文章编号： 1004-4353(2018)04-0310-05

矩阵方程 $AXA^{H}=B$ 的 Hermitian R-反对称最小二乘解

张秀英[1]， 冯宇[2]

（1.长春师范大学 国际教师教育学院，吉林 长春 130032；2.延边大学 信息化中心，吉林 延吉 133002）

摘要： 研究了复矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{H}=\boldsymbol{B}$ 的 Hermitian R-反对称形式的最小二乘解. 首先利用奇异值分解得到了 Hermitian R-反对称最小二乘解的解析表达式,然后利用商奇异值分解得到了极小范数最小二乘解的一般形式.

关键词： 最小二乘解；极小范数；Hermitian R-反对称；奇异值分解

中图分类号： O241.2　　　**文献标识码：** A

Least-squares solutions for Hermitian R-skew symmetric matrices of matrix equation $AXA^{H}=B$

ZHANG Xiuying[1]， FENG Yu[2]

（1. *International Education Teachers School*, *Changchun Normal University*, *Changchun* 130032, *China*; 2. *Information Center of Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*）

Abstract: Least-squares solutions to matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{H}=\boldsymbol{B}$ in the set of Hermitian R-skew symmetric matrices are considered. Using SVD, analytic expressions for least-squares solutions are obtained, then general form for the minimal norm least-squares solutions is derived by Q-SVD.

Keywords: least-squares solutions; minimal norm; Hermitian R-skew symmetric; singular value decomposition

令 $\boldsymbol{U}^{n\times n}$、$\boldsymbol{H}^{n\times n}$、$\boldsymbol{AH}^{n\times n}$ 分别表示 $n\times n$ 阶的酉矩阵、Hermitian 矩阵和反 Hermitian 矩阵的全体，$\boldsymbol{A}^{H}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置，$\boldsymbol{A}^{+}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆，分块矩阵中的单位块和零块分别用 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{O}$ 表示. $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积与 Hadamard 积，$\|\cdot\|$ 表示取 Frobenius 范数，col($\boldsymbol{A}$) 表示将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列进行拉直.

近些年来，一些学者对矩阵方程满足给定约束条件的解进行了研究，并取得了一些成果. 对于线性矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{H}=\boldsymbol{B}$（其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{m\times m}$），Liu Y. H. 等[1] 研究了该方程的 Hermitian 及反 Hermitian 解的秩，Tian Y.[2] 给出了该方程的最小二乘解和最小秩解的关系，Wei M. 等[3] 和 Zhang X. 等[4] 研究了该方程秩约束条件下的 Hermitian 非负定解，Xiao Q. F. 等[5] 给出了方程 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的反对称正交对称解的结构.

设 $\boldsymbol{R}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个非平凡的酉对合矩阵，即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{H}=\boldsymbol{R}^{-1}\neq\boldsymbol{I}$，若矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{RXR}=-\boldsymbol{X}$，则称 $\boldsymbol{X}$ 是 Hermitian R-反对称的[6]. 令 $\boldsymbol{\Phi}=\{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{H}^{n\times n}\mid\boldsymbol{RXR}=-\boldsymbol{X}\}$，即 $\boldsymbol{\Phi}$ 为 n 阶 Hermitian R-反对称矩阵的集合. 本文研究如下最小二乘问题的极小范数最小二乘解：

$$\min_{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{\Phi}}\|\boldsymbol{AXA}^{H}-\boldsymbol{B}\|,\ \boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n},\ \boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{m\times m}. \tag{1}$$

收稿日期： 2018-06-24　　　**基金项目：** 长春师范大学自然科学研究项目(长师[2016]第 03 号)

作者简介： 张秀英(1984—),女,助教,研究方向为矩阵分析与计算.

