文章编号: 1004-4353(2018)02-0103-06

一类带有泛函边值条件的 Caputo 型分数阶 q-差分系统解的存在性与唯一性

杨昌发，侯成敏*
(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究一类带有泛函边值条件的分数阶 q-差分系统解的存在性和唯一性. 首先，根据该系统解的表达式构造了 4 个算子，并定义了一个新的算子，将证明该系统解的存在性转化为证明新算子是否具有不动点. 然后，运用 Krasnoselskii 不动点定理和 Perov's 不动点定理，在合适的假设条件下证明了该系统解的存在性与唯一性.

关键词: q-差分系统；不动点定理；解的存在性与唯一性
中图分类号: O175.6　　**文献标识码:** A

Existence and uniqueness of solutions for a class of Caputo type fractional q-difference system with functional boundary value conditions

YANG Changfa, HOU Chengmin*
(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence and uniqueness of solutions for a class of fractional q-differences system with functional boundary value conditions. Firstly, according to the expression of the system solution, four operators are constructed and a new operator is defined. Then we prove that the existence of the solution of the system transforms to prove whether the new operator has fixed point. Using Krasnoselskii fixed point theorem and Perov's fixed point theorem, the existence and uniqueness of the solution of the system are proved under suitable assumptions.

Keywords: q-differences equations; fixed point theorem; existence and uniqueness of solutions

0 引言

近年来，由于分数阶 q-差分方程被广泛应用在动力系统和信号图像处理等领域，因此受到国内外学者的广泛关注，其相关研究也取得了许多成果[1-5]. 2014 年，N. O. Bolo 等[6]运用 Leray-Schauder 选择定理、Schauder 不动点定理与 Perov's 不动点定理证明了如下非局部整数阶微分系统：

$$\begin{cases} x'(t)=f_1(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,1]; \\ y'(t)=f_2(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,1]; \\ x(0)=\phi[x,y],\ y(0)=\varphi[x,y] \end{cases}$$

解的存在性，其中 $f_1,f_2:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数，$\phi,\varphi:(C([0,1],\mathbf{R}))^2\to\mathbf{R}$ 是连续泛函. 2016 年，

收稿日期: 2018－04－21
* **通信作者:** 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程理论及其应用.

Kamal Shah 等[7] 利用 Banach 压缩映像原理、拓扑度定理研究了如下微分系统：

$$\begin{cases}D^{\alpha}x(t)=f_1(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,1];\\ D^{\beta}x(t)=f_2(t,x(t),y(t)),\ t\in[0,1];\\ x(0)=g(x),\ x(1)=\delta x(\eta),\ \eta\in[0,1];\\ y(0)=h(y),\ y(1)=\gamma x(\xi),\ \xi\in[0,1]\end{cases}$$

解的存在性与唯一性,其中 $1<\alpha,\ \beta\leqslant 2,\ 0<\gamma,\ \delta<1,\ \gamma\eta^{\alpha},\delta\xi^{\beta}\in[0,1),\ 0<q<1,\ g,h\in C([0,1],\mathbf{R})$ 是有界泛函, $f_1,f_2:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数.受上述文献的启示,本文研究带有泛函边值条件的分数阶 q-差分系统：

$$\begin{cases}{}^{c}D_q^{\alpha}u(t)+f(t,u(t),v(t))=0,\ t\in[0,1];\\ {}^{c}D_q^{\beta}v(t)+g(t,u(t),v(t))=0,\ t\in[0,1];\\ u(0)=\phi[u,v],\ u(1)=Au(\eta);\\ v(0)=\varphi[u,v],\ v(1)=Bv(\xi).\end{cases}\tag{1}$$

利用 Krasnoselskii 不动点定理和 Perov's 不动点定理在合适的条件下证明该系统解的存在性与唯一性,其中 $1<\alpha,\ \beta\leqslant 2,\ 0<\eta,\ \xi<1,\ A\eta,B\xi\in[0,1),\ 0<q<1,\ A,B\in(0,1]$,而 $\phi,\varphi:(C([0,1],\mathbf{R}))^2\to\mathbf{R}$ 是连续泛函, $f,g:[0,1]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是连续函数.

