文章编号: 1004-4353(2018)04-0302-04

一类 Kirchhoff 型方程解的存在性和多重性

钱晓涛[1], 石志高[2]
(1. 福建农林大学 金山学院, 福建 福州 350002; 2. 福建江夏学院, 福建 福州 350108)

摘要: 研究一类全空间上的下方无界 Kirchhoff 型方程,通过引进满足某种假设的位势函数使得所考虑问题的紧性得到恢复. 首先证明带该位势函数的非线性项所对应的泛函是弱连续和连续可导的,然后证明所考虑问题的泛函在某个水平下是紧的,最后通过验证满足山路定理的几何条件证明该问题至少有一个非负非平凡解. 由于所考虑问题具有对称性,因此同时又证得该问题至少存在一个非正非平凡解.
关键词: Kirchhoff 型方程; 下方无界; 存在性; 多重性; 变分方法
中图分类号: O175.2 **文献标识码**: A

Existence and multiplicity of solutions for a class of Kirchhoff type equation

QIAN Xiaotao[1], SHI Zhigao[2]
(1. *Jinshan College of Fujian Agriculture and Forest University*, *Fuzhou* 350002, *China*;
2. *Fujian Jiangxia College*, *Fuzhou* 350108, *China*)

Abstract: On the whole space, we study a class of Kirchhoff type equation which is unbounded from below. To recover the compactness for the considered problem, we introduce a potential function satisfied some assumption. Firstly, the weak continuity and the continuous derivation of the functional corresponding to the nonlinear term are showed. Subsequently, the functional of the problem is proved to satisfy compact condition under some level. Lastly, the existence of non-negative nontrivial solution is established by Mountain Pass Theorem. Meanwhile, the symmetry of the problem implies that there exists another non-positive nontrivial solution.
Keywords: Kirchhoff type equation; unbounded from below; existence; multiplicity; variational method

0 引言

本文考虑如下 Kirchhoff 型方程:

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x)|u|^{p-2}u,\ x\in R^N;\\ u\in D_0^{1,2}(R^N).\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a,b>0$, $N\geqslant 3$, $2<p<2^*$ 且 $2^*=2N/(N-2)$.

Kirchhoff 型问题在物理学和生物学上有着重要的应用,很多学者对此问题进行了研究. 目前,对连续函数 $M: R^+\to R^+$ 满足下方有界的 Kirchhoff 型问题

$$\begin{cases}-M\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u),\ x\in\Omega;\\ u=0,\ x\in\partial\Omega\end{cases}$$

收稿日期: 2018-11-04 **基金项目**: 福建省中青年教师教育科研项目(JAT170893,JT180586)
作者简介: 钱晓涛(1984—),男,博士,讲师,研究方向为非线性分析及其应用.

的研究取得了一些成果[1-7]，但对函数 M 下方无界的情况研究得很少. 特别地，文献[8] 首次考虑了下方无界情况，即当 $f(x)\equiv 1$ 且区域有界时，文献[8] 应用变分方法得到了方程(1) 非平凡解的存在性. 文献[9] 在文献[8] 的基础上，研究了 $1<p<2$ 且区域有界的情况，证得了此时方程(1) 至少存在两个正解的充分条件. 目前为止，下方无界的 Kirchhoff 型问题在无界区域上的相关研究还未见报道. 本文通过引进满足一定条件的位势函数 $f(x)$，使得无界区域上嵌入性质的紧性得到恢复，进而证得问题(1) 非平凡解的存在性和多重性.

显然方程(1) 所对应的泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{b}{4}\left(\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}\int_{R^N}f(x)|u|^p\mathrm{d}x.$$

本文称函数 $u\in D_0^{1,2}(R^N)$ 是问题(1) 的解，是指 $\forall v\in D_0^{1,2}(R^N)$，都有 $\langle I'(u),v\rangle=0$，即

$$a\int_{R^N}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-b\int_{R^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{R^N}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-\int_{R^N}f(x)|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x=0. \tag{2}$$