1　Hermitian R-反对称矩阵的结构

令 r 和 s 表示非平凡酉对合矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的对应于特征值 1 和 -1 的特征子空间的维数，则有 $r,s\geqslant 1$ 并且 $r+s=n$. 设 $\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$ 和 $\{q_1,q_2,\cdots,q_s\}$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的属于特征值 1 和 -1 的特征子空间的正交向量，且 $\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_r)$，$\boldsymbol{Q}=(q_1,q_2,\cdots,q_s)$，则 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}$. 因此，

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

对于任意的矩阵 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{H}^{n\times n}$，有如下相应的分块形式：

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{XP}\in\boldsymbol{H}^{r\times r}$，$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{XQ}\in\boldsymbol{H}^{s\times s}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{XQ}\in\mathbf{C}^{r\times s}$. 由式(2) 和式(3) 可得

$$\boldsymbol{RXR}=(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & -\boldsymbol{Y}\\ -\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

引理 1[7]　$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是 Hermitian R-反对称的当且仅当 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{Y}\in\mathbf{C}^{r\times s}$.

为讨论方便，本文引入以下记号和分块形式. 记：

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{AP}\in\mathbf{C}^{m\times r},\ \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{AQ}\in\mathbf{C}^{m\times s}. \tag{5}$$

对 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 进行约化的奇异值分解，得：

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{H}}, \tag{6}$$

其中，对角阵 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 分别由矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的非零奇异值构成，故 $\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 的阶数分别对应矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 的秩. 对 $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2$ 进行满奇异值分解，得

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{V}_{12}^{\mathrm{H}}. \tag{7}$$

因 $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2$ 为行正交阵，故其奇异值小于或者等于 1，因此 $\boldsymbol{D}_{12}$ 有如下的分块形式：

$$\boldsymbol{D}_{12}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & & \\ & \boldsymbol{D} & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的元素小于 1. 相应地，根据 $\boldsymbol{D}_{12}$ 的分块形式对 $\boldsymbol{U}_{12},\boldsymbol{V}_{12}$ 进行分块，得：

$$\boldsymbol{U}_{12}=(\boldsymbol{U}_{12}^1,\boldsymbol{U}_{12}^2,\boldsymbol{U}_{12}^3),\ \boldsymbol{V}_{12}=(\boldsymbol{V}_{12}^1,\boldsymbol{V}_{12}^2,\boldsymbol{V}_{12}^3). \tag{9}$$

2　Hermitian R-反对称形式的最小二乘解

由引理 1 知，

$$\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}-\boldsymbol{B}=$$
$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{YA}_2^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}.$$

因此，最小二乘问题(1) 可转化为

$$\min_{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{\Phi}}\|\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|^2=\min_{\boldsymbol{Y}\in\mathbf{C}^{r\times s}}\|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{YA}_2^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{B}\|^2. \tag{10}$$

引理 2　最小二乘问题

$$\min_{\boldsymbol{Y}\in\mathbf{C}^{r\times s}}\|\boldsymbol{AYB}-\boldsymbol{CY}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}\| \tag{11}$$

等价于求解相容矩阵方程：

$$A^{H}AYBB^{H}+A^{H}CY^{H}DB^{H}+DB^{H}Y^{H}A^{H}C+DD^{H}YC^{H}C=A^{H}EB^{H}+DE^{H}C.$$

证明 由文献[6]可知,存在一个置换矩阵 $P(l,n)$,使得问题(11)等价于下面的最小二乘问题:

$$[B^{T}\otimes A+(D^{T}\otimes C)P(l,n)]\mathrm{col}(Y)=\mathrm{col}(E).$$

上述最小二乘问题的正规方程如下:

$$[B^{T}\otimes A+(D^{T}\otimes C)P(l,n)]^{H}[B^{T}\otimes A+(D^{T}\otimes C)P(l,n)]\mathrm{col}(Y)=$$
$$[B^{T}\otimes A+(D^{T}\otimes C)P(l,n)]^{H}\mathrm{col}(E).$$

利用 Kronecker 积,引理 2 即可得证.

引理 3[7] 如果 $A+A^{H}=B$,那么 $A=\frac{1}{2}B+Z$,其中 $Z=-Z^{H}$.

