

文章编号: 1004-4353(2018)03-0213-04

# 食饵具有常数投放率的 Holling-IV 类捕食系统的定性分析

王清娟

( 阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015 )

**摘要:** 通过对一类食饵种群具有常数投放率的 Holling-IV 类捕食系统的等倾线性态进行分析, 给出了该系统平衡点存在的条件, 并分析了平衡点的稳定性. 运用 Poincare-Bendixson 环域定理和极限环唯一性定理得到了系统正平衡点周围存在唯一极限环的充分条件.

**关键词:** Holling-IV 类功能反应函数; 投放率; 平衡点; 极限环

**中图分类号:** O175      **文献标识码:** A

## Qualitative analysis of predator-prey system with constant rate stocking for prey under Holling-IV functional response

WANG Qingjuan

( *Department of Basic Teaching and Research, Yango University, Fuzhou 350015, China* )

**Abstract:** The conditions for the existence of the equilibrium point are discussed by using isoclines shape for a class of predator-prey system with constant rate stocking for prey under Holling-IV functional response. The stability of the equilibrium point are analysed. The sufficient conditions for the uniqueness of the limit cycle around the positive equilibrium point are obtained by using the Poincare-Bendixson theorem and the uniqueness theorem of the limit cycle.

**Keywords:** Holling-IV functional response; constant rate stocking; equilibrium point; limit cycle

1968 年, Andrews<sup>[1]</sup> 给出了 Holling-IV 类功能反应函数  $\varphi(x) = \frac{mx}{a + bx + x^2}$ . 1980 年, Sokol 等<sup>[2]</sup>

给出了更加符合实际情况的简化的 Holling-IV 类功能反应函数  $\varphi(x) = \frac{mx}{a + x^2}$ . 随后, 许多学者对食饵种群具有常数投放率、常数收获率、线性控制项的 Holling-IV 类捕食系统进行研究, 并得到了一些相关的定性理论<sup>[3-7]</sup>. 文献[5]研究了两种群分别有常投放率和常收获率的 Holling-IV 类捕食系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) - \frac{cxy}{\beta + x^2} - h, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{ex}{\beta + x^2}\right) - k. \end{cases}$$

在文献[5] 基础上, 本文考虑食饵种群具有一般形式  $g(x)$  的密度制约项且具有常数投放率的 Holling-IV 类捕食系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left[ g(x) - \frac{y}{\beta + x^2} \right] + h, \\ \frac{dy}{dt} = y \left( -a - by + \frac{cx}{\beta + x^2} \right), \end{cases} \quad (1)$$

其中函数  $g(x)$  满足: (I) 存在  $k > 0$ , 使得  $g(k) = -\frac{h}{k}$ , 且当  $0 < x \leq k$  时,  $g'(x) < 0$ . 基于生态意义, 本文仅在  $G = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  中考虑系统(1) 的定性行为.

易得, 系统(1) 平衡点的线性近似系统的系数矩阵为

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} g(x) - \frac{y}{\beta + x^2} + x \left[ g'(x) + \frac{2xy}{(\beta + x^2)^2} \right] & -\frac{x}{\beta + x^2} \\ \frac{cy(\beta - x^2)}{(\beta + x^2)^2} & -a - 2by + \frac{cx}{\beta + x^2} \end{bmatrix}.$$

## 1 平衡点的性态分析

系统(1) 的平衡点有以下 2 种情况:

$$\begin{cases} xg(x) + h = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} xg(x) + h - \frac{xy}{\beta + x^2} = 0, \\ -a - by + \frac{cx}{\beta + x^2} = 0. \end{cases}$$

显然, 当系统(1) 满足(I) 时, 系统有平凡平衡点  $A(k, 0)$ .

系统(1) 的水平等倾线为  $y=0$  或  $y = \frac{1}{b} \left( -a + \frac{cx}{\beta + x^2} \right)$ , 且曲线  $y = \frac{1}{b} \left( -a + \frac{cx}{\beta + x^2} \right)$  具有以下性质: 当  $x=0$  时,  $y = -\frac{a}{b}$ ; 当  $y=0$  时, 该曲线与  $x$  正半轴有 2 个交点, 其横坐标为  $x_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4\beta a^2}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4\beta a^2}}{2a}$ , 且当  $x_1 < x < x_2$  时,  $y > 0$ .

