文章编号：1004-4353(2018)03-0208-05

具毒素影响的两种群离散竞争模型的绝灭性

张杰华
（阳光学院 基础教研部，福建 福州 350015）

摘要：研究了双方具有毒素作用和非线性相互抑制项的非自治两种群浮游生物竞争模型. 通过构造适当的绝灭函数，得到了保证系统中某个种群绝灭而另外一个种群全局吸引的充分性条件. 本文所得结果补充了文献[2]和[11]的研究结果.

关键词：离散；竞争；毒素；绝灭；稳定性
中图分类号：O175.14　　**文献标识码**：A

Extinction of a two species discrete competitive system with the effects of toxic substances

ZHANG Jiehua
(*Department of Basic Teaching and Research*, *Yango University*, *Fuzhou* 350015, *China*)

Abstract: A two species discrete non-autonomous competitive phytoplankton system with nonlinear inter-inhibition terms and toxin producing species is studied in this paper. By constructing some suitable Lyapunov type extinction functions, sufficient conditions which guarantee the extinction of a species and the global attractivity of the other one are obtained. Our results supplement the conclusion in the literature [2] and [11].

Keywords: discrete; competitive; toxicology; extinction; stability

毒素是影响生态系统动力学行为的重要因素之一. 近年来，学者针对毒素对种群的影响进行了较多研究，也取得了较多的成果[1-9]. Yue Qin[2] 提出了如下离散竞争模型：

$$\begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{r_1(n)-a_1(n)x_1(n)-\dfrac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)}-b_1(n)x_1(n)x_2(n)\right\}, \\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{r_2(n)-a_2(n)x_2(n)-\dfrac{c_1(n)x_1(n)}{1+x_1(n)}\right\}, \end{cases} \tag{1}$$

得到了保证系统中一个种群绝灭而另一个种群全局吸引的充分条件. 其中 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别表示两竞争种群在第 n 代的种群密度，$r_i(n)$ $(i=1,2)$ 表示内禀增长率，$a_i(n)$ $(i=1,2)$ 为种内竞争系数，$c_i(n)$ $(i=1,2)$ 为种间竞争系数，$b_i(n)$ $(i=1,2)$ 为第 2 个种群释放的毒素对第 1 个种群的影响. 考虑到自然界生态系统中两种群往往都具有毒素，彼此影响，因此本文提出如下双方均具有毒素作用的两种群竞争模型：

$$\begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)\exp\left\{r_1(n)-a_1(n)x_1(n)-\dfrac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)}-b_1(n)x_1(n)x_2(n)\right\}, \\ x_2(n+1)=x_2(n)\exp\left\{r_2(n)-a_2(n)x_2(n)-\dfrac{c_1(n)x_1(n)}{1+x_1(n)}-b_2(n)x_1(n)x_2(n)\right\}, \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期：2018-06-23　　**基金项目**：福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT170771)
作者简介：张杰华(1983—)，女，副教授，研究方向为生物数学.

并对其绝灭性和稳定性进行了探讨. 其中所有变量与系统(1) 中表示的意义相同，$r_i(n)$，$a_i(n)$，$c_i(n)$，$b_i(n)$ $(i=1,2)$ 均为正的有界序列.

基于生物种群意义，本文设系统(2) 满足初始条件 $x_1(0)>0$，$x_2(0)>0$，则对任意的 $n\geqslant 0$ 都有 $x_1(n)>0$，$x_2(n)>0$. 对任一有界序列 $\{h(n)\}$，定义 $h^{\mathrm{L}}=\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\{h(n)\}$，$h^{\mathrm{M}}=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{h(n)\}$.