1　记号与预备知识

本文使用如下记号：$D^{1,2}(R^N)$ 和 $L^r(R^N)$，$2\leqslant r\leqslant 2^*$ 均为标准的 Sobolev 空间，范数分别为 $\|\cdot\|^2=\int_{R^N}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x$ 和 $|\cdot|_r^r=\int_{R^N}|\cdot|^r\mathrm{d}x$；$D_0^{1,2}(R^N)$ 表示 $C_0^\infty(R^N)$ 在 $D^{1,2}(R^N)$ 下关于范数 $\|\cdot\|_D^2=\int_{R^N}|\nabla\cdot|^2\mathrm{d}x$ 的闭包；C 和 C_i 表示正常数. 若无特别指出时，收敛默认为是 $n\to\infty$ 情况下的. 另外，为方便起见，本文将 $\int_{R^N}u(x)\mathrm{d}x$ 简写作 $\int u$. 记 $\varphi(u)=\int f(x)|u|^p\mathrm{d}x$，则有如下的引理 1 和引理 2.

引理 1　当 $f(x)\in L^{2^*/(2^*-p)}(R^N)$，$\varphi(u)$ 在 $D_0^{1,2}(R^N)$ 上是弱连续的.

证明　当 $u\in D_0^{1,2}(R^N)$，由 Hölder 不等式有 $\varphi(u)=\int f(x)|u|^p\mathrm{d}x\leqslant|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}|u|_{2^*}^p<\infty$，所以 $\varphi(u)$ 的定义是合理的.

设 u_n 弱收敛到 u 于 $D_0^{1,2}(R^N)$，则 u_n 强收敛到 u 于 $L_{loc}^2(R^N)$. 如有必要，可取子列(仍记为 $\{u_n\}$，下同)，使得 u_n 几乎处处收敛到 u 于 R^N. 因为 $\{u_n\}$ 在 $L^{2^*}(R^N)$ 有界，所以 $\{|u_n|^p\}$ 在 $L^{2^*/p}(R^N)$ 有界. 又由于 $L^{2^*/p}(R^N)$ 是自反 Banach 空间且具有极限的唯一性，所以有 $|u_n|^p$ 弱收敛到 $|u|^p$ 于 $L^{2^*/p}(R^N)$. 再由条件 $f(x)\in L^{2^*/(2^*-p)}(R^N)$ 可知，$\int f(x)|u_n|^p\mathrm{d}x$ 收敛到 $\int f(x)|u|^p\mathrm{d}x$.

引理 2　当 $f(x)\in L^{2^*/(2^*-p)}(R^N)$，$\forall u,v\in D_0^{1,2}(R^N)$ 时，有 $\langle\varphi'(u),v\rangle=p\int f(x)|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x$，且 $\varphi(u)\in C^1(D_0^{1,2}(R^N),R)$.

证明　先证明 $\varphi(\cdot)$ 的 Gateaux 导数存在. 对于任意的 $u,v\in D_0^{1,2}(R^N)$ 和 $0<|t|<1$，由中值定理可知，存在 $0<\theta<1$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{|f(x)|u(x)+tv(x)|^p-f(x)|u(x)|^p|}{|t|}=\\&|f(x)p|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))v(x)|\leqslant\\&C|f(x)|u(x)|^{p-1}v(x)+f(x)|\theta tv(x)|^{p-1}v(x)|\leqslant C|f(x)|u(x)|^{p-1}v(x)|+\\&C|f(x)|\theta tv(x)|^{p-1}v(x)|\leqslant C|f(x)|u(x)|^{p-1}v(x)|+C|f(x)|v(x)|^p|.\end{aligned}$$

又根据 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}&C\int|f(x)|u(x)|^{p-1}v(x)|\mathrm{d}x+C\int|f(x)|v(x)|^p|\mathrm{d}x\leqslant\\&C\left|(f(x))^{\frac{p-1}{p}}|u(x)|^{p-1}\right|_{\frac{p}{p-1}}\left|(f(x))^{\frac{1}{p}}v(x)\right|_p+C\int|f(x)|v(x)|^p|\mathrm{d}x=\end{aligned}$$

$$C\left[\int |f(x)|u(x)|^p|\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int |f(x)||v(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}+C\int |f(x)|v(x)|^p|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\left[\int |f(x)|u(x)|^p|\right]^{\frac{p-1}{p}}(|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}|v(x)|_{2^*}^p)^{1/p}+C|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}|v(x)|_{2^*}^p<\infty.$$

综上,利用 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=\lim_{t\to 0}\int\frac{f(x)|u(x)+tv(x)|^p-f(x)|u(x)|^p}{|t|}=$$
$$\int\lim_{t\to 0}f(x)p|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))v(x)=p\int f(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x).$$