系统(1) 的垂直等倾线为  $y = \frac{[xg(x) + h](\beta + x^2)}{x}$ , 且曲线  $y = \frac{[xg(x) + h](\beta + x^2)}{x}$  具有以下性质:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ ; 当  $y=0$  时,  $x=k$ .

令  $M(x) = \frac{[xg(x) + h](\beta + x^2)}{x} - \frac{1}{b} \left( -a + \frac{cx}{\beta + x^2} \right)$ , 则当  $0 < x \leq k$  时, 有

$$\begin{aligned} M'(x) &= (\beta + x^2)g'(x) + 2xg(x) - \frac{h\beta}{x^2} - \frac{c(\beta - x^2)}{b(\beta + x^2)^2} + h \leq \\ &(\beta + x^2)g'(x) + 2kg(0) + \frac{c}{b \left( x^2 + \frac{\beta^2}{x^2} + 2\beta \right)} + h \leq (\beta + x^2)g'(x) + 2kg(0) + \frac{c}{4\beta b} + h. \end{aligned}$$

若  $(\beta + x^2)g'(x) + 2kg(0) + \frac{c}{4\beta b} + h < 0$ , 则  $M'(x) < 0$ , 即  $M(x)$  单调递减. 又因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} M(x) = +\infty$ ,

且当  $x_1 < k < x_2$  时, 有  $-ak^2 + ck - a\beta > 0$ , 所以  $M(k) = -\frac{1}{b(\beta + k^2)}(-ak^2 + ck - a\beta) < 0$ , 故  $M(x)$

存在唯一  $x_* \in (0, k)$ , 使得  $M(x_*) = 0$ , 即此时系统存在唯一正平衡点  $B(x_*, y_*)$ ; 而当  $k < x_1$  或  $k > x_2$  时, 有  $-ak^2 + ck - a\beta < 0$ , 所以  $M(k) > 0$ . 结合  $M'(x) < 0$ , 得当  $0 < x \leq k$  时, 恒有  $M(x) > 0$ , 即此时系统在  $(0, k)$  内不存在正平衡点.

由以上讨论可得如下定理 1:

**定理 1** 若系统(1) 满足(I)、(II)  $x_1 < k < x_2$  及(III)  $(\beta + x^2)g'(x) + 2kg(0) + \frac{c}{4\beta b} + h < 0$  时,

则该系统存在唯一正平衡点  $B(x_*, y_*)$ , 其中  $x_* \in (0, k)$ .

**定理 2** 若系统(1) 满足(I)–(III) 时, 则有:

1) 平衡点  $A(k, 0)$  为系统(1) 的鞍点.

2) 若(IV)  $2(a + by_*) \left[ g(x_*) + \frac{h}{x_*} \right] + cg'(x_*) < \min \left\{ \frac{hc}{x_*^2} + \frac{(\beta - x_*^2)(a + by_*)^3}{bcx_*^3}, \frac{hc}{x_*^2} + \frac{bcy_*}{x_*} \right\}$  成立时,  $B(x_*, y_*)$  为系统(1) 的稳定的结点或焦点.

3) 若(V)  $\frac{hc}{x_*^2} + \frac{bcy_*}{x_*} < 2(a + by_*) \left[ g(x_*) + \frac{h}{x_*} \right] + cg'(x_*) < \frac{hc}{x_*^2} + \frac{(\beta - x_*^2)(a + by_*)^3}{bcx_*^3}$  成立时,  $B(x_*, y_*)$  为系统(1) 的不稳定的结点或焦点.

**证明** 1) 当系统(1) 满足(I) 和(II) 时, 有  $g(k) = -\frac{h}{k} < 0$ ,  $g'(k) < 0$ ,  $-ak^2 + ck - a\beta > 0$ , 故

$\det J(k, 0) = \frac{1}{\beta + k^2} [g(k) + kg'(k)](-ak^2 + ck - a\beta) < 0$ , 此时平衡点  $A(k, 0)$  为系统(1) 的鞍点.

