文章编号：1004-4353(2018)03-0194-05

一类p-拉普拉斯椭圆方程的多重解

刘春晗
(齐鲁师范学院 数学学院，山东 济南 250013)

摘要：利用局部环绕的临界点定理，在没有使用Ambrosetti-Rabinowitz 型增长条件下，讨论了一类p-拉普拉斯椭圆方程，获得了方程的多个非平凡解. 所得结果改进和推广了文献[5-7]中的相关结论.

关键词：局部环绕；临界点定理；p-拉普拉斯椭圆方程；非平凡解
中图分类号：O175.25　　　　**文献标识码**：A

Multiple solutions for a class of p-Laplacian elliptic equations

LIU Chunhan
(*School of Mathematics*, *Qilu Normal University*, *Jinan* 250013, *China*)

Abstract: Using critical point theorem related to local linking, the p-Laplacian elliptic equations are discussed without using Ambrosetti-Rabinowitz type growth conditions, and some nontrivial solutions are obtained. The results extend and improve the relevant conclusion in the literature [5-7].

Keywords: local linking; critical point theorem; p-Laplacian elliptic equations; nontrivial solutions

0 引言

本文研究椭圆方程

$$\begin{cases}\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)\right]^{p-1}(-\Delta_p u)=f(x,u),\ x\in\Omega;\\ u=0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

这里 $M: R^+\to R^+$ 是连续泛函，$\Omega\subset R^N$ 是具有光滑边界的有界区域，$\Delta_p u=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p-拉普拉斯算子($1<p$).

设$W_0^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega):\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x<\infty, 且\ u|_{\partial\Omega}=0\right\}$是Banach空间，定义范数为$\|u\|=\|u\|_p=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，$\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)$. $W=\mathrm{span}\{\phi_1\}$是相应于特征根$\lambda_1$的一维特征子空间，其中$\|\phi_1\|=1$. 设$W_0^{1,p}(\Omega)=W\oplus V$，其中$V=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):\int_\Omega u\phi_1^{p-1}\mathrm{d}x=0\right\}$，则存在$\bar\lambda>\lambda_1$，使得$\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\geqslant\bar\lambda\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x$，$\forall u\in V$. 当 $p=2$ 时，取$\bar\lambda=\lambda_2$，λ_2 是 $H_0^1(\Omega)$ 中 $-\Delta$ 的第 2 特征值.

首先考虑特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta_p u=\lambda h(x)|u|^{p-2}u,\ u\in\Omega;\\ u=0,\ u\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

收稿日期：2018-06-21　　**作者简介**：刘春晗(1981—)，男，副教授，研究方向为非线性泛函分析及其应用.
基金项目：山东省自然科学基金资助项目(ZR2016AB04)；齐鲁师范学院青年教师科研基金资助项目(2016L0603)

这里 $h(x)\in L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$ 是正测度子集上的正能量泛函. 定义流形

$$\Gamma=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):\int_\Omega h(x)\,|u|^p\mathrm{d}x=1\right\},$$

则 Γ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的一个光滑、对称、非空的子流形. 定义 $\sum$ 为 Γ 中一类紧对称子集，令 $\Gamma_k=\{A\in\sum: i(A)\geqslant k\}$，其中 i 是 Fadell 和 Rabinowitz 的上同调指标[1-2]. 依据文献[3]，问题(2) 的特征值可以表示成

$$\lambda_k(h)=\inf_{\sum\in\Gamma_k}\sup_{u\in\sum}\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x. \tag{3}$$

$\{\lambda_k(h)\}_{k\in N}$ 包含问题(2) 的所有特征值，且 $\{\lambda_k(h)\}_{k\in N}$ 是问题(2) 的变分特征值. 由文献[2] 可知，第 1 特征值 $\lambda_1(h)>0$ 是单根且孤立的. 设 ϕ_1^h 是 $\lambda_1(h)$ 的标准特征函数，ϕ_1^h 在 Ω 上是正的.

文献[4-6] 利用 Morse 理论和局部环绕研究了方程 $\begin{cases}-\Delta_p u=f(x,u),\ u\in\Omega;\\ u=0,\ u\in\partial\Omega,\end{cases}$ 得到了方程至少存在一个(两个) 非平凡弱解. 文献[7] 利用 Morse 理论研究了方程(1)，得到了方程(1) 至少有两个非平凡解. 本文将会用到如下条件：

(F_1) 存在某个常数 $C>0$，使得 $|f(x,t)|\leqslant C(1+|t|^{q-1})$，$\forall x\in\Omega$，$t\in R$. 这里 $1\leqslant q<p^*=\dfrac{Np}{N-p}$，$1<p<N$.

