mathrm{COWA}[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,\mathrm{COWA}[a_n,b_n]))=$$
$$f^{-1}\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(\mathrm{COWA}[a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)},b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}])}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{\lambda}(\mathrm{COWA}[a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)},b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}])}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\},$$

其中:$w_1,w_2,\cdots,w_n$ 是与 F 函数有关的加权系数,满足 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$,$w_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,n$;在二维数组 $\{(v_1,\mathrm{COWA}[a_1,b_1]),(v_2,\mathrm{COWA}[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,\mathrm{COWA}[a_n,b_n])\}$ 中,v_i 是 $\mathrm{COWA}[a_i,b_i]$ 的诱导值,$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 按从大到小的顺序排列;$v\text{-}\mathrm{index}(i)$ 是排序后第 i 个数的下标;$\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 则称 F 为 n 维广义诱导连续区间有序函数比例加权平均(GICOWFPA)算子.

由定义 3 中 $\mathrm{COWA}([a,b])$ 的等价形式,令 $z=\mathrm{COWA}[a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)},b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}]=(1-\theta)a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}+\theta b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$,则 GICOWFPA 算子为

$$F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))=f^{-1}\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(z)}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{\lambda}(z)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}. \tag{1}$$

3 广义诱导连续区间有序函数比例加权平均算子的性质

性质 1 若 $a_i\geqslant a'_i$, $b_i\geqslant b'_i$,且 f 是单调函数,则:

$$F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))\geqslant$$
$$F((v_1,[a'_1,b'_1]),(v_2,[a'_2,b'_2]),\cdots,(v_n,[a'_n,b'_n])).$$

证明 令 $z=(1-\theta)a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}+\theta b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$,对式(1)两边同时取函数 f 后再取对数,则有

$$\ln f(F)=\frac{1}{\lambda}\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(z)\right)-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}w_i f^{\lambda}(z)\right)\right].$$

上式两边同时对 $a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$ 求偏导,可得

$$\frac{\partial \ln f(F)}{\partial a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}}=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}2\lambda(1-\theta)w_i f^{2\lambda-1}(z)f'(z)}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(z)}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda(1-\theta)w_i f^{\lambda-1}(z)f'(z)}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{\lambda}(z)}\right]=$$
$$\frac{1}{\lambda}\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda(1-\theta)w_i f^{2\lambda-1}(z)f'(z)}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(z)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\theta)w_i f^{2\lambda-1}(z)f'(z)}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(z)}. \tag{2}$$

根据函数单调性判别法可知:当 f 是单调递增函数(即 $f'(z)\geqslant 0$)时,由式(2)可得 $\frac{\partial \ln f(F)}{\partial a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}}\geqslant 0$,说明复合函数 $\ln f(F)$ 是单调递增的,所以 F 关于 $a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$ 是单调递增的. 当 f 是单调递减函数(即 $f'(z)\leqslant 0$)时,由式(2)可得 $\frac{\partial \ln f(F)}{\partial a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}}\leqslant 0$,说明复合函数 $\ln f(F)$ 是单调递减的,所以 F 关于 $a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$ 仍是单调递增的. 同理,F 关于 $b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$ 也是单调递增的.

由 $a_i\geqslant a'_i$, $b_i\geqslant b'_i$ 可得 $a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}\geqslant a'_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$, $b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}\geqslant b'_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}$. 根据单调性可知 $F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))\geqslant F((v_1,[a'_1,b'_1]),(v_2,[a'_2,b'_2]),\cdots,(v_n,[a'_n,b'_n]))$,故性质 1 成立.

性质 2 若一组区间数都相等,即 $X_i=[a_i,b_i]=[a,b]$,$\forall\, i=1,2,\cdots,n$,则:

$F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))=\mathrm{COWA}([a,b])$.

证明 因为 $X_i=[a_i,b_i]=[a,b]$,所以 $\mathrm{COWA}([a_i,b_i])=\mathrm{COWA}([a,b])$,则

$$F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))=$$

$$f^{-1}\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{2\lambda}(\mathrm{COWA}[a,b])}{\sum_{i=1}^{n}w_i f^{\lambda}(\mathrm{COWA}[a,b])}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}=f^{-1}\{[f^{\lambda}(\mathrm{COWA}[a,b])]^{\frac{1}{\lambda}}\}=\mathrm{COWA}[a,b].$$

故性质 2 成立.