1　绝灭性

首先证明在适当的条件下，种群 x_2 或 x_1 将趋于绝灭. 证明与文献[4] 中的引理 2.1 类似，故略. 通过证明可以得到如下结论：

引理 1　系统(2) 的任一正解 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 均满足

$$\limsup_{n\to\infty} x_i(n)\leqslant\frac{\exp(r_i^{\mathrm{M}}-1)}{a_i^{\mathrm{L}}}\triangleq B_i,\ i=1,2.$$

定理 1　设 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 是系统(2) 的任一正解，若系统(2) 满足

$$(\mathrm{H}_1)\ \frac{r_2^{\mathrm{M}}}{r_1^{\mathrm{L}}}<\min\left\{\frac{c_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}(1+B_1)},\frac{a_2^{\mathrm{L}}}{c_2^{\mathrm{M}}},\frac{b_2^{\mathrm{L}}}{b_1^{\mathrm{M}}}\right\},$$

则种群 x_2 将绝灭，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$.

证明　由条件(H_1)，可选取足够小的数 $\varepsilon_1>0$，使得

$$\frac{r_2^{\mathrm{M}}}{r_1^{\mathrm{L}}}<\min\left\{\frac{c_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}(1+B_1+\varepsilon_1)},\frac{a_2^{\mathrm{L}}}{c_2^{\mathrm{M}}},\frac{b_2^{\mathrm{L}}}{b_1^{\mathrm{M}}}\right\}.$$

由上式可知，存在正常数 α 和 β 使得 $\dfrac{r_2^{\mathrm{M}}}{r_1^{\mathrm{L}}}<\dfrac{\beta}{\alpha}<\min\left\{\dfrac{c_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}(1+B_1+\varepsilon_1)},\dfrac{a_2^{\mathrm{L}}}{c_2^{\mathrm{M}}},\dfrac{b_2^{\mathrm{L}}}{b_1^{\mathrm{M}}}\right\}$，从而有

$$\beta a_1^{\mathrm{M}}-\frac{\alpha c_1^{\mathrm{L}}}{1+B_1+\varepsilon_1}<0,\ \beta c_2^{\mathrm{M}}-\alpha a_2^{\mathrm{L}}<0,\ \beta b_1^{\mathrm{M}}-\alpha b_2^{\mathrm{L}}<0, \tag{3}$$

且存在一个 $\delta_1>0$，使

$$\alpha r_2^{\mathrm{M}}-\beta r_1^{\mathrm{L}}=-\delta_1<0. \tag{4}$$

对上述 ε_1，由引理 1 可知存在足够大的自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$x_i(n)<B_i+\varepsilon_1,\ i=1,2. \tag{5}$$

对任意 $k\geqslant N$，根据系统(2) 的方程和式(5) 可知：

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_1(k+1)}{x_1(k)}&=r_1(k)-a_1(k)x_1(k)-\frac{c_2(k)x_2(k)}{1+x_2(k)}-b_1(k)x_1(k)x_2(k)\geqslant\\&r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}x_1(k)-c_2^{\mathrm{M}}x_2(k)-b_1^{\mathrm{M}}x_1(k)x_2(k),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_2(k+1)}{x_2(k)}&=r_2(k)-a_2(k)x_2(k)-\frac{c_1(k)x_1(k)}{1+x_1(k)}-b_2(k)x_1(k)x_2(k)\leqslant\\&r_2^{\mathrm{M}}-a_2^{\mathrm{L}}x_2(k)-\frac{c_1^{\mathrm{L}}x_1(k)}{1+B_1+\varepsilon_1}-b_2^{\mathrm{L}}x_1(k)x_2(k).\end{aligned} \tag{7}$$

由不等式(3)—(7) 可得

$$\begin{aligned}&\alpha\ln\frac{x_2(k+1)}{x_2(k)}-\beta\ln\frac{x_1(k+1)}{x_1(k)}\leqslant(\alpha r_2^{\mathrm{M}}-\beta r_1^{\mathrm{L}})+\left(\beta a_1^{\mathrm{M}}-\frac{\alpha c_1^{\mathrm{L}}}{1+B_1+\varepsilon_1}\right)x_1(k)+\\&(\beta c_2^{\mathrm{M}}-\alpha a_2^{\mathrm{L}})x_2(k)+(\beta b_1^{\mathrm{M}}-\alpha b_2^{\mathrm{L}})x_1(k)x_2(k)\leqslant\alpha r_2^{\mathrm{M}}-\beta r_1^{\mathrm{L}}=-\delta_1<0,\ k\geqslant N.\end{aligned} \tag{8}$$