(F_2) 存在 $r>0$，$\hat{\lambda}\in(\lambda_1,\bar{\lambda})$，$m_1^{p-1}\lambda_1<m_0^{p-1}\hat{\lambda}$，对于任意的 $|u|\leqslant r$，有 $m_1^{p-1}\lambda_1|u|^p\leqslant pF(x,u)<m_0^{p-1}\hat{\lambda}|u|^p$.

(F_3) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty}\frac{pF(x,t)}{|t|^p}=m_0^{p-1}\lambda_1$.

(F_4) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty}(f(x,t)t-pF(x,t))=+\infty$.

本文假设 $M:R^+\to R^+$ 是连续泛函，并且满足如下条件：

(i) 存在常数 $n_0>0$，使得 $M(u)\geqslant n_0$，$\forall u\geqslant 0$.

(ii) 存在常数 $n_1>0$，使得 $M(u)\leqslant n_1$，$\hat{M}(u)\leqslant[M(u)]^{p-1}u$，$\forall u\geqslant 0$，其中 $\hat{M}(u)=\int_0^u[M(s)]^{p-1}\mathrm{d}s$.

f 是 Caratheodory 泛函且满足如下条件：

(H_1) 存在某个常数 $C>0$，使得 $|f(x,t)|\leqslant C(1+|t|^{q-1})$，$\forall x\in\Omega$，$t\in R$. 这里 $p<q<p^*=\begin{cases}\dfrac{Np}{N-p},\ N>p;\\ \infty,\ p\geqslant N.\end{cases}$

(H_2) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty}\frac{pF(x,t)}{|t|^p}=n_0^{p-1}h_\infty(x)$ 对 a. e. $x\in\Omega$ 一致，其中 $h_\infty(x)\in L^{N/p}$.

(H_3) $\displaystyle\lim_{|t|\to 0}\frac{pF(x,t)}{|t|^p}=n_1^{p-1}h_0(x)$ 对 a. e. $x\in\Omega$ 一致，其中 $h_0(x)\in L^{N/p}$.

(H_4) $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty}\left(F(x,t)-\frac{n_0^{p-1}}{p}h_\infty(x)\ |t|^p\right)=-\infty$ 对 a. e. $x\in\Omega$ 一致.

经典的 Ambrosetti-Rabinowitz 型增长条件为：存在 $\mu>p$ 和 $r>0$，使得对于任意的 $x\in\Omega$，有 $|t|\geqslant r\Rightarrow 0<\mu F(x,t)\leqslant tf(x,t)$，则称 $f(x,t)$ 满足 Ambrosetti-Rabinowitz 型增长条件.

通过比较可以看到，本文并没有用到经典的 Ambrosetti-Rabinowitz 型增长条件，研究方法也不同于文献[7].

1　预备知识

易知方程(1) 的弱解是泛函 $\Phi(u)=\dfrac{1}{p}\hat{M}\left(\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$ 的临界点，其中 $\hat{M}(u)=$

$\int_0^u [M(s)]^{p-1}\mathrm{d}s$, $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$. 显然 $\Phi(u)\in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),R)$, 且对 $\forall u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\langle \Phi'(u),v\rangle=\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x.$$

根据 Sobolev 嵌入定理知,对任意的 $1\leqslant\alpha\leqslant p^*$, $W_0^{1,p}(\Omega)\to L^\alpha(\Omega)$ 是紧的.

本文将用到以下定义、引理和定理:

定义 1[4] 设 $\Phi\in C^1(E,R)$, 若对于任意满足 $\Phi(u_n)\to c$, $\Phi'(u_n)\to 0\ (n\to\infty)$ 的数列 $\{u_n\}$ 均存在收敛子列,则称 Φ 对于每一个 $c\in R$ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件;如果 Φ 对于每一个 $c\in R$ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件,则称 Φ 满足(PS) 条件.

定义 2[8] 称 E 的子集 A 和 B 环绕,若 $A\cap B=\varnothing$, 对任意的 $\Gamma\in\Phi$, 存在 $t\in[0,1]$, 使得 $\Gamma(t,A)\cap B\neq\varnothing$.

引理 1[7] 假设满足条件(i) 和(H_1),任意满足 $\Phi'(u_n)\to 0\ (n\to\infty)$ 的 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 有一个收敛子列.

