文章编号：1004-4353(2018)04-0306-04

一类具有常数收获率的捕食者-食饵系统的Turing不稳定性

张丽丽

(陇东学院 数学与统计学院，甘肃 庆阳 745000)

摘要：讨论了一类具有常数收获率的捕食者-食饵系统.利用 Hopf 分歧定理得到了 ODE 模型正平衡点的渐近稳定性和 PDE 模型的 Turing 不稳定性.

关键词：捕食者-食饵模型；收获率；扩散；Turing 不稳定性

中图分类号：O175.8　　　**文献标识码**：A

The Turing instability in a class of predator-prey system with constant harvesting rate

ZHANG Lili

(*School of Mathematics and Statistics*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*)

Abstract: In this paper, a class of predator-prey system with constant harvesting rate is discussed. The asymptotic stability of the positive equilibrium point of the ODE model and the Turing instability of the PDE model are obtained by using the Hopf bifurcation theorem.

Keywords: predator-prey models; harvesting rate; diffusion; Turing instability

0 引言

种群生态学是生态学中的一个重要分支，与人们的生产生活密切相关.在实际生产中，为了兼顾物种的长期存活以及自然生物链的持续和最大收获，学者们建立了带有收获项的捕食者-食饵系统.例如：1999 年，肖冬梅等[1]对带有常数食饵收获项的捕食者-食饵系统进行了分支分析，给出了系统经历 Bogdanov-Takens 分支的临界条件；2013 年，Gupta 等[2]对带有 Michaelis-Menten 型食饵收获项的捕食者-食饵系统进行了稳定性和分支分析.其他收获率捕食模型的研究参看文献[3-7].

本文讨论食饵种群具有常数收获率的一类捕食者-食饵 ODE 系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a\dfrac{u^2}{v}-bu-h\equiv f(u,v), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=ru^2-crv\equiv g(u,v), \\ u(0)>0,\ v(0)>0. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$u(t)$ 和 $v(t)$ 分别表示食饵和捕食者在时刻 t 的种群密度；a,r,c,b,h 都是正参数，分别表示食饵的固有增长率、捕食者的增长率、捕食者的死亡率、捕食率和收获率.

收稿日期：2018－05－17

作者简介：张丽丽(1985—)，女，讲师，研究方向为偏微分方程与生物数学.

受自然条件及外界因素的影响，在固有的有界区域内的不同空间位置上，捕食者和食饵的分布都是不均匀的，且每个物种都会有扩散到较小密度区域的自然倾向. 为了准确地描述种群的这种空间分布的复杂性，学者们建立了带有扩散的捕食者-食饵系统. 2001 年，Faria[8] 对具有时滞和扩散项的捕食-食饵系统进行了稳定性和分支分析. 其他 Turing 不稳定性的研究参见文献[9-12]. 本文进一步讨论系统(1)的半线性反应扩散模型

$$\begin{cases}\partial_t u - d_1\Delta u = a\dfrac{u^2}{v} - bu - h,\ x\in\Omega,\ t>0;\\ \partial_t v - d_2\Delta v = ru^2 - crv,\ x\in\Omega,\ t>0;\\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0,\ x\in\Omega,\ t>0;\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ x\in\Omega\end{cases} \tag{2}$$

的 Turing 不稳定性. 其中：Ω 是边界光滑的有界区域；$\boldsymbol{\nu}$ 是边界 Ω 上的单位外法向量；d_1 和 d_2 分别表示食饵种群和捕食者种群的自扩散系数，均为正；$u_0(x)$，$v_0(x)$ 是非负不恒为零的连续函数.

注意到，系统(1) 的解是系统(2) 的特解，从而系统(1) 的平衡解也是系统(2) 的平衡解. 容易验证，系统无边界平衡点，且当 $ac>h$ 时仅存在惟一正平衡点 $E_*(u_*,v_*)$，其中 $u_*=\dfrac{ac-h}{b}$，$v_*=\dfrac{(ac-h)^2}{b^2c}$.