以下证明 $\varphi'(\cdot)$ 是连续的. 设 u_n 强收敛到 u 于 $D_0^{1,2}(R^N)$,由引理 1 有$\int |f(x)||u_n-u|^p\to 0$. 再利用文献[10]中定理 A.2 的方法,可得$\int |f(x)|||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}}\to 0$. 因此,$\forall v\in D_0^{1,2}(R^N)$,有

$$\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),v\rangle=p\int f(x)(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u)v\leqslant p\int |f(x)(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u)v|\leqslant$$
$$p\left[\int |f(x)|||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int |f(x)||v|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$p\left[\int |f(x)|||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}(|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}|v|_{2^*}^p)^{1/p}\leqslant$$
$$C\left[\int |f(x)|||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\to 0.$$

$\varphi'(\cdot)$ 的连续性得证.

根据引理 1 和引理 2,证明如下的紧性结果:

引理 3 设 $f(x)\in L^{2^*/(2^*-p)}(R^N)$. 当 $c<\frac{a^2}{4b}$, $I(u)$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证明 令$\{u_n\}\subset D_0^{1,2}(R^N)$ 满足 $I(u_n)\to c$, $I'(u_n)\to 0$. 因为

$$1+2c+o(1)\|u_n\|\geqslant 2I(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle=\frac{b}{2}\|u_n\|^4+\left(1-\frac{2}{p}\right)\int f(x)|u_n|^p\geqslant\frac{b}{2}\|u_n\|^4,$$

所以$\{u_n\}$在 $D_0^{1,2}(R^N)$ 中有界. 于是,有 u_n 弱收敛到 u 于 $D_0^{1,2}(R^N)$. 再由引理 1 和 Hölder 不等式,得

$$\left|\int f(x)|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u)\right|\leqslant\left[\int |f(x)|||u_n|^{p-1}|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int |f(x)||u_n-u|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\left[\int |f(x)||u_n|^p\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int |f(x)|||u_n-u|^p|\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant C\left[\int |f(x)|||u_n-u|^p|\right]^{\frac{1}{p}}\to 0. \tag{3}$$

又因为 $o(1)=\langle I'(u_n),u_n-u\rangle=(a-b\|u_n\|^2)\int\nabla u_n\nabla(u_n-u)-\int f(x)|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u)$,所以由式(3)有$(a-b\|u_n\|^2)\int\nabla u_n\nabla(u_n-u)\to 0$.

假设 $a-b\|u_n\|^2\to 0$,则$\|u_n\|^2\to\frac{a}{b}$. 由$\langle I'(u_n),v\rangle=(a-b\|u_n\|^2)\int\nabla u_n\nabla v-\langle\varphi'(u_n),v\rangle$, $a-b\|u_n\|^2\to 0$ 和$\langle I'(u_n),v\rangle\to 0$,有 $\varphi'(u_n)\to 0$. 又由引理 1 和引理 2 可知 $\varphi'(u_n)\to\varphi'(u)$,所以

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=p\int f(x)|u|^{p-2}uv=0,\ \forall v\in D_0^{1,2}(R^N).$$

根据变分法基本引理[11],可知 $u(x)=0$ 几乎处处于 R^N. 再由引理 1 和$\|u_n\|^2\to\frac{a}{b}$ 可得

$$I(u_n)=\frac{a}{2}\|u_n\|^2-\frac{b}{4}\|u_n\|^4-\varphi(u_n)\to\frac{a^2}{4b}-\varphi(u)=\frac{a^2}{4b},$$

这与 $I(u_n)\to c<\frac{a^2}{4b}$ 矛盾. 综上,可知$\int\nabla u_n\nabla(u_n-u)\to 0$. 又因为$\int\nabla u\nabla(u_n-u)\to 0$,所以$\int |\nabla(u_n-u)|^2\to 0$,即 u_n 强收敛到 u 于 $D_0^{1,2}(R^N)$.

2 主要结果及其证明

定理 1 当 $f(x)\in L^{2^*/(2^*-p)}(R^N)$ 且 $\Sigma_f=\{x\in R^N : f(x)>0\}$ 的 Lebesgue 测度为正，则方程(1) 至少存在一个非负非平凡解和一个非正非平凡解.