将上式两边同时从 N 到 $n-1$ 累加，可得 $\alpha\ln\dfrac{x_2(n)}{x_2(N)}-\beta\ln\dfrac{x_1(n)}{x_1(N)}<-\delta_1(n-N)$，因此

$$x_2(n)<\left[\frac{x_1(n)}{x_1(N)}\right]^{\frac{\beta}{\alpha}}x_2(N)\mathrm{e}^{\frac{-\delta_1(n-N)}{\alpha}}. \tag{9}$$

由不等式(9) 和 $x_1(n)$ 的有界性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$. 证毕.

定理 2 设$(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$是系统(2)的任一正解,若条件$(\mathrm{H}_2)$成立,则种群$x_1$将绝灭,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_1(n)=0$.

(H_2) $\dfrac{r_1^{\mathrm{M}}}{r_2^{\mathrm{L}}}<\min\left\{\dfrac{c_2^{\mathrm{L}}}{a_2^{\mathrm{M}}(1+B_2)},\dfrac{a_1^{\mathrm{L}}}{c_1^{\mathrm{M}}},\dfrac{b_1^{\mathrm{L}}}{b_2^{\mathrm{M}}}\right\}$.

证明 由条件(H_2)可选取足够小的数$\varepsilon_2>0$,使得$\dfrac{r_1^{\mathrm{M}}}{r_2^{\mathrm{L}}}<\min\left\{\dfrac{c_2^{\mathrm{L}}}{a_2^{\mathrm{M}}(1+B_2+\varepsilon_2)},\dfrac{a_1^{\mathrm{L}}}{c_1^{\mathrm{M}}},\dfrac{b_1^{\mathrm{L}}}{b_2^{\mathrm{M}}}\right\}$. 由上式可知,存在正常数$\alpha$和$\beta$使得$\dfrac{r_1^{\mathrm{M}}}{r_2^{\mathrm{L}}}<\dfrac{\beta}{\alpha}<\min\left\{\dfrac{c_2^{\mathrm{L}}}{a_2^{\mathrm{M}}(1+B_2+\varepsilon_2)},\dfrac{a_1^{\mathrm{L}}}{c_1^{\mathrm{M}}},\dfrac{b_1^{\mathrm{L}}}{b_2^{\mathrm{M}}}\right\}$,从而有

$$\beta a_2^{\mathrm{M}}-\frac{\alpha c_2^{\mathrm{L}}}{1+B_2+\varepsilon_2}<0,\ \beta c_1^{\mathrm{M}}-\alpha a_1^{\mathrm{L}}<0,\ \beta b_2^{\mathrm{M}}-\alpha b_1^{\mathrm{L}}<0, \tag{10}$$

且存在一个$\delta_2>0$,使

$$\alpha r_1^{\mathrm{M}}-\beta r_2^{\mathrm{L}}=-\delta_2<0. \tag{11}$$

对上述ε_2,由引理 1 可知存在足够大的自然数M,使得当$n\geqslant M$时,有

$$x_i(n)<B_i+\varepsilon_2,\ i=1,2. \tag{12}$$

对任意$k\geqslant M$,根据系统(2)的方程和式(12)可知:

$$\ln\frac{x_1(k+1)}{x_1(k)}\leqslant r_1^{\mathrm{M}}-a_1^{\mathrm{L}}x_1(k)-\frac{c_2^{\mathrm{L}}x_2(k)}{1+B_2+\varepsilon_2}-b_1^{\mathrm{L}}x_1(k)x_2(k), \tag{13}$$

$$\ln\frac{x_2(k+1)}{x_2(k)}\geqslant r_2^{\mathrm{L}}-a_2^{\mathrm{M}}x_2(k)-c_1^{\mathrm{M}}x_1(k)-b_2^{\mathrm{M}}x_1(k)x_2(k). \tag{14}$$

