

文章编号: 1004-4353(2018)03-0217-04

一类具有非线性密度制约的捕食系统的定性分析

石志高

(福建江夏学院 数理教研部, 福建 福州 350108)

摘要: 考虑了一类具有非线性密度制约的捕食系统 $\dot{x} = xg(x) - y\varphi(x)$, $\dot{y} = y(-d + e\varphi(x))$, 其中 $g(x) = a - b\sqrt{x} - cx$, $\varphi(x) = h\sqrt{x}$. 通过分析该系统的平衡点性态, 得到该系统不存在极限环和存在唯一极限环的充分条件.

关键词: 非线性密度制约; 食饵-捕食者系统; 极限环

中图分类号: O175.12

文献标识码: A

Qualitative analysis of a kind of predator-prey system with nonlinear density dependence

SHI Zhigao

(Teaching and Research Department of Mathematics and Physics,
Fujian Jiangxia University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: In this paper, a kind of predator-prey system with nonlinear density dependence is considered $\dot{x} = xg(x) - y\varphi(x)$, $\dot{y} = y(-d + e\varphi(x))$, where $g(x) = a - b\sqrt{x} - cx$, $\varphi(x) = h\sqrt{x}$. By analysing the quality of the equilibrium point, we obtains the sufficient conditions of nonexistence, existence, and uniqueness of the limit cycle for this system.

Keywords: nonlinear density dependence; predator-prey system; limit cycle

0 引言

具功能性反应的食饵-捕食者系统 $\dot{x} = xg(x) - y\varphi(x)$ 和 $\dot{y} = y(-d + e\varphi(x))$, 是数学生态学中的一个重要课题, 特别是其极限环的存在性问题. 在食饵种群中加入线性密度制约, 在很多情况下难以客观地反映事实, 因此有必要在食饵种群中加入非线性密度制约. 近年来, 一些学者对加入非线性密度制约的捕食系统进行了研究, 并取得了一些成果^[1-6]. 文献[5] 讨论了系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - b\sqrt{x}) - y\sqrt{x}, \\ \dot{y} = y(-d + e\sqrt{x}) \end{cases}$$

在正平衡点外围存在极限环的相关条件. 文献[6] 研究了比文献[5] 更具一般性的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx^m) - ycx^\theta, \\ \dot{y} = y(-d + ecx^\theta), \end{cases}$$

得到了该系统在正平衡点外围极限环的存在性和唯一性条件,并指出当 $m \neq \theta$ 时,其所得结论与文献 [5] 的所得结论不同.受文献[5-6] 的启发,本文考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - b\sqrt{x} - cx) - yh\sqrt{x}, \\ \dot{y} = y(-d + eh\sqrt{x}), \end{cases} \tag{1}$$

其中 a, b, c, d, e, h 均为正常数.依据系统的生态意义,本文仅在 $\bar{G} = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ 上对系统 (1) 进行讨论.

1 系统的平衡点性态

对系统(1) 作变换 $x = \bar{x}^2, y = \frac{a}{h}\bar{y}, dt = \frac{2}{a}d\tau$, 仍用 x, y, t 表示 \bar{x}, \bar{y}, τ , 则系统(1) 变为

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - b_0x - c_0x^2) - y, \\ \dot{y} = d_0y(-1 + e_0x), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $b_0 = \frac{b}{a}, c_0 = \frac{c}{a}, d_0 = \frac{2d}{a}, e_0 = \frac{eh}{d}$.

引理 1 1) 当 $e_0 \leqslant \frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2}$ 时,系统(2) 有平衡点 $O(0, 0)$ 和 $A(k, 0)$.

2) 当 $e_0 > \frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2}$ 时,系统(2) 有平衡点 $O(0, 0), A(k, 0)$ 和 $B(x_0, y_0)$.

证明 记 $\varphi(x) = 1 - b_0x - c_0x^2$, 由 $\varphi(0) = 1 > 0, \varphi'(x) = -b_0 - 2c_0x < 0$, 可知 $\varphi(x)$ 有唯一的正零点 $k = \frac{2}{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}$. 令 $x_0 = \frac{1}{e_0}, y_0 = x_0(1 - b_0x_0 - c_0x_0^2)$, 则当 $0 < x_0 < k$ 时,即 $e_0 > \frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2}$, 系统(2) 存在唯一的正平衡点.