2) 若系统(1) 满足(I)–(III) 时,

$$\begin{aligned} \det J(x_*, y_*) &= \left\{ -\frac{h}{x_*} + x_* \left[ g'(x_*) + \frac{2x_* y_*}{(\beta + x_*^2)^2} \right] \right\} (-by_*) + \frac{cx_* y_* (\beta - x_*^2)}{(\beta + x_*^2)^3} = \\ &= bx_* y_* \left[ \frac{h}{x_*^2} - g'(x_*) - \frac{2x_* y_*}{(\beta + x_*^2)^2} + \frac{c(\beta - x_*^2)}{b(\beta + x_*^2)^3} \right] = \\ &= bx_* y_* \left[ \frac{h}{x_*^2} - g'(x_*) - \frac{2(a + by_*) [g(x_*) + h/x_*]}{c} + \frac{(\beta - x_*^2)(a + by_*)^3}{bc^2 x_*^3} \right], \\ \text{Tr} J(x_*, y_*) &= -\frac{h}{x_*} + x_* \left[ g'(x_*) + \frac{2x_* y_*}{(\beta + x_*^2)^2} \right] - by_* = \\ &= x_* \left[ -\frac{h}{x_*^2} + g'(x_*) + \frac{2(a + by_*) [g(x_*) + h/x_*]}{c} - \frac{by_*}{x_*} \right]. \end{aligned}$$

当(IV) 成立时,  $\det J(x_*, y_*) > 0$ ,  $\text{Tr} J(x_*, y_*) < 0$ , 此时  $B(x_*, y_*)$  为系统(1) 的稳定的结点或焦点.

3) 若系统(1) 满足(I)–(III) 及(V) 时,  $\det J(x_*, y_*) > 0$ ,  $\text{Tr} J(x_*, y_*) > 0$ , 此时  $B(x_*, y_*)$  为系统(1) 的不稳定的结点或焦点.

## 2 极限环的存在性与唯一性

**定理 3** 若系统(1) 满足(I)–(III) 及(V) 时, 则系统在  $\Omega$  内围绕正平衡点  $B(x_*, y_*)$  至少存在一个稳定的极限环.

**证明** 由正平衡点的存在性知  $c^2 - 4\beta a^2 > 0$ , 所以  $-a + \frac{c}{2\sqrt{\beta}} > 0$ . 现做直线  $L_1: x = 0$ , 则  $\left. \frac{dL_1}{dt} \right|_{(1)} =$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=0} &= h > 0, \text{ 系统(1) 从左到右穿过 } L_1 \text{ 的轨线}; L_2: y = \frac{1}{b} \left( -a + \frac{c}{2\sqrt{\beta}} \right), \text{ 则 } \left. \frac{dL_2}{dt} \right|_{(1)} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=\frac{1}{b}(-a+\frac{c}{2\sqrt{\beta}})} = \\ &= \frac{1}{b} \left( -a + \frac{c}{2\sqrt{\beta}} \right) \left[ -a - b \cdot \frac{1}{b} \left( -a + \frac{c}{2\sqrt{\beta}} \right) + \frac{cx}{\beta + x^2} \right] \leq \frac{1}{b} \left( -a + \frac{c}{2\sqrt{\beta}} \right) \left( -a + a - \frac{c}{2\sqrt{\beta}} + \frac{c}{2\sqrt{\beta}} \right) = 0, \text{ 系} \\ &\text{统(1) 从上到下穿过 } L_2 \text{ 的轨线}; L_3: x = k, \text{ 则 } \left. \frac{dL_3}{dt} \right|_{(1)} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=k} = k \left[ g(k) - \frac{y}{\beta + k^2} \right] + h = -\frac{ky}{\beta + k^2} < 0, \end{aligned}$$

系统(1) 从右到左穿过  $L_3$  的轨线;  $L_4: y = 0$  是系统(1) 的轨线, 所以系统(1) 的轨线进入由  $L_1$ – $L_4$  所围成的区域内. 又因为在定理 3 的条件下,  $B(x_*, y_*)$  为系统的不稳定平衡点, 由 Bendixson 环域定理知, 在  $B(x_*, y_*)$  外围至少存在一个稳定的极限环. 证毕.

**定理 4** 若系统(1) 满足(I)–(III)、(V) 及  $N'(x)M(x) - N(x)M'(x) \leq 0$  时, 则系统在  $\Omega$  内围绕正平衡点  $B(x_*, y_*)$  存在唯一稳定的极限环.