性质 3 设一组区间数为 $X_i=[a_i,b_i]$, $a_i<b_i$, $i=1,2,\cdots,n$,则:

$$\min_i\{a_i\}\leqslant F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))\leqslant\max_i\{b_i\}.$$

证明 根据性质 1 和性质 2 易证得 $\min_i\{\mathrm{COWA}([a_i,b_i])\}\leqslant F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))\leqslant\max_i\{\mathrm{COWA}([a_i,b_i])\}$. 因为 $\mathrm{COWA}([a_i,b_i])=(1-\theta)a_i+\theta b_i$, $a_i\leqslant(1-\theta)a_i+\theta b_i\leqslant b_i$,所以 $\min_i\{a_i\}\leqslant F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))\leqslant\max_i\{b_i\}$. 故性质 3 成立.

性质 4 设 $(v'_1,[a'_1,b'_1]),(v'_2,[a'_2,b'_2]),\cdots,(v'_n,[a'_n,b'_n])$ 是 $(v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n])$ 的任意置换,则:

$$F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))=$$
$$F((v'_1,[a'_1,b'_1]),(v'_2,[a'_2,b'_2]),\cdots,(v'_n,[a'_n,b'_n])).$$

证明 因为 $(v'_1,[a'_1,b'_1]),(v'_2,[a'_2,b'_2]),\cdots,(v'_n,[a'_n,b'_n])$ 是 $(v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n])$ 的任意置换,所以有 $\mathrm{COWA}[a_{v\text{-index}(i)},b_{v\text{-index}(i)}]=\mathrm{COWA}[a'_{v'\text{-index}(i)},b'_{v'\text{-index}(i)}]$, $\forall i=1,2,\cdots,n$. 根据定义 6 可得 $F((v_1,[a_1,b_1]),(v_2,[a_2,b_2]),\cdots,(v_n,[a_n,b_n]))=F((v'_1,[a'_1,b'_1]),(v'_2,[a'_2,b'_2]),\cdots,(v'_n,[a'_n,b'_n]))$. 故性质 4 成立.

4 基于广义诱导连续区间有序函数比例加权平均算子的区间型组合预测模型

设 $\{X_t\mid X_t=[a_t,b_t]=(c_t,r_t),t=1,2,\cdots,N\}$ 是实际值区间数序列,各单项预测方法的预测值区间数序列为 $\{X_{it}\mid X_{it}=[a_{it},b_{it}]=(c_{it},r_{it}),i=1,2,\cdots,m;t=1,2,\cdots,N\}$,相应的各单项预测方法的权系数为 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ $(0\leqslant w_i\leqslant1,i=1,2,\cdots,m,\sum_{i=1}^{m}w_i=1)$. 设组合预测值区间数为:$\hat{X}_t=[\hat{a}_t,\hat{b}_t]$, $t=1,2,\cdots,N$,则有:

$$\hat{X}_t=\sum_{i=1}^{m}w_iX_{it}=\sum_{i=1}^{m}w_i[a_{it},b_{it}]=\left[\sum_{i=1}^{m}w_ia_{it},\sum_{i=1}^{m}w_ib_{it}\right].$$

为了能够利用 GICOWFPA 算子对各单项预测值区间数的数据进行有效集结,本文将各单项预测方法在各时点处的区间数预测精度作为 GICOWFPA 算子中的诱导值,按照诱导值从大到小赋予不同的权系数. 精度高(即诱导值大)的赋予大的权系数,精度低的赋予小的权系数,这样即可得到更加精确的组合预测值区间数.

定义 7 令 $v_{it}=\begin{cases}1-\dfrac{||X_t|-|X_{it}||}{|X_t|}, & \dfrac{||X_t|-|X_{it}||}{|X_t|}<1\\ 0, & \dfrac{||X_t|-|X_{it}||}{|X_t|}\geqslant1\end{cases}$,其中 $|X_t|=\sqrt{c_t^2+r_t^2}$, $|X_{it}|=\sqrt{c_{it}^2+r_{it}^2}$,则称 v_{it} 是第 i 种单项预测值在 t 时刻相对于实际值的预测精度. 显然 $0\leqslant v_{it}\leqslant1$, $i=1,2,\cdots,m$, $t=1,2,\cdots,N$.

根据定义 6 和定义 7,利用 GICOWFPA 算子对 m 种单项预测方法的预测值区间数进行数据集结,

可得到由 GICOWFPA 算子集结而组成的组合预测值序列.