1　主要结果及其证明

1.1　ODE 模型正平衡点的稳定性和 Hopf 分歧

模型(1) 在正平衡点 $E_*(u_*,v_*)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{L} := \begin{bmatrix}\dfrac{2au_*}{v_*}-b & -\dfrac{au_*^2}{v_*^2}\\ 2ru_* & -cr\end{bmatrix}.$$

为方便，令 $k_0=\dfrac{2au_*}{v_*}-b$，$k=cr$，则系统(1) 在 $E_*(u_*,v_*)$ 处的线性化特征方程为

$$\lambda^2-\lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{L}+\det\boldsymbol{L}=0, \tag{3}$$

其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=k_0-k$，$\det\boldsymbol{L}=bcr=bk>0$. 方程(3) 有两个根：

$$l_{1,2}=\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}\pm\sqrt{(\mathrm{tr}\boldsymbol{L})^2-4\det\boldsymbol{L}}}{2}. \tag{4}$$

因此，当 $\mathrm{tr}\boldsymbol{L}<0$（即 $k>k_0$）时，方程(3) 的两个根有负实部，从而正平衡点 $E_*(u_*,v_*)$ 稳定；反之，当 $\mathrm{tr}\boldsymbol{L}>0$（即 $k<k_0$）时，$E_*(u_*,v_*)$ 不稳定.

令 $\beta=\sqrt{\det\boldsymbol{L}}$，代入式(4) 知，当 $k=k_0$ 时，方程(3) 有一对纯虚根 $\pm\mathrm{i}\beta$. 由 Hopf 分歧定理知，如果横截性条件成立，则当 k 穿过 k_0 时，系统(1) 能从正平衡点 E_* 分歧出小的周期解. 本文以 k 为分歧参数验证横截性条件. 令 $\lambda=p+\mathrm{i}q$ 是方程(3) 的根，则当 $k=k_0$ 时，$p=0$. 将 $\lambda=p+\mathrm{i}q$ 代入方程(3) 并分离其实部和虚部，得：

$$\begin{aligned}&p^2-q^2-p\,\mathrm{tr}\boldsymbol{L}+\det\boldsymbol{L}=0,\\&2pq-q\,\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=0.\end{aligned} \tag{5}$$

对式(5) 的第 2 个式子两边进行变量 k 求导，得 $p'_k|_{k=k_0}=-\dfrac{1}{2}\neq 0$. 因此，横截性条件成立. 根据 Hopf 分歧定理，有如下结论：

定理 1　当 $k>k_0$ 时，系统(1) 的正平衡点 $E_*(u_*,v_*)$ 是稳定的；当 $k<k_0$ 时，$E_*(u_*,v_*)$ 是不稳定的；当 $k=k_0$ 时，系统(1) 在正平衡点 $E_*(u_*,v_*)$ 处出现 Hopf 分歧.

1.2 半线性反应扩散导致的 Turing 不稳定性

作扰动 $u=u_*+\tilde{u}$, $v=v_*+\tilde{v}$, 并将其代入系统(2),仍用 u 代替 $\tilde{u}$, 用 v 代替 $\tilde{v}$, 得

$$\begin{cases}\partial_t u-d_1\Delta u=a\dfrac{(u+u_*)^2}{v+v_*}-b(u+u_*)-h,\\ \partial_t v-d_2\Delta v=r(u+u_*)^2-cr(v+v_*).\end{cases}\tag{6}$$

系统(6)在(0,0)处的线性化系统为

$$\begin{pmatrix}\partial_t u\\ \partial_t v\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\dfrac{2au_*}{v_*}-b+d_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\dfrac{au_*^2}{v_*^2}\\ 2ru_* & -cr+d_2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D\Delta}$, 这里 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}$. 由分离变量法知,系统(7)有以下解:

$$\begin{pmatrix}u(x,t)\\ v(x,t)\end{pmatrix}=\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t}\cos jx.\tag{8}$$

将式(8)代入系统(7)中得

$$\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\end{pmatrix}\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\cos jx=\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\dfrac{2au_*}{v_*}-b+d_1\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\dfrac{au_*^2}{v_*^2}\\ 2ru_* & -cr+d_2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t}\cos jx.$$

按 j 整理,得

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_j)\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ j=0,1,2,\cdots,\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{L}_j=\begin{pmatrix}\dfrac{2au_*}{v_*}-b-d_1j^2 & -\dfrac{au_*^2}{v_*^2}\\ 2ru_* & -cr-d_2j^2\end{pmatrix}$. 式(9)有非零解当且仅当 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}_j)=0$, 即

$$\lambda^2-\lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{L}_j+\det\boldsymbol{L}_j=0.\tag{10}$$

其中:

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}_j=\frac{2au_*}{v_*}-b-d_1j^2-cr-d_2j^2=k_0-k-(d_1+d_2)j,$$

$$\det\boldsymbol{L}_j=\left\{\frac{2au_*}{v_*}-b-d_1j^2\right\}\{-cr-d_2j^2\}+\frac{au_*^2}{v_*^2}\cdot 2ru_*=d_1d_2j^4+qj^2+crb.$$

方程(10)有两个根 $l_{1,2}=\dfrac{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}_j\pm\sqrt{(\mathrm{tr}\boldsymbol{L}_j)^2-4\det\boldsymbol{L}_j}}{2}$, 这里 $q=crd_1-(\dfrac{2au_*}{v_*}-b)d_2$.