定理 1[3] 设 X 是实赋范空间, C_+, C_- 为 X 的两个星形集, C_+ 是 X 的闭集, $C_+\cap C_-=\{0\}$, 并且在 Z_2 上 $(X,C_-\setminus\{0\})$ 与 C_+ (k) 维上同调环绕. r_+, $r_->0$, 令:

$$D_-=\{u\in C_-:\|u\|\leqslant r_-\},\ S_+=\{u\in C_+:\|u\|=r_+\},$$

$$Q=\{u+te:u\in C_-,t\geqslant 0,\|u+te\|\leqslant r_-\},\ H=\{u+te:u\in C_-,t>0,\|u+te\|=r_-\}.$$

如果 $r_->r_+>0$, $(Q,D_-\cup H)$ 与 S_+ 在 Z_2 上 $k+1$ 维上同调环绕. 事实上, $D_-\cup H$ 是 Q 的相对边界.

定理 2[6] 设 X 是实赋范空间, C_+, C_- 为 X 的两个星形集, C_+ 是 X 的闭集, $C_+\cap C_-=\{0\}$, 并且在 Z_2 上 $(X,C_-\setminus\{0\})$ 与 C_+ (k) 维上同调环绕. 假设泛函 $J\in C^1(X,R)$, $J(0)=0$ 且满足(PS) 条件,则存在一个常数 $\delta>0$, 使得

$$\begin{cases} J(u)\leqslant 0,\ \forall u\in C_-,\ \|u\|\leqslant\delta; \\ J(u)>0,\ \forall u\in C_+,\ 0<\|u\|\leqslant\delta. \end{cases} \tag{4}$$

假设 J 是下方有界且 $\inf_X J<0$, 则 J 至少有 3 个临界点.

由于 $\lambda_k(h_0)<\lambda_{k+1}(h_0)$, 设

$$C_-=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x\leqslant\lambda_k(h_0)\int_\Omega h_0(x)|u|^p\mathrm{d}x\right\},$$

$$C_+=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega):\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x\geqslant\lambda_{k+1}(h_0)\int_\Omega h_0(x)|u|^p\mathrm{d}x\right\},$$

其中 C_- 和 C_+ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中对称的闭子集,且 $C_-\cap C_+=\{0\}$. 从文献[3] 中的定理 2.7 和定理 3.2 可知,在 Z_2 上 $(W_0^{1,p}(\Omega),C_-\setminus\{0\})$ 与 C_+ $(k=i(C_-\setminus\{0\}))$ 维上同调环绕.

2 主要结果及其证明

定理 3 假设条件(i)、(ii) 和(H_1)—(H_3) 成立,如果 $\lambda_k(h_0)<1$, $\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{p-1}<\lambda_{k+1}(h_0)$, 且满足下列条件之一,则方程(1) 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中至少存在两个非平凡解.

(a) $\lambda_1(\infty)>1$;

(b) $\lambda_1(\infty)=1$, 且条件(H_4) 成立.

证明 假设 $k=1$, 令 $C_-=\mathrm{span}\{\phi_1^h\}$, 于是 $W_0^{1,p}(\Omega)=C_+\oplus C_-$. 利用文献[9] 中的定理 3 和定理 4 即可证明定理成立. 假设 $k>1$, 下面分 3 步来证明:

1) 证明泛函 Φ 满足(PS) 条件,即证明泛函 Φ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上是强制的. 如果 $\lambda_1(\infty)>1$, 由(H_2) 可知,对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $R_\varepsilon>0$, 使得

$$|pF(x,u)-n_0^{p-1}h_\infty(x)|u|^p|\leqslant\varepsilon|u|^p,\ \forall x\in\Omega,\ \|u\|\geqslant R_\varepsilon.$$

再由条件(i)、(ii) 和(H_1) 可得，存在 $A_\varepsilon^1>0$，使得：

$$F(x,u)\leqslant\frac{n_0^{p-1}}{p}h_\infty(x)|u|^p+\frac{\varepsilon}{p}|u|^p+A_\varepsilon^1,\ \forall x\in\Omega,\ u\in R,$$

$$\hat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)=\int_0^{\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x}[M(s)]^{p-1}\mathrm{d}s\geqslant n_0^{p-1}\int_0^{\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x}\mathrm{d}s=n_0^{p-1}\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x=n_0^{p-1}\|u\|^p.$$