定义 8　令

$$\hat{\delta}_t = F((v_{1t},[a_{1t},b_{1t}]),(v_{2t},[a_{2t},b_{2t}]),\cdots,(v_{mt},[a_{mt},b_{mt}])) = \\ \mathrm{GIOWFP}((v_{1t},\mathrm{COWA}[a_{1t},b_{1t}]),(v_{2t},\mathrm{COWA}[a_{2t},b_{2t}]),\cdots,(v_{mt},\mathrm{COWA}[a_{mt},b_{mt}])) = \\ f^{-1}\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i f^{2\lambda}(\mathrm{COWA}[a_{v\text{-}\mathrm{index}(it)},b_{v\text{-}\mathrm{index}(it)}])}{\sum_{i=1}^{m} w_i f^{\lambda}(\mathrm{COWA}[a_{v\text{-}\mathrm{index}(it)},b_{v\text{-}\mathrm{index}(it)}])}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}, t=1,2,\cdots,N,$$

称 $\hat{\delta}_t$ 为 t 时刻由 GICOWFPA 算子集结而成的组合预测值,$t=1,2,\cdots,N$.

令 $\delta_t = \mathrm{COWA}([a_t,b_t]) = (1-\theta)a_t + \theta b_t$, $t=1,2,\cdots,N$. 由定义 8 表达式知,经 GICOWFPA 算子集结而成的组合预测值是一个确定的实数序列. 利用COWA算子也可将实际值区间数序列转换成一个确定的实数序列,且该实数序列与 GICOWFPA 算子集结的组合预测值序列具有相似性. 为了定量表示这两者的相似程度,以便加以比较,本文引入下列概念:

定义 9[9]　令 $\Gamma = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}\frac{1}{1+\alpha|\delta_t-\hat{\delta}_t|+\beta|(\delta_t-\hat{\delta}_t)-(\delta_{t-1}-\hat{\delta}_{t-1})|}$,则称 Γ 是 COWA 算子的实际值序列$\{\delta_t, t=1,2,\cdots,N\}$ 和 GICOWFPA 算子集结的组合预测值序列$\{\hat{\delta}_t, t=1,2,\cdots,N\}$ 的灰色趋势关联度,通常 $\alpha=0.5$, $\beta=1$. 显然有 $0<\Gamma\leqslant 1$.

根据定义 9 可知,灰色趋势关联度 Γ 为权系数 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 的函数($\Gamma(w_1,w_2,\cdots,w_m)$). 当 COWA 算子的实际值序列与 GICOWFPA 算子集结的组合预测值序列完全重合时,灰色趋势关联度的值为 1(最大值). 但在实际预测中,由于误差是客观存在的,因此灰色趋势关联度只能是趋近于 1. 灰色趋势关联度越大,COWA 算子的实际值序列与 GICOWFPA 算子集结的组合预测值序列越相似. 由此,可建立如下的基于 GICOWFPA 算子的最优区间型组合预测模型(3):

$$\max \Gamma(w_1,w_2,\cdots,w_m) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}\frac{1}{1+0.5|\delta_t-\hat{\delta}_t|+|(\delta_t-\hat{\delta}_t)-(\delta_{t-1}-\hat{\delta}_{t-1})|}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\delta_t = \mathrm{COWA}([a_t,b_t]) = (1-\theta)a_t+\theta b_t;\\ \hat{\delta}_t = f^{-1}\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i f^{2\lambda}(z)}{\sum_{i=1}^{m} w_i f^{\lambda}(z)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\},\ z=(1-\theta)a_{v\text{-}\mathrm{index}(i)}+\theta b_{v\text{-}\mathrm{index}(i)};\\ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1,\ w_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{3}$$

5　实例分析

为了验证模型(3) 的有效性,本文选取文献[9,11] 中算例的数据作为实例分析的数据,见表 1.

表 1　实际区间数和单项预测区间数

实际区间数$[a_t,b_t]$	方法 1 区间数$[a_{1t},b_{1t}]$	方法 2 区间数$[a_{2t},b_{2t}]$	方法 3 区间数$[a_{3t},b_{3t}]$
[3,4]	[2.4,5]	[3.6,5.4]	[3,3.6]
[5,5.6]	[2.2,6]	[5,6]	[4,5.2]
[4,6]	[3,8]	[5.2,7]	[4.3,5.1]
[6,10]	[4.6,11]	[6.8,11.6]	[6.1,7.3]
[6.6,8.8]	[6,12.4]	[8,9.6]	[7,8]
[9,11]	[7,15]	[9.6,12]	[9.1,9.9]

根据定义7,计算各时点处单项预测值区间数相对于实际值区间数的预测精度,结果见表2.