引理 4[7] 线性矩阵方程 $AXB=C$ 是相容的当且仅当 $AA^{+}CB^{+}B=C$;此时,方程的解可以表示为 $X=A^{+}CB^{+}+R-A^{+}ARBB^{+}$,其中 R 为满足阶数要求的任意矩阵.更进一步,$\|X\|^{2}=\|A^{+}CB^{+}\|^{2}+\|R-A^{+}ARBB^{+}\|^{2}$.

引入记号 $\widetilde{Y}$,

$$\widetilde{Y}=U_{12}^{H}D_{1}V_{1}^{H}YV_{2}D_{2}V_{12},\tag{12}$$

将式(9)代入式(12)可得 $\widetilde{Y}$ 的如下分块形式:

$$\widetilde{Y}=\begin{pmatrix}(U_{12}^{1})^{H}\\(U_{12}^{2})^{H}\\(U_{12}^{3})^{H}\end{pmatrix}D_{1}V_{1}^{H}YV_{2}D_{2}(V_{12}^{1},V_{12}^{2},V_{12}^{3})=\begin{pmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&\Gamma_{13}\\\Gamma_{21}&\Gamma_{22}&\Gamma_{23}\\\Gamma_{31}&\Gamma_{32}&\Gamma_{33}\end{pmatrix}.\tag{13}$$

同样,可将矩阵 $U_{12}^{H}U_{1}^{H}\frac{B+B^{H}}{2}U_{2}V_{12}$ 的分块形式表示为

$$U_{12}^{H}U_{1}^{H}\frac{B+B^{H}}{2}U_{2}V_{12}=\begin{pmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{12}&\Delta_{13}\\\Delta_{21}&\Delta_{22}&\Delta_{23}\\\Delta_{31}&\Delta_{32}&\Delta_{33}\end{pmatrix}.\tag{14}$$

再令

$$H=D_{1}^{-1}(U_{12}^{1},U_{12}^{2},U_{12}^{3})\begin{pmatrix}\Gamma_{11}/2&\Gamma_{12}&\Gamma_{13}\\\Gamma_{21}&\Gamma_{22}&\Gamma_{23}\\\Gamma_{31}&\Gamma_{32}&\Gamma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(V_{12}^{1})^{H}\\(V_{12}^{2})^{H}\\(V_{12}^{3})^{H}\end{pmatrix}D_{2}^{-1}.\tag{15}$$

基于以上矩阵的分块表示,可得如下结论:

定理 1 令 P 和 Q 分别由矩阵 R 的属于特征值 1 和 −1 的特征子空间的正交基构成.A_{1} 和 A_{2} 如式(5),对 A_{1} 和 A_{2} 进行约化的奇异值分解如式(6),对 $U_{1}^{H}U_{2}$ 进行满奇异值分解如式(7),矩阵 H 的定义如式(15),则最小二乘问题(1)的解具有下面的形式:

$$X=(P,Q)\begin{pmatrix}O&Y\\Y^{H}&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{H}\\Q^{H}\end{pmatrix},$$

其中 $Y=V_{1}(D_{1}^{-1}U_{12}^{1}Z(V_{12}^{1})^{H}D_{2}^{-1}+H)V_{2}^{H}+R_{Y}-V_{1}V_{1}^{H}R_{Y}V_{2}V_{2}^{H}$,$Z$ 是反 Hermitian 阵,R_{Y} 为满足阶数要求的任意矩阵.