于是有

$$\Phi(u)=\frac{1}{p}\hat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\frac{n_0^{p-1}}{p}\|u\|^p-\frac{n_0^{p-1}}{p}\int_\Omega h_\infty(x)|u|^p\mathrm{d}x-$$
$$\frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-A_\varepsilon^1|\Omega|\geqslant\frac{n_0^{p-1}}{p}\|u\|^p-\frac{n_0^{p-1}}{p}\frac{1}{\lambda_1(h_\infty)}\|u\|^p-\frac{\varepsilon A^p}{p}\|u\|^p-A_\varepsilon^1|\Omega|=$$
$$\frac{n_0^{p-1}}{p}\left(1-\frac{1}{\lambda_1(h_\infty)}\right)\|u\|^p-\frac{\varepsilon A^p}{p}\|u\|^p-A_\varepsilon^1|\Omega|,$$

这里 $|\Omega|$ 为 Ω 的勒贝格测度，因此可选取充分小的 $\varepsilon>0$，由上式得 Φ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上是强制的.

如果 $\lambda_1(\infty)=1$，且(H_4) 成立，令 $H(x,u)=F(x,u)-\frac{n_0^{p-1}}{p}h_\infty(x)|u|^p$，由条件($H_2$) 和($H_4$) 可得

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{pH(x,u)}{|u|^p}=0,\quad\lim_{|u|\to\infty}H(x,u)=-\infty.\tag{5}$$

若假设 Φ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上不是强制的，则存在 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$，使得

$$\|u_n\|\to\infty\ (n\to\infty),\ \Phi(u_n)\leqslant A,\tag{6}$$

其中 $A\in R$. 设 $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\|v_n\|=1$. 故存在 $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$，使得在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上 $v_n\rightharpoonup v$，在 $L^p(\Omega)$ 上 $v_n\to v$，在 Ω 上 a. e. $v_n\to v$. 因此，由式(5) 和(6) 可得

$$\frac{A}{\|u_n\|^p}\geqslant\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^p}=\frac{\hat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\right)}{p\|u_n\|^p}-\frac{\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x}{\|u_n\|^p}\geqslant\frac{n_0^{p-1}}{p}-\frac{n_0^{p-1}}{p}\int_\Omega h_\infty(x)|v_n|^p\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{\|u_n\|^p}\int_\Omega H(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant\frac{n_0^{p-1}}{p}-\frac{n_0^{p-1}}{p}\int_\Omega h_\infty(x)|v_n|^p\mathrm{d}x-\frac{A_1}{\|u_n\|^p},$$

这里 $A_1>0$ 是一个常数. 令 $n\to\infty$，有

$$1\leqslant\int_\Omega h_\infty(x)|v_n|^p\mathrm{d}x.\tag{7}$$

利用庞加莱不等式和范数的下半连续性，有

$$1\leqslant\int_\Omega h_\infty(x)|v_n|^p\mathrm{d}x\leqslant\|v_n\|^p\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|v_n\|^p=1.\tag{8}$$

由式(7) 和(8) 可得 $\int_\Omega|\nabla v_n|^p\mathrm{d}x=\int_\Omega h_\infty(x)|v_n|^p\mathrm{d}x$，并且在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上 $v_n\to v$. 由此可推出 $\|v\|=1$，且 $v=\pm\phi_1^{h_\infty}$，因此 $|u_n(x)|\to+\infty$ a. e. $x\in\Omega$. 再由 Fatou 引理和式(5) 可得

$$A_2\geqslant\Phi(u_n)=\frac{1}{p}\hat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{n_0^{p-1}}{p}\|u_n\|^p-\frac{n_0^{p-1}}{p}\frac{1}{\lambda_1(h_\infty)}\|u_n\|^p-\int_\Omega H(x,u_n)\mathrm{d}x\geqslant-\int_\Omega H(x,u_n)\mathrm{d}x\to+\infty\ (n\to\infty).$$

上式矛盾，因此 Φ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上是强制的，所以泛函 Φ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上满足(PS) 条件.