由不等式(10)—(14)可得

$$\begin{aligned}&\alpha\ln\frac{x_1(k+1)}{x_1(k)}-\beta\ln\frac{x_2(k+1)}{x_2(k)}\leqslant(\alpha r_1^{\mathrm{M}}-\beta r_2^{\mathrm{L}})+(\beta c_1^{\mathrm{M}}-\alpha a_1^{\mathrm{L}})x_1(k)+\\&\left(\beta a_2^{\mathrm{M}}-\frac{\alpha c_2^{\mathrm{L}}}{1+B_2+\varepsilon_2}\right)x_2(k)+(\beta b_2^{\mathrm{M}}-\alpha b_1^{\mathrm{L}})x_1(k)x_2(k)\leqslant\alpha r_1^{\mathrm{M}}-\beta r_2^{\mathrm{L}}=-\delta_2<0,\ k\geqslant M.\end{aligned} \tag{15}$$

其余证明与定理 1 类似,故省略.

2 稳定性

以下证明在一个种群绝灭的情况下,另一个种群稳定. 首先给出相关的引理.

引理 2[10] 假设序列$\{x(n)\}$满足$x(n+1)\geqslant x(n)\mathrm{e}^{\{a(n)-b(n)x(n)\}}$, $n\geqslant N_0$, $\limsup\limits_{n\to+\infty}x(n)\leqslant x^*$且$x(N_0)>0$, $N_0\in\mathbf{N}$,其中$a(n)$和$b(n)$均为有正的上下界的非负序列,则

$$\liminf_{n\to\infty}x(n)\geqslant\min\left\{\frac{a^{\mathrm{L}}}{b^{\mathrm{M}}}\exp(a^{\mathrm{L}}-b^{\mathrm{M}}x^*),\frac{a^{\mathrm{L}}}{b^{\mathrm{M}}}\right\}.$$

引理 3 若条件(H_1)成立,则系统(2)的任一正解$(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$均满足

$$A_1\leqslant\liminf_{n\to\infty}x_1(n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}x_1(n)\leqslant B_1,$$

其中$A_1=\dfrac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\exp(r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1)$, B_1由引理 1 所定义.

证明 由引理 1 和定理 1 可知,

$$\lim_{n\to\infty}x_2(n)=0,\ \limsup_{n\to\infty}x_1(n)\leqslant B_1. \tag{16}$$

因为$r_1^{\mathrm{L}}>0$,所以存在足够小的数$\varepsilon>0$,使得

$$A_\varepsilon\triangleq r_1^{\mathrm{L}}-c_2^{\mathrm{M}}\varepsilon-b_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)\varepsilon>0. \tag{17}$$

对上述ε,由式(16)可知存在足够大的自然数N_1,使得当$n\geqslant N_1$时,有$x_2(n)\leqslant\varepsilon$, $x_1(n)\leqslant B_1+\varepsilon$.

由该式和系统(2)的第 1 个方程可知

$$x_1(n+1)\geqslant x_1(n)\exp\{r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}x_1(n)-c_2^{\mathrm{M}}\varepsilon-b_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)\varepsilon\}.$$

应用引理 2 可得 $\liminf\limits_{n\to\infty}x_1(n)\geqslant\min\left\{\frac{A_\varepsilon}{a_1^{\mathrm{M}}}\exp(A_\varepsilon-a_1^{\mathrm{M}}B_1),\ \frac{A_\varepsilon}{a_1^{\mathrm{M}}}\right\}$. 令 $\varepsilon\to0$，则有

$$\liminf_{n\to\infty}x_1(n)\geqslant\min\left\{\frac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\exp(r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1),\frac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\right\}.\tag{18}$$