证明 当 $X\in\Phi$,由式(10)和引理 2 可知,最小二乘问题(1)等价于解下面的正规方程:

$$A_{1}^{H}A_{1}YA_{2}^{H}A_{2}+A_{1}^{H}A_{2}Y^{H}A_{1}^{H}A_{2}=A_{1}^{H}\frac{B+B^{H}}{2}A_{2}.$$

对 A_{1},A_{2},$U_{1}^{H}U_{2}$ 进行奇异值分解,把分解结果代入上式有

$$U_{12}^{H}D_{1}V_{1}^{H}YV_{2}D_{2}V_{12}+D_{12}V_{12}^{H}D_{2}V_{2}^{H}Y^{H}V_{1}D_{1}U_{12}D_{12}=U_{12}^{H}U_{1}^{H}\frac{B+B^{H}}{2}U_{2}V_{12}.$$

由式(12)知,此方程等价于 $\widetilde{Y}+D_{12}\widetilde{Y}^{H}D_{12}=U_{12}^{H}U_{1}^{H}\frac{B+B^{H}}{2}U_{2}V_{12}$.由式(13)和(14)的分块形式可得

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^{H} & \Gamma_{21}^{H}D & O\\ D\Gamma_{12}^{H} & D\Gamma_{22}^{H}D & O\\ O & O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23}\\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33}\end{pmatrix}.$$

上式中等号左边的块矩阵除了 Γ_{11} 都是确定的. $\Gamma_{11}+\Gamma_{11}^{H}=\Delta_{11}$，由引理 3 知，$\Gamma_{11}=\frac{\Delta_{11}}{2}+Z\,(Z=-Z^{H})$. 因此由式(15) 知

$$V_1^{H}YV_2=D_1^{-1}U_{12}\widetilde{Y}V_{12}^{H}D_2^{-1}=$$

$$D_1^{-1}(U_{12}^{1},U_{12}^{2},U_{12}^{3})\begin{pmatrix}\Delta_{11}/2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(V_{12}^{1})^{H}\\ (V_{12}^{2})^{H}\\ (V_{12}^{3})^{H}\end{pmatrix}D_2^{-1}=D_1^{-1}U_{12}^{1}Z(V_{12}^{1})^{H}D_2^{-1}+H,$$

其中 $Z=-Z^{H}$. 由引理 4 得到 Y 的表达式，证毕.

3　极小范数解

引理 5(Q-SVD)[8]　假设 $A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{p\times n}$，那么存在 $U\in U^{m\times m}$，$V\in U^{p\times p}$ 以及非奇异矩阵 $M\in C^{n\times n}$，使得 $A=U(\Sigma_1,O)M$，$B=V(\Sigma_2,O)M$，其中：

$$\Sigma_1=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}k & q & m-k-q\end{array}\\ \begin{pmatrix}I_1 & & \\ & S_1 & \\ & & O_1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}k\\ q\\ m-k-q\end{array},\quad \Sigma_2=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}k & q & t-k-q\end{array}\\ \begin{pmatrix}O_2 & & \\ & S_2 & \\ & & I_2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}p+k-t\\ q\\ t-k-q\end{array},$$

$t=r(A^{H},B^{H})$，$k=t-r(B)$，$q=r(A)+r(B)-t$，$S_1=\mathrm{diag}(S_{11},S_{12},\cdots,S_{1q})\,(1>S_{11}\geqslant\cdots\geqslant S_{1q}>0)$，$S_2=\mathrm{diag}(S_{21},S_{22},\cdots,S_{2q})\,(0<S_{21}\leqslant\cdots\leqslant S_{2q}<1)$，$S_{1i}^2+S_{2i}^2=1\,(i=1,2,\cdots,q)$.

引理 6　假设 $S_1,S_2,E\in C^{p\times p}$，$S_1$ 和 S_2 是对角矩阵，则满足 $Z=\min\limits_{Z\in AH^{p\times p}}\|S_1ZS_2-E\|$ 的解 Z_0 唯一. 此时，$Z_0=\Phi*(S_1ES_2-S_2E^{H}S_1)$，其中 $\Phi_{ij}=\dfrac{1}{S_{1i}^2S_{2j}^2+S_{1j}^2S_{2i}^2}$，$1\leqslant i,j\leqslant p$.