2) 证明 Φ 满足式(4). 由条件(H_3) 可得，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_\varepsilon>0$，使得

$$|pF(x,u)-n_1^{p-1}h_0(x)|u|^p|\leqslant\varepsilon|u|^p,\ \forall x\in\Omega,\ \|u\|\leqslant\delta_\varepsilon.$$

再由条件(i)、(ii)、(H_1) 及 F 的连续性可得，存在 $A_\varepsilon^2>0$，使得：

$$F(x,u)\geqslant \frac{n_1^{p-1}}{p}h_0(x)|u|^p-\frac{\varepsilon}{p}|u|^p-A_\varepsilon^2|u|^q,\forall x\in\Omega,\ u\in R;$$

$$F(x,u)\leqslant \frac{n_1^{p-1}}{p}h_0(x)|u|^p+\frac{\varepsilon}{p}|u|^p+A_\varepsilon^2|u|^q,\forall x\in\Omega,\ u\in R.$$

因此,对于任意的 $u\in C_-$,有:

$$\Phi(u)=\frac{1}{p}\hat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\frac{n_1^{p-1}}{p}\|u\|^p-\frac{n_1^{p-1}}{p}\int_\Omega h_0(x)|u|^p\mathrm{d}x+$$
$$\frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x+A_\varepsilon^2\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\leqslant\frac{n_1^{p-1}}{p}\|u\|^p-\frac{n_1^{p-1}}{p}\frac{1}{\lambda_k(h_0)}\|u\|^p+\frac{\varepsilon A^p}{p}\|u\|^p+A_\varepsilon^2A^q\|u\|^q=$$
$$\frac{n_1^{p-1}}{p}\left(1-\frac{1}{\lambda_k(h_0)}\right)\|u\|^p+\frac{\varepsilon A^p}{p}\|u\|^p+A_\varepsilon^2A^q\|u\|^q,$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{p}\hat{M}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\frac{n_0^{p-1}}{p}\|u\|^p-\frac{n_1^{p-1}}{p}\int_\Omega h_0(x)|u|^p\mathrm{d}x-$$
$$\frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-A_\varepsilon^2\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\frac{n_1^{p-1}}{p}\|u\|^p-\frac{n_1^{p-1}}{p}\frac{1}{\lambda_{k+1}(h_0)}\|u\|^p-\frac{\varepsilon A^p}{p}\|u\|^p-A_\varepsilon^2A^q\|u\|^q=$$
$$\frac{1}{p}\left(n_0^{p-1}-\frac{n_1^{p-1}}{\lambda_{k+1}(h_0)}\right)\|u\|^p-\frac{\varepsilon A^p}{p}\|u\|^p-A_\varepsilon^2A^q\|u\|^q.$$

由于 $\lambda_k(h_0)<1$, $\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{p-1}<\lambda_{k+1}(h_0)$, $p<q<p^*$,令 $\varepsilon=\frac{1}{2A^p}\min\left\{n_1^{p-1}\left(\frac{1}{\lambda_k(h_0)}-1\right),n_0^{p-1}-\frac{n_1^{p-1}}{\lambda_{k+1}(h_0)}\right\}$,则存在 $\delta>0$,使得式(4)成立.

3)当 $\inf\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi<0$ 时,由定理2可得定理3成立.当 $\inf\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi\geqslant0$ 时,由2)可得对于任意的 $u\in C_-$, $\|u\|\leqslant\delta$,有 $\Phi(u)=\inf\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)}\Phi=0$,因此对于满足 $u\in C_-$, $\|u\|\leqslant\delta$ 的 u 都是方程(1)的解.定理3得证.

参考文献:

[1] Fadell E R, Rabinowitz P H. Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems[J]. Invent Math, 1978,45(2):139-174.

[2] Perera K, Szulkin A. p-Laplacian problems where the nonlinearity crosses an eigenvalue[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2005,13:743-753.

[3] Degiovanni M, Lancelotti S. Linking over cones and nontrivial solutions for p-Laplace equations with p-superlinear nonlinearity[J]. Ann Inst H Poincare Anal Non Lineaire, 2007,24:907-919.

[4] Liu J, Su J. Remark on multiple nontrivial solutions for quasi-linear resonant problem[J]. J Math Anal Appl, 2001,258:209-222.

[5] Jiu Q, Su J. Existence and multiplicity results for Dirichlet problems with p-Laplacian[J]. J Math Anal Appl, 2003,281:587-601.

[6] Ou Z, Li C, Yuan J. Multiplicity of nontrivial solutions for quasilinear elliptic equation[J]. J Math Anal Appl, 2012,388:198-204.

[7] Liu D, Zhao P. Multiple nontrivial solutions to a p-Kirchhoff equation[J]. Nonlinear Anal, 2012,75:5032-5038.

[8] Frigon M. On a new notion of linking and application to elliptic problems at resonance[J]. J Differential Equations, 1999,153(1):96-120.

[9] Brezis H, Nirenberg L. Remarks on finding critical points[J]. Comm Pure Appl Math, 1991,44:939-963.