引理 2 1) 平衡点 $O(0, 0)$ 是鞍点.

2) 当 $e_0 < \frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2}$ 时,平衡点 $A(k, 0)$ 是稳定的结点或焦点.

3) 当 $e_0 = \frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2}$ 时,平衡点 $A(k, 0)$ 是稳定的鞍结点.

4) 当 $\frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2} < e_0 < \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时,平衡点 $A(k, 0)$ 是鞍点,正平衡点 $B(x_0, y_0)$ 是稳定的结点或焦点.

5) 当 $e_0 > \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时,平衡点 $A(k, 0)$ 是鞍点,正平衡点 $B(x_0, y_0)$ 是不稳定的结点或焦点.

6) 当 $e_0 = \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时,平衡点 $A(k, 0)$ 是鞍点,正平衡点 $B(x_0, y_0)$ 是稳定的细焦点.

证明 系统(2) 的线性化系统的变量矩阵为

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2b_0x - 3c_0x^2 & -1 \\ d_0e_0y & d_0(-1 + e_0x) \end{bmatrix}.$$

记 $\phi(x) = 1 - 2b_0x - 3c_0x^2$, 由 $\phi(0) = 1 > 0, \phi'(x) = -2b_0 - 6c_0x < 0$, 可知 $\phi(x)$ 有唯一的正零点 $r = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0}$. 因 $P = -\text{tr}J(x_0, y_0) = -(1 - 2b_0x_0 - 3c_0x_0^2)$, 因此当 $k < r, x_0 < k < r$ 时,有

$\frac{1}{e_0} < \frac{2}{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0} < \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0}$, 即 $e_0 > \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, $P < 0$; 当 $r < x_0 < k$ 时,有

$\frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2} < e_0 < \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$, 即 $P < 0$; 当 $r = x_0 < k$ 时, 有 $e_0 = \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$, 即 $P = 0$.

由此易证引理 2 中的 1)–5).

下证引理 2 中的 6). 当 $e_0 = \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, 作变换 $x = u + x_0$, $y = v + y_0$, 则系统(2) 变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -v - (b_0 + 3c_0x_0)u^2 - c_0u^3, \\ \frac{dv}{dt} = d_0e_0y_0u + d_0e_0uv. \end{cases} \quad (3)$$

再作变换 $u = x$, $v = \sqrt{d_0e_0y_0}y$, 则系统(3) 变为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y + F_{20}x^2 + F_{30}x^3, \\ \frac{dy}{dt} = \omega x + G_{11}xy, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\omega = \sqrt{d_0e_0y_0}$, $F_{20} = -(b_0 + 3c_0x_0)$, $F_{30} = -c_0$, $G_{11} = d_0e_0$, 其他 F_{ij}, G_{ij} 均为 0. 代入文献[7] 中的一阶细焦点量公式:

$$P_4 = \frac{1}{8} \left\{ 3(F_{30} + G_{03}) + F_{12} + G_{21} + \frac{1}{\omega} [F_{11}(F_{20} + F_{02}) - G_{11}(G_{20} + G_{02}) + 2(F_{02}G_{02} - F_{20}G_{20})] \right\},$$

计算得 $P_4 = -\frac{3}{8}c_0 < 0$, 故 $B(x_0, y_0)$ 为稳定的细焦点.

3 系统的极限环

因 $y=0$ 是系统(2) 的解, $x=k=\frac{2}{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}$ 是无切线段, 故系统(2) 的闭轨线只能存在于区域

$D = \{(x, y) \mid 0 < x < k, y > 0\}$ 内.

定理 1 当 $\frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2} < e_0 < 2b_0$ 时, $B(x_0, y_0)$ 为稳定的结点或焦点, 系统(2) 在 D 内不存在任何闭轨线.

证明 取 Dulac 函数 $B(x, y) = x^m y^n$, 其中 $m = \frac{2b_0 - e_0}{e_0 - b_0}$, $n = \frac{b_0}{d_0(e_0 - b_0)} - 1$, 则

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = B(x, y) \left(\frac{2e_0 - b_0}{e_0 - b_0} c_0 x^2 - \frac{2b_0 - e_0}{e_0 - b_0} \cdot \frac{y}{x} \right).$$

当 $\frac{\sqrt{b_0^2 + 4c_0} + b_0}{2} < e_0 < 2b_0$ 时, $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$, 此时系统(2) 在 D 内不存在任何闭轨线.