证明　对任意的 $Z\in AH^{p\times p}$，由于 $Z_{ji}=-\bar{Z}_{ij}$，

$$\|S_1ZS_2-E\|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(|S_{1i}S_{2j}Z_{ij}-E_{ij}|^2+|S_{2i}S_{1j}\bar{Z}_{ij}+\bar{E}_{ij}|^2).$$

上式是关于 $\mathrm{Re}(Z_{ij})$ 和 $\mathrm{Im}(Z_{ij})$ 的 p^2 元的连续可微函数，$1\leqslant i,j\leqslant p$. 因此，使上式达到最小的点是唯一的，其最小点 Z_0 满足 $Z_{ij}=\dfrac{S_{1i}S_{2j}E_{ij}-S_{2i}S_{1j}\bar{E}_{ij}}{S_{1i}^2S_{2j}^2+S_{2i}^2S_{1j}^2}$. 证毕.

利用引理 5，矩阵对 $(D_1^{-1}U_{12}^{1},D_1^{-1}V_{12}^{1})$ 的商奇异值分解具有如下形式：

$$D_1^{-1}U_{12}^{1}=U(\Sigma_1,O)M,\ D_2^{-1}V_{12}^{1}=V(\Sigma_2,O)M,\tag{16}$$

其中 $\Sigma_1=\begin{pmatrix}I_1 & & \\ & S_1 & \\ & & O\end{pmatrix}$，$\Sigma_2=\begin{pmatrix}O & & \\ & S_2 & \\ & & I_2\end{pmatrix}$. 对 U,V 及 MZM^{H} 进行相应的分块：

$$U=(U^1,U^2,U^3),\ V=(V^1,V^2,V^3);\tag{17}$$

$$MZM^{H}=\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14}\\ -Z_{12}^{H} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24}\\ -Z_{13}^{H} & -Z_{23}^{H} & Z_{33} & Z_{34}\\ -Z_{14}^{H} & -Z_{24}^{H} & -Z_{34}^{H} & Z_{44}\end{pmatrix},\tag{18}$$

其中 $Z_{ii}\,(i=1,2,3,4)$ 是反 Hermitian 阵. 记

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{U}^1)^{\mathrm{H}}\\(\boldsymbol{U}^2)^{\mathrm{H}}\\(\boldsymbol{U}^3)^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V}^1,\boldsymbol{V}^2,\boldsymbol{V}^3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}&\boldsymbol{H}_{13}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{H}_{22}&\boldsymbol{H}_{23}\\\boldsymbol{H}_{31}&\boldsymbol{H}_{32}&\boldsymbol{H}_{33}\end{pmatrix}. \tag{19}$$

基于以上矩阵的分块表示可得以下结论:

定理 2 最小二乘问题(1) 的解的表达式如定理 1 所示. 对矩阵对$(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{U}_{12}^1,\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{V}_{12}^1)$进行商奇异值分解如式(16),对矩阵 $\boldsymbol{MZM}^{\mathrm{H}}$,$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{HV}$ 进行分块表示如式(18) 和(19). 则当矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 满足下列条件时,矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是最小二乘问题(1) 的极小范数最小二乘解:$\boldsymbol{R}_Y=0$, 且 $\boldsymbol{Z}$ 满足

$$\boldsymbol{MZM}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}\boldsymbol{S}_2^{-1}&\boldsymbol{H}_{13}&\boldsymbol{Z}_{14}\\-\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{H}_{12}^{\mathrm{H}}&\boldsymbol{Z}_{22}&\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{H}_{23}&\boldsymbol{Z}_{24}\\-\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{H}}&-\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}_1^{-1}&\boldsymbol{Z}_{33}&\boldsymbol{Z}_{34}\\-\boldsymbol{Z}_{14}^{\mathrm{H}}&-\boldsymbol{Z}_{24}^{\mathrm{H}}&-\boldsymbol{Z}_{34}^{\mathrm{H}}&\boldsymbol{Z}_{44}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{Z}_{22}=\boldsymbol{\Phi}*(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}_1)$, $\boldsymbol{\Phi}_{ij}=\dfrac{1}{\boldsymbol{S}_{1i}^2\boldsymbol{S}_{2j}^2+\boldsymbol{S}_{2i}^2\boldsymbol{S}_{1j}^2}$, $\boldsymbol{Z}_{14}$,$\boldsymbol{Z}_{24}$,$\boldsymbol{Z}_{34}$ 是任意的, $\boldsymbol{Z}_{11}$,$\boldsymbol{Z}_{33}$,$\boldsymbol{Z}_{44}$ 是反 Hermitian 阵.