在GICOWFPA算子中取$Q(y)=y^3$,此时态度参数为$\theta=0.25$.由于GICOWFPA算子是一类抽象函数的信息集结算子,为了计算方便,本文选取以下3种代表性的单调函数类型:

表2　各时点处的预测精度

v_{1t}	v_{2t}	v_{3t}
0.890 8	0.702 0	0.937 2
0.851 3	0.959 7	0.873 9
0.815 2	0.790 7	0.925 1
0.977 6	0.847 0	0.815 7
0.747 7	0.864 0	0.966 4
0.835 3	0.918 7	0.946 1

1) 取线性函数$f(x)=x$时,则$F=\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}w_i((1-\theta)a_{v\text{-index}(it)}+\theta b_{v\text{-index}(it)})^{2\lambda}}{\sum\limits_{i=1}^{m}w_i((1-\theta)a_{v\text{-index}(it)}+\theta b_{v\text{-index}(it)})^{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$;

2) 取对数函数$f(x)=\ln x$时,则$F=\exp\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}w_i\ln^{2\lambda}((1-\theta)a_{v\text{-index}(it)}+\theta b_{v\text{-index}(it)})}{\sum\limits_{i=1}^{m}w_i\ln^{\lambda}((1-\theta)a_{v\text{-index}(it)}+\theta b_{v\text{-index}(it)})}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$;

3) 取反正切函数$f(x)=\arctan x$时,则$F=\tan\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}w_i\arctan^{2\lambda}((1-\theta)a_{v\text{-index}(it)}+\theta b_{v\text{-index}(it)})}{\sum\limits_{i=1}^{m}w_i\arctan^{\lambda}((1-\theta)a_{v\text{-index}(it)}+\theta b_{v\text{-index}(it)})}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

将表1和表2中的数据及上述3种函数代入基于GICOWFPA算子的区间型组合预测模型(3)中,随机选取$\lambda=0.01$, $\lambda=1$, $\lambda=2$,并借助Lingo软件分别求解出9种不同区间型组合预测模型(3)的最优权系数,结果见表3.

表3　模型(3)的最优权系数

不同的模型(3)	λ值	预测精度权系数		
		w_1	w_2	w_3
$f(x)=x$	$\lambda=0.01$	0.926 2	0.059 0	0.014 8
	$\lambda=1$	0.884 7	0.099 1	0.016 2
	$\lambda=2$	0.839 6	0.145 0	0.015 4
$f(x)=\ln x$	$\lambda=0.01$	0.934 9	0.051 1	0.014 0
	$\lambda=1$	0.908 2	0.075 9	0.015 9
	$\lambda=2$	0.879 6	0.103 8	0.016 6
$f(x)=\arctan x$	$\lambda=0.01$	0.940 2	0.046 3	0.013 5
	$\lambda=1$	0.934 3	0.051 6	0.014 1
	$\lambda=2$	0.928 1	0.057 2	0.014 7

为了客观地评价预测结果,本文选取MSEP ($MSEP=\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N}(c_t-\hat{c}_t)^2$)、MSEL ($MSEL=\frac{1}{N}\cdot\sum\limits_{t=1}^{N}(r_t-\hat{r}_t)^2$)、MSEI ($MSEI=MSEP+MSEL=\left(\sum\limits_{t=1}^{N}(c_t-\hat{c}_t)^2+\sum\limits_{t=1}^{N}(r_t-\hat{r}_t)^2\right)/N$、MRIE ($MRIE=\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N}\frac{|c_t-\hat{c}_t|}{r_t+\hat{r}_t}$) 4种误差指标作为评价体系.其中$c_t$和$r_t$为实际值区间数的中点和半径,$\hat{c}_t$和$\hat{r}_t$为组合预测值区间数的中点和半径.根据表3中的最优权系数计算出组合预测值区间数.利用上述误差公式计算出基于GICOWFPA算子的不同函数及参数下的区间型组合预测模型(3)的误差值,结果见表4.