当 $k>k_0$ 时, $\mathrm{tr}\boldsymbol{L}_j<0$, $j=0,1,2,\cdots$. 要使扩散项导致 Turing 不稳定性,需存在某个 $\det\boldsymbol{L}_j<0$, 此时必须 $q<0$, 从而有 $d_2>\dfrac{cr}{\dfrac{2au_*}{v_*}-b}d_1$.

下面讨论 $\det\boldsymbol{L}_j<0$ 的充要条件. 为便于讨论,记 $\det\boldsymbol{L}_j=\varphi(j^2)$, 它为开口向上的抛物线. $\varphi(j^2)>0$ 当且仅当 $\Delta<0$ ($\Delta=0$ 时为临界状态), 即 $\left\{crd_1-\left(\dfrac{2au_*}{v_*}-b\right)d_2\right\}^2-4d_1d_2cr=0$. 解得 $d_2=\dfrac{(a_1+2+\sqrt{a_1+1})cr}{a_1^2}d_1=d_2^c$, 其中 $a_1=\dfrac{2au_*}{v_*}-b>0$.

当 $d_2 \leqslant d_2^c$ 时，$\det \boldsymbol{L}_j \geqslant 0$，$j=0,1,2,\cdots$；当 $d_2 > d_2^c$ 时，$\det \boldsymbol{L}_j = 0$ 有两个根，记为 j_1^2 和 j_2^2，即当 $j^2 \in [j_1^2, j_2^2]$ 时，$\det \boldsymbol{L}_j < 0$.

由以上可得以下结论：

定理 2　对于系统(2)，若 $k > k_0$ 成立，当 $d_2 > d_2^c = \dfrac{(a_1 + 2 + \sqrt{a_1 + 1})cr}{a_1^2} d_1$ 时，系统(2)的正平衡点 $E_*(u_*, v_*)$ 不稳定，因此由扩散项导致 Turing 不稳定性.

参考文献：

[1] Xiao D, Ruan S. Bogdanov-Takens bifurcations in predator-prey systems with constant-rate harvesting[J]. Fields Institute Communications, 1999,21:493-506.

[2] Gupta R P, Chandra P. Bifurcation analysis of modified Leslie-Gower predator-prey model with Michaelis-Menten type prey harvesting[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2013,398(1):278-295.

[3] Sen M, Srinivasu PDN, Banerjee M. Global dynamics of an additional food provided predator-prey system with constant harvest in predators[J]. Applied Mathematics & Computation, 2015,250:193-211.

[4] Lee J, Baek H. Dynamics of a Beddington-DeAngelis type predator-prey system with constant rate harvesting[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2017,2017(1):1-20.

[5] Jana S, Guria S, Das U, et al. Effect of harvesting and infection on predator in a prey-predator system[J]. Nonlinear Dynamics, 2015,81(1/2):1-14.

[6] Baek H. Spatiotemporal dynamics of a predator-prey system with linear harvesting rate[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014,2014(3):1-9.

[7] Wei C, Chen L. Periodic solution and heteroclinic bifurcation in a predator-prey system with Allee effect and impulsive harvesting[J]. Nonlinear Dynamics, 2014,76(2):1109-1117.

[8] Faria T. Hopf bifurcation for a delayed predator-prey model and the effect of diffusion[J] . Birkhäuser Boston, 2001,254(2):433-463.

[9] Tang X, Song Y. Bifurcation analysis and Turing instability in a diffusive predator-prey model with herd behavior and hyperbolic mortality[J]. Chaos Solitons & Fractals the Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science & Nonequilibrium & Complex Phenomena, 2015,81:303-314.

[10] Tang X, Song Y, Zhang T. Turing-Hopf bifurcation analysis of a predator-prey model with herd behavior and cross-diffusion[J]. Nonlinear Dynamics, 2016,86(1):1-17.

[11] Song Y, Zou X. Spatiotemporal dynamics in a diffusive ratio-dependent predator-prey model near a Hopf-Turing bifurcation point[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2014,67(10):1978-1997.

[12] Ghorai S, Poria S. Turing patterns induced by cross-diffusion in a predator-prey system in presence of habitat complexity[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2016,91:421-429.