容易算出 $r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1=r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}\dfrac{\exp(r_1^{\mathrm{M}}-1)}{a_1^{\mathrm{L}}}\leqslant r_1^{\mathrm{L}}-\exp(r_1^{\mathrm{M}}-1)\leqslant r_1^{\mathrm{L}}-r_1^{\mathrm{M}}\leqslant0$. 因此，由不等式(18)可得 $\liminf\limits_{n\to\infty}x_1(n)\geqslant\dfrac{r_1^{\mathrm{L}}}{a_1^{\mathrm{M}}}\exp(r_1^{\mathrm{L}}-a_1^{\mathrm{M}}B_1)\triangleq A_1$. 引理 3 得证.

引理 4　若条件(H_2)成立，则系统(2)的任一正解 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 均满足

$$A_2\leqslant\liminf_{n\to\infty}x_2(n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}x_2(n)\leqslant B_2,$$

其中 $A_2=\dfrac{r_2^{\mathrm{L}}}{a_2^{\mathrm{M}}}\exp(r_2^{\mathrm{L}}-a_2^{\mathrm{M}}B_2)$，$B_2$ 由引理 1 所定义.

证明　因证明与引理 3 的证明类似，故省略.

考虑离散 Logistic 方程

$$x(n+1)=x(n)\exp\{r_1(n)-a_1(n)x(n)\},\ n\in\mathbf{N},\tag{19}$$

其中 $a_1(n)$ 和 $r_1(n)$ 均为非负有界序列.

引理 5[8]　方程(19)的任一正解 $x(n)$ 均满足

$$A_1\leqslant\liminf_{n\to\infty}x(n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}x(n)\leqslant B_1,$$

其中 A_1 和 B_1 如引理 3 所定义.

考虑离散 Logistic 方程

$$x(n+1)=x(n)\exp\{r_2(n)-a_2(n)x(n)\},\ n\in\mathbf{N},\tag{20}$$

其中 $a_2(n)$ 和 $r_2(n)$ 均为非负有界序列.

引理 6[8]　方程(20)的任一正解 $\hat{x}(n)$ 均满足

$$A_2\leqslant\liminf_{n\to\infty}\hat{x}(n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\hat{x}(n)\leqslant B_2$$

其中 A_2 和 B_2 如引理 4 所定义.

定理 3　设(H_1)成立，且满足如下条件(H_3)，则对系统(2)的任一正解 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1(n)-x(n))=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$，其中 $x(n)$ 为方程(19)的任一正解.

(H_3) $\dfrac{a_1^{\mathrm{M}}}{a_1^{\mathrm{L}}}\exp(r_1^{\mathrm{M}}-1)<2$.

证明　由定理 1 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_2(n)=0$. 令 $y(n)=\ln\dfrac{x_1(n)}{x(n)}$，则由系统(2)的第 1 个方程和方程(19)可得

$$y(n+1)=y(n)-a_1(n)x(n)[\exp(y(n))-1]-\frac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)}-b_1(n)x_1(n)x_2(n).\tag{21}$$

由微分中值定理知，存在 $\theta(n)\in(0,1)$，使 $\exp(y(n))-1=\exp(\theta(n)y(n))y(n)$，故式(21)可化为

$$y(n+1)=[1-a_1(n)x(n)\exp(\theta(n)y(n))]\,y(n)-\left[\frac{c_2(n)}{1+x_2(n)}+b_1(n)x_1(n)\right]x_2(n).\tag{22}$$

由(H_3)可知 $-1<1-a_1^{\mathrm{M}}B_1$，故存在足够小的数 $\varepsilon>0$，使得 $-1<1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)$. 根据引理 3、引理 5 和定理 1 可知，对上述 ε 存在足够大的自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$A_1-\varepsilon\leqslant x_1(n)\leqslant B_1+\varepsilon,\ A_1-\varepsilon\leqslant x(n)\leqslant B_1+\varepsilon,\ x_2(n)\leqslant\varepsilon.\tag{23}$$