证明 由定理 1 知, $\|\boldsymbol{X}\|^2=\left\|(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\\\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}\right\|^2=2\|\boldsymbol{Y}\|^2$. 令 $\boldsymbol{R}_Y=0$, 由式(16)—(19) 可得

$$\|\boldsymbol{Y}\|^2=\|\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{U}_{12}^1\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{V}_{12}^1)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_2^{-1}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{H}}\|^2=$$
$$\|\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{U}_{12}^1\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{V}_{12}^1)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_2^{-1}+\boldsymbol{H}\|^2+\|\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{V}_{12}^1\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}_{12}^1)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}_2^{-1}-\boldsymbol{G}\|^2=\|\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{MZM}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Sigma}_2^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{HU}\|^2=$$
$$\left\|\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Z}_{12}\boldsymbol{S}_2&\boldsymbol{Z}_{13}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{Z}_{22}\boldsymbol{S}_2&\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{Z}_{23}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}&\boldsymbol{H}_{13}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{H}_{22}&\boldsymbol{H}_{23}\\\boldsymbol{H}_{31}&\boldsymbol{H}_{32}&\boldsymbol{H}_{33}\end{pmatrix}\right\|^2.$$

因此当 $\boldsymbol{Z}_{12}=\boldsymbol{H}_{12}\boldsymbol{S}_2^{-1}$, $\boldsymbol{Z}_{13}=\boldsymbol{H}_{13}$, $\boldsymbol{Z}_{23}=\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{H}_{23}$, $\boldsymbol{Z}_{22}=\min\|\boldsymbol{S}_1\bar{\boldsymbol{Z}}_{22}\boldsymbol{S}_2-\boldsymbol{H}_{22}\|^2$, 其中 $\bar{\boldsymbol{Z}}_{22}$ 为反 Hermitian 阵时, $\|\boldsymbol{X}\|$ 的值最小. 由引理 6,定理 2 得证.

参考文献:

[1] Liu Y H, Tian Y G, Takane Y. Ranks of Hermitian and skew-Hermitian solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^*=\boldsymbol{B}$[J]. Linear Algebra Appl, 2009,431(12):2359-2372.

[2] Tian Y. Least-squares solutions and least-rank solutions of the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^*=\boldsymbol{B}$ and their relations[J]. Numer Linear Algebra and Appl, 2013,20(5):713-722.

[3] Wei M, Wang Q. On rank-constrained Hermitian nonnegative-definite Least squares solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$[J]. Taylor & Francis, inc, 2007,84(6):945-952.

[4] Zhang X, Cheng M. The rank-constrained Hermitian nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $\boldsymbol{AXA}^*=\boldsymbol{B}$[J]. Linear Algebra and its Appl, 2003,370:163-174.

[5] Xiao Q F, Hu X Y, Zhang L. The anti-symmetric ortho-symmetric solution of the matrix equation $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{D}$[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2009,18(1):21-29.

[6] Trench William F. Hermitian, hermitian *R*-symmetric, and hermitian *R*-skew symmetric Procrustes problems[J]. Linear Algebra and its Appl, 2004,387(5):83-98.

[7] Shim S Y, Chen Y. Least squares solution of matrix equation $\boldsymbol{AXB}^*+\boldsymbol{CYD}^*=\boldsymbol{E}$[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 2003,24(3):802-808.

[8] 魏木生. 广义最小二乘问题的理论和计算[M]. 北京:科学出版社,2016:6-9.