定理 2 当 $e_0 > \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, 系统(2) 在点 $B(x_0, y_0)$ 外围存在唯一稳定极限环.

证明 由引理 2 可知, 当 $e_0 > \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, $B(x_0, y_0)$ 是不稳定的结点或焦点. 当 $e_0 = \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, $B(x_0, y_0)$ 是稳定的细焦点. 由 Hopf 分支理论可知, 当 $e_0 > \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, 系统(2) 在 $B(x_0, y_0)$ 外围至少存在一个稳定的极限环.

下证唯一性. 作变换 $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y} + y_0$, 则系统(2) 变为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = (\bar{x} + x_0) - b_0(\bar{x} + x_0)^2 - c_0(\bar{x} + x_0)^3 - (\bar{y} + y_0), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = d_0e_0\bar{x}(\bar{y} + y_0). \end{cases} \quad (5)$$

再作变换 $\bar{x} = u$, $\bar{y} = y_0(e^v - 1)$, 则系统(5) 变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\varphi(v) - F(u), \\ \frac{dv}{dt} = g(u), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\varphi(v) = y_0(e^v - 1)$, $F(u) = c_0u^3 + (3c_0x_0 + b_0)u^2 + (3c_0x_0^2 + 2b_0x_0 - 1)u$, $g(u) = \frac{d_0e_0u}{u + x_0}$.

不难推出函数 $\varphi(v), F(u), g(u)$ 满足如下性质:

- 1) $ug(u) = \frac{d_0e_0u^2}{u + x_0} > 0$, $G(u) = d_0e_0[u - \ln(u + x_0)]$, $G(+\infty) = G(x_0 + 0) = \infty$.
- 2) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(v) = y_0e^v > 0$, $\varphi(+\infty) = +\infty$, $\varphi(-\infty) = -y_0 < 0$.
- 3) $F(0) = 0$, $f(u) = F'(u) = 3c_0u^2 + (6c_0x_0 + 2b_0)u + 3c_0x_0^2 + 2b_0x_0 - 1$.

进一步, $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' = \frac{1}{d_0e_0u^2} [6c_0u^3 + (9c_0x_0 + 2b_0)u^2 + x_0(1 - 2b_0x_0 - 3c_0x_0^2)]$, 由引理 2 的证明过程可

知当 $e_0 > \sqrt{b_0^2 + 3c_0} + b_0$ 时, $P = -(1 - 2b_0x_0 - 3c_0x_0^2) < 0$, 即 $1 - 2b_0x_0 - 3c_0x_0^2 > 0$, 故 $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' > 0$.

由张芷芬唯一性定理^[8] 可知, 系统(2) 在点 B 外围存在唯一稳定的极限环.

参考文献:

[1] 张琳,郭三刚. 密度制约的 Holling III 型食饵与捕食者动力系统的定性分析[J]. 生物数学学报, 2016, 31(3): 358-368.

[2] 李晓艳,霍锦霞,李曼生,等. 一类具功能反应的非线性捕食系统的定性分析[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2014(2): 295-296.

[3] 王战伟,毛北行. 一类具有密度制约和 Beddington-DeAngelis 感染函数的 HIV-I 模型的全局性态分析[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2016, 50(3): 339-342.

[4] 张睿,苗亮英. 一类具有非线性密度制约的食饵-捕食者扩散模型的稳定性[J]. 生物数学学报, 2014, 29(3): 566-570.

[5] 程福荣,蔡淑云. 一类具功能反应的食饵-捕食者两种群模型的定性分析[J]. 生物数学学报, 2002, 17(4): 406-410.

[6] 吴承强. 一类具功能反应的食饵-捕食者系统定性分析[J]. 系统科学与数学, 2005, 25(6): 688-692.

[7] Göbber F, Willanowski K D. Ljapunov approach to multiple Hopf bifurcation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1979, 71: 333-350.

[8] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[9] 李慧茹,肖海滨. 具有一般密度制约的食饵-捕食者扩散系统的行波解[J]. 宁波大学学报(理工版), 2017, 30(6): 78-84.