证明 先证明泛函 $I(u)$满足山路定理的几何结构. 由 Sobolev 嵌入定理和 Hölder 不等式，有

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\int f(x)|u|^p\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}|u|_{2^*}^p\geqslant$$

$$\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-S^{-p/2}|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}\|u\|^p=$$

$$\|u\|^2\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{4}\|u\|^2-S^{-p/2}|f(x)|_{2^*/(2^*-p)}\|u\|^{p-2}\right),$$

其中 S 为 $D_0^{1,2}(R^N)$ 到 $L^{2^*}(R^N)$ 的最佳嵌入常数. 因此存在常数 $\alpha,\rho>0$，使得 $\forall u\in D_0^{1,2}(R^N)$，$\|u\|=\rho$，均有 $I(u)\geqslant\alpha>0$. 另一方面，由于 Σ_f 有正测度，可知存在 $u_0\in D_0^{1,2}(R^N)$ 满足$\int f(x)|u_0|^p>0$，因此

$$I(tu_0)=\frac{a}{2}t^2\|u_0\|^2-\frac{b}{4}t^4\|u_0\|^4-t^p\int f(x)|u_0|^p\to-\infty\ (t\to\infty).$$

所以存在 $e_0\in D_0^{1,2}(R^N)$，使得$\|e_0\|>\rho$ 且 $I(e_0)<0$.

再令 $c_0=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}I(\gamma(t))$，其中 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],D_0^{1,2}(R^N)) : \gamma(0)=0,\gamma(1)=e_0\}$. 由山路定理可知，存在$\{u_n\}\subset D_0^{1,2}(R^N)$ 使得 $I(u_n)\to c_0$，$I'(u_n)\to 0$. 因为 $I(|u_n|)=I(u_n)$，不妨假设 $u_n\geqslant 0$. 另一方面，由于 $\max\limits_{t\in[0,1]}I(te_0)=\max\limits_{t\in[0,1]}\left\{\frac{a}{2}t^2\|e_0\|^2-\frac{b}{4}t^4\|e_0\|^4-t^p\int f(x)|e_0|^p\right\}<\max\limits_{t\in[0,1]}\left\{\frac{a}{2}t^2\|e_0\|^2-\frac{b}{4}t^4\|e_0\|^4\right\}\leqslant\frac{a^2}{4b}$，故 $c_0<\frac{a^2}{4b}$. 再应用引理 3 可知，存在 $u\in D_0^{1,2}(R^N)$ 满足 $u_n\to u$ 且 $I'(u)=0$. 由于 $u_n\geqslant 0$，$u_n\to u$ 几乎处处于 R^N，故 $u\geqslant 0$，即 u 是方程(1) 的一个非负非平凡解.

显然，当 u 满足式(2) 时，$-u$ 也满足式(2)，即又可得到方程(1) 的一个非正非平凡解.

参考文献：

[1] Wu X. Existence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in R^N [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications，2011，12(2)：1278-1287.

[2] Nie J J，Wu X. Existence and multiplicity of non-trivial solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations with radial potential[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications，2012，75(8)：3470-3479.

[3] Lei C Y，Liu G S，Guo L T. Multiple positive solutions for a Kirchhoff type problem with a critical nonlinearity [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications，2016，2016(31)：343-355.

[4] Naimen D. The critical problem of Kirchhoff type elliptic equations in dimension four[J]. Journal of Differential Equations，2014，257(4)：1168-1193.

[5] Sun Y，Liu X. Existence of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical exponent[J]. Journal of Partial Differential Equations，2012，25(2)：187-198.

[6] Li G，Ye H. Existence of positive solutions for nonlinear Kirchhoff type problems in R3 with critical Sobolev exponent[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2015，37(16)：2570-2584.

[7] Fiscella A，Valdinoci E. A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications，2014，94(1)：156-170.

[8] Yin G，Liu J. Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a nonlocal problem[J]. Boundary Value Problems，2015，2015(26)：1-7.

[9] Lei C Y，Liao J F，Suo H M. Multiple positive solutions for nonlocal problems involving a sign-changing potential [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2017，2017(9)：1-8.

[10] Willem M. Minimax Theorems[M]. Boston：Birkhäuser，1996：133-134.

[11] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 北京：科学出版社，2003：8-9.