**证明** 对系统(1)作变换  $dt = (\beta + x^2)d\tau$ , 变换后仍用  $t$  表示  $\tau$ , 则

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [xg(x) + h](\beta + x^2) - xy, \\ \frac{dy}{dt} = y[(-a - by)(\beta + x^2) + cx]. \end{cases} \quad (2)$$

对系统(2)作变换  $\bar{x} = x - x_*$ ,  $\bar{y} = y - y_*$ , 则

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = [(\bar{x} + x_*)g(\bar{x} + x_*) + h][\beta + (\bar{x} + x_*)^2] - (\bar{x} + x_*)(\bar{y} + y_*), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \{c(\bar{x} + x_*) - a[\beta + (\bar{x} + x_*)^2]\}(\bar{y} + y_*) - b[\beta + (\bar{x} + x_*)^2](\bar{y} + y_*)^2. \end{cases} \quad (3)$$

对系统(3)作变换  $\bar{x} + x_* = x_*e^u$ ,  $\bar{y} + y_* = y_*e^v$ , 则

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left[ g(x_*e^u) + \frac{h}{x_*e^u} \right] [\beta + (x_*e^u)^2] - y_*e^v, \\ \frac{dv}{dt} = cx_*e^u - a[\beta + (x_*e^u)^2] - b[\beta + (x_*e^u)^2](y_*e^v). \end{cases} \quad (4)$$

对系统(4)作变换  $w = u$ ,  $z = v - b\left[\beta u + \frac{1}{2}(x_*e^u)^2\right]$ ,  $d\tau = e^{b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]}dt$ , 则

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = -F(w) - \Phi(z), \\ \frac{dz}{d\tau} = g(w), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $F(w) = y_* - \left[ g(x_*e^w) + \frac{h}{x_*e^w} \right] [\beta + (x_*e^w)^2] e^{-b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]}$ ,  $\Phi(z) = y_*(e^z - 1)$ ,  $g(w) = \left\{ cx_*e^w - a[\beta + (x_*e^w)^2] - b[\beta + (x_*e^w)^2]^2 \left[ g(x_*e^w) + \frac{h}{x_*e^w} \right] \right\} e^{-b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]}$ .

下面验证系统(5)满足极限环唯一性定理<sup>[8]</sup>的条件:

1) 因为  $M(x) = \frac{[xg(x) + h](\beta + x^2)}{x} - \frac{1}{b} \left( -a + \frac{cx}{\beta + x^2} \right)$ , 所以  $wg(w) = -b[\beta + (x_*e^w)^2] \cdot e^{-b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]} wM(x_*e^w)$ . 又由  $x_*e^w = x$ , 可得  $wM(x_*e^w) = (\ln x - \ln x_*)M(x)$ . 由前面分析知,  $(x - x_*)M(x) < 0$ , 即  $wM(x_*e^w) < 0$ , 故  $wg(w) > 0$ . 所以有  $G(w) = \int_0^w g(w)dw > 0$ , 其中  $-\infty < w < \ln \frac{k}{x_*}$ .

2)  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(z) = y_*e^z > 0$ , 即  $\Phi(z)$  单调递增,  $\Phi(+\infty) = +\infty$ .

3)  $f(w) = F'(w) = e^{-b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]} \left\{ b[\beta + (x_*e^w)^2]^2 \left[ g(x_*e^w) + \frac{h}{x_*e^w} \right] - 2(x_*e^w)^2 [g(x_*e^w) + \frac{h}{x_*e^w}] - [\beta + (x_*e^w)^2] [x_*e^w g'(x_*e^w) - \frac{h}{x_*e^w}] \right\}$ . 令

$$N(x) = (\beta + x^2) \left[ g(x) + \frac{h}{x} \right] - \frac{2x^2 [g(x) + \frac{h}{x}]}{b(\beta + x^2)} - \frac{1}{b} \left[ xg'(x) - \frac{h}{x} \right],$$

则  $f(w) = be^{-b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]} [\beta + (x_*e^w)^2] N(x_*e^w)$ ,  $g(w) = -be^{-b[\beta w + \frac{1}{2}(x_*e^w)^2]} [\beta + (x_*e^w)^2] M(x_*e^w)$ ,

所以  $\left( \frac{f(w)}{g(w)} \right)' = - \left( \frac{N(x_*e^w)}{M(x_*e^w)} \right)' \cdot \frac{x_*e^w}{x} = - \frac{d}{dx} \left( \frac{N(x)}{M(x)} \right) \cdot \frac{dx}{dw} = - \frac{x_*e^w [N'(x)M(x) - N(x)M'(x)]}{M^2(x)}$ . 当

$N'(x)M(x) - N(x)M'(x) \leq 0$  时,  $\left( \frac{f(w)}{g(w)} \right)' \geq 0$ , 其中  $-\infty < w < \ln \frac{k}{x_*}$ .