表 4　4 种误差指标值

不同的模型方法	MSEP	MSEL	MSEI	MRIE
单项预测方法 1	0.836 7	3.383 3	4.220 0	0.231 1
单项预测方法 2	0.923 3	0.083 3	1.006 6	0.459 8
单项预测方法 3	0.433 3	0.528 3	0.961 6	0.370 7
模型(3)：$f(x)=x,\lambda=0.01$	0.047 3	0.345 6	0.392 9	0.036 6
模型(3)：$f(x)=x,\lambda=1$	0.032 5	0.310 7	0.343 2	0.033 3
模型(3)：$f(x)=x,\lambda=2$	0.021 2	0.279 9	0.301 1	0.029 7
模型(3)：$f(x)=\ln x,\lambda=0.01$	0.050 8	0.354 1	0.404 9	0.037 3
模型(3)：$f(x)=\ln x,\lambda=1$	0.040 4	0.329 4	0.369 8	0.035 2
模型(3)：$f(x)=\ln x,\lambda=2$	0.031 0	0.306 4	0.337 4	0.032 9
模型(3)：$f(x)=\arctan x,\lambda=0.01$	0.053 1	0.359 3	0.412 4	0.037 7
模型(3)：$f(x)=\arctan x,\lambda=1$	0.050 6	0.353 4	0.404 0	0.037 2
模型(3)：$f(x)=\arctan x,\lambda=2$	0.048 0	0.347 4	0.395 3	0.036 8
文献[9] 的方法	0.297 7	0.364 0	0.661 7	0.189 8
文献[11] 的方法	0.280 1	0.565 0	0.845 1	0.229 1

由表 4 可以看出，模型(3)的所有 4 种误差值都远远小于 3 种单项预测方法和文献[9，11]提出的方法的误差值，尤其在 MSEP 和 MRIE 这两种误差指标上. 另外，在同一类型函数的 GICOWFPA 算子中，随着参数 λ 的增大，4 种误差值都呈现减少的趋势，即预测效果不断提升.

6　结束语

本文从函数族角度出发，结合 IOWA 算子、COWA 算子和 GWFPA 算子 3 种信息集结算子的优点，构建了一类函数族的广义诱导连续区间有序函数比例加权平均(GICOWFPA)算子，并结合灰色趋势关联度最优准则，构建了一种基于 GICOWFPA 算子的区间型组合预测模型. 实例分析表明，本文提出的区间型组合预测模型能有效地提高模型的预测精确性，且优于单项预测方法和文献[9，11]中的区间型组合预测方法. 本文在研究过程中，对模型(3)仅选取了 3 种特殊的单调函数和 3 个参数作为代表对其进行了讨论，今后将对此问题作进一步研究，以提高本文预测模型的有效性.

参考文献：

[1]　Bates J M, Granger C W J. Combination of forecasts[J]. Operations Research Quarterly, 1969,20(4):451-468.
[2]　唐小我，马永开，曾勇，等. 现代组合预测和组合投资决策方法及应用研究[M]. 北京：科学出版社，2003.
[3]　陈华友. 组合预测方法有效性理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2008.
[4]　汪同三，张涛. 组合预测：理论、方法及应用[M]. 北京：社会科学文献出版社，2008.
[5]　刘攀，冯长焕. 基于 IGOWFPA 算子的组合预测模型[J]. 西华师范大学学报(自然科学版)，2018，39(1)：62-67.
[6]　袁宏俊，张超. IGOWC-OWGA 算子及其在区间组合预测中的应用[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2016，40(1)：11-17.
[7]　胡凌云，袁宏俊，周洁. 基于区间数距离的 IGOWLA 算子的区间型组合预测模型[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2018，44(2)：109-115.
[8]　金飞飞，李捷，陈华友，等. 基于连续有序加权平均算子的区间组合预测[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版)，2013，35(5)：668-672.
[9]　曹晓俊，袁宏俊. 连续区间广义有序加权调和平均算子及其在区间组合预测中应用[J]. 南京理工大学学报(自然科学版)，2017，41(1)：123-131.
[10]　朱家明，陈华友，周礼刚，等. 基于 UWPA 算子的区间组合预测模型及其应用[J]. 统计与决策，2015(19)：83-86.
[11]　张超，袁宏俊. 一类诱导广义有序加权对数的连续区间有序加权调和平均算子及其应用[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2017，43(4)：302-307.
[12]　胡纪纲，芮源，袁宏俊. 基于区间关联度的 IOWGA 算子的区间组合预测[J]. 统计与决策，2016(12)：19-22.