由 $\theta(n)\in(0,1)$ 知，$x(n)\exp(\theta(n)y(n))$ 介于 $x(n)$ 和 $x_1(n)$ 之间，因此由式(22)和(23)可得，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|y(n+1)|\leqslant\max\{|1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)|,|1-a_1^{\mathrm{L}}(A_1-\varepsilon)|\}|y(n)|+[c_2^{\mathrm{M}}+b_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)]\varepsilon\triangleq \lambda_\varepsilon|y(n)|+M_\varepsilon\varepsilon,$$

其中 $\lambda_\varepsilon=\max\{|1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)|,|1-a_1^{\mathrm{L}}(A_1-\varepsilon)|\}$，$M_\varepsilon=c_2^{\mathrm{M}}+b_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)$. 从而有

$$|y(n)|\leqslant\lambda_\varepsilon^{n-N}|y(N)|+\frac{1-\lambda_\varepsilon^{n-N}}{\lambda_\varepsilon}M_\varepsilon\varepsilon,\ n\geqslant N. \tag{24}$$

因为 $-1<1-a_1^{\mathrm{M}}(B_1+\varepsilon)\leqslant1-a_1^{\mathrm{L}}(A_1-\varepsilon)<1$，所以 $0<\lambda_\varepsilon<1$. 再由式(24)可得 $\lim\limits_{n\to\infty}y(n)=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1(n)-x(n))=0$. 证毕.

应用引理 4、引理 6 和定理 2，通过类似的证明可得如下定理：

定理 4 设(H_2)成立，且满足如下条件(H_4)，则对系统(2)的任一正解 $(x_1(n),x_2(n))^{\mathrm{T}}$ 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_2(n)-\hat{x}(n))=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_1(n)=0$，其中 $\hat{x}(n)$ 为方程(20)的任一正解.

(H_4) $\dfrac{a_2^{\mathrm{M}}}{a_2^{\mathrm{L}}}\exp(r_2^{\mathrm{M}}-1)<2$.

参考文献：

[1] Chattopadhyay J. Effect of toxic substances on a two-species competitive system[J]. Ecol Model, 1996,84:287-289.

[2] Yue Qin. Extinction for a discrete competition system with the effect of toxic substances[J]. Adv Differ Equ, 2016,2016(1):1-15.

[3] Li Zhong, Chen Fengde. Extinction in two-dimensional nonautonomous Lotka-Volterra systems with the effect of toxic substances[J]. Appl Math Comput, 2006,182(1):684-690.

[4] Li Zhong, Chen Fengde. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances[J]. Dynam Contin Discrete Impuls Syst, Ser B, Appl Algorithms, 2008,15:165-178.

[5] Chen Lijuan, Chen Fengde. Extinction in a discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances and feedback controls[J]. Inter J Biomath, 2015,8(1):1550012.

[6] Xie Xiangdong, Xue Yalong, Wu Runxin, et al. Extinction of a two species competitive system with nonlinear inter-inhibition terms and one toxin producing phytoplankton[J]. Adv Diff Equ, 2016,2016:258.

[7] Wang Qinglong, Liu Zhijun, Li Zuxiong, et al. Existence and global asymptotic stability of positive almost periodic solutions of a two-species competitive system[J]. Inter J Biomath, 2014,7(4):1450040.

[8] Chen Fengde, Gong Xiaojie, Chen Wanlin. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances (II)[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst, Ser B, Appl Algorithms, 2013, 20:449-461.

[9] Liu Zhijun, Chen Lansun. Periodic solution of a two-species competitive system with toxicant and birth pulse[J]. Cha Sol Frac, 2007,32:1703-1712.

[10] Chen Fengde. Permanence for the discrete mutualism model with time delays[J]. Math Comput Model, 2008,47: 431-435.

[11] 余胜斌. 一类离散非自治竞争系统的绝灭性和稳定性[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2015,41(4):279-284.