鲁棒性. 由于本文方案中选用的晶格模型具有周期性边界条件的特征, 因此可以将本文方案拓展到  $n \times n$  多维方阵系统中. 本文研究所得结果对研究多体系统间的强相互作用也具有一定的指导意义, 即在多体系统中能够实现其他量子态的制备和转换.

## 参考文献:

- [1] Imamoglu A, Schmidt H, Woods G, et al. Strongly interacting photons in a nonlinear cavity[J]. Phys Rev Lett, 1997,79(8):1467-1470.
- [2] Regal C A, Greiner M, Jin D S. Observation of resonance condensation of Fermionic atom pairs[J]. Phys Rev Lett, 2004,92(4):040403.
- [3] Laughlin R B. Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations[J]. Phys Rev Lett, 1983,50(18):1395-1398.
- [4] Raizen M, Salomon C, Niu Q. New light on quantum transport[J]. Phys Today, 1997,50(7):30-34.
- [5] Sorensen A S, Demler E, Lukin M D. Fractional quantum Hall states of atoms in optical lattices[J]. Phys Rev Lett, 2005,94(8):086803.
- [6] Umucalilar R O, Carusotto I. Fractional quantum Hall states of photons in an array of dissipative coupled cavities[J]. Phys Rev Lett, 2012,108(20):206809.
- [7] 朱国毅,王瑞蕊,张广铭. Majorana 费米子与拓扑量子计算[J]. 物理, 2017,46(3):154-167.
- [8] 徐雷,张蓓,孔维新,等. Kagome 晶格中的拓扑平带和量子霍尔效应[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2018,35(2):127-130.
- [9] Dentsch I H, Jessen P S. Quantum-state control in optical lattices[J]. Phys Rev A, 1998,57(3):1972-2007.
- [10] Yi X X, Huang X L, Wu C F, et al. Systems into decoherence-free subspaces by Lyapunov control[J]. Phys Rev A, 2009,80(5):052316.
- [11] Hafezi M, Sorensen A S, Demler E, et al. Fractional quantum Hall effect in optical lattices[J]. Phys Rev A, 2007,76(2):023613.

(上接第 216 页)

综上,得系统(1)在  $\Omega$  内围绕正平衡点  $B(x_*, y_*)$  存在唯一稳定的极限环. 证毕.

本文所得的定理 3 和定理 4 表明,两种群均不会灭绝,它们的数量在正平衡点  $B(x_*, y_*)$  邻近呈现为稳定的周期振荡.

## 参考文献:

- [1] Andrews J F. A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates[J]. Biotechnol Bioeng, 1968,10:707-723.
- [2] Sokol W, Howell J A. Kinetics of pheol oxidation by washed cells[J]. Biotechnol Bioeng, 1980,23(1):2039-2049.
- [3] 石志高,吴承强. 一类食饵种群具有常数收获率的 Holling-IV 类功能性反应的捕食系统的定性分析[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2008,36(3):327-330.
- [4] 张敬,芦雪娟,何延治. 一类具有 Holling-IV 型功能性反应捕食模型的定性分析[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2013,39(2):93-96.
- [5] 张敬,高文杰,周莉. 两种群分别有常投放率和常收获率的 Holling-IV 类捕食系统[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011,49(1):11-15.
- [6] 石志高. 两种群具有线性控制项的 Holling-IV 类食饵-捕食系统的鞍结分岔下的轨线结构[J]. 闽江学院学报, 2016(2):12-18.
- [7] Liu Xinxin, Huang Qingdao. The dynamics of a harvested predator-prey system with Holling type IV functional response[J]. Biosystems, 2018,169/170:26-39.
- [8] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985:208-212.