1 预备知识

定义 1[8] $[a]_q=\dfrac{1-q^{a}}{1-q},\ a\in\mathbf{R},\ q\in(0,1).$

定义 2[8] 幂指函数 $(a-b)^n$ 的 q-类似定义为：

$(a-b)^{(0)}=1$;

$(a-b)^{(n)}=a^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a-bq^k),\ n\in\mathbf{N},\ a,b\in\mathbf{R}$;

$(a-b)^{(\alpha)}=a^{\alpha}\prod\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a-bq^n}{a-bq^{\alpha+n}},\ \alpha\in\mathbf{R},\ a\neq 0$,特别地, $b=0$ 时 $a^{(\alpha)}=a^{\alpha}$.

定义 3[8] q-Γ 函数定义为 $\Gamma_q(x)=\dfrac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}},\ x\in\mathbf{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$.

由定义 3 易知 $\Gamma_q(x+1)=[x]_q\Gamma_q(x)$.

定义 4[8] 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的 q-积分定义为：

$(I_qf)(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}_qt=x(1-q)\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(xq^n)q^n,\ x\in[0,1].$

定义 5[8] 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数,Caputo 型分数阶 q-导数定义为：

$({}^{c}D_q^0f)(x)=f(x)$;

$({}^{c}D_q^{\alpha}f)(x)=I_q^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}(D_q^{\lceil\alpha\rceil}f)(x),\ \alpha>0,\ x\in[0,1].$

$\lceil\alpha\rceil$ 是不小于 α 的最小整数.显然,当 $\alpha\in\mathbf{N}$, ${}^{c}D_q^{\alpha}f=D_q^{\alpha}f$,特别地 $(I_q^{\alpha}1)(x)=\dfrac{x^{(\alpha)}}{\Gamma_q(\alpha+1)}$.

定义 6[6] 设 X 是一个非空集合,在 X 上定义一个映射 $d:X\times X\to\mathbf{R}$ 满足 (A_1)—(A_3)：

(A_1) $d(u,v)\geqslant 0$,而且 $d(u,v)=0$,当且仅当 $u=v$;

(A_2) $d(u,v)=d(v,u)$;

(A_3) $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(w,v),\ u,w,v\in X$.

则 (X,d) 称为广义的度量空间,若 $x,y\in\mathbf{R}^n,\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则对于 $x_i\leqslant y_i$ $(i=1,\cdots,n)$,有 $x\leqslant y$.

定义 7[6]　若 $\boldsymbol{M}$ 是一个方阵(含非零元素),$\boldsymbol{M}^k \to 0$, $k \to \infty$,则称方阵 $\boldsymbol{M}$ 收敛于零方阵.

性质 1[8]　设 $\alpha,\beta > 0$, $f(x)$ 是定义在$[0,1]$上的函数,则:

$$(I_q^\beta I_q^\alpha f)(x) = (I_q^{\alpha+\beta} f)(x),\ (I_q^{\alpha\,c} D_q^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{x^n}{\Gamma_q(n+1)} D_q^n f(0),$$

$$(D_q I_q f)(x) = f(x),\ (I_q D_q f)(x) = f(x) - f(0),\ ({}^c D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x) = f(x).$$

性质 2[6]　若 $\boldsymbol{M}$ 是一个方阵(含有非负元素),$\boldsymbol{I}$ 表示与 $\boldsymbol{M}$ 的阶数相同的单位矩阵,则下列 4 个条件等价:

(B_1) 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 收敛于零矩阵;

(B_2) $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}$ 是非奇异的,且$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1} = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2+\cdots$;

(B_3) 任意 $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < 1$ 且特征值$(\boldsymbol{M}-\lambda\boldsymbol{I}) = 0$;

(B_4) $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}$ 是非奇异的,且$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}$ 具有非负元素.

引理 1[1](Arezela-Ascoli 定理)　设 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 是有界域,若 $K \subseteq C(\overline{D},\mathbf{R}^n)$ 是有界且 $\varepsilon > 0$,存在 $\sigma > 0$,使得$\|x-y\| < \sigma \Rightarrow |u(x)-u(y)| < \varepsilon$, $\forall\, x,y \in \overline{D}$, $\forall\, u \in K$,则 $\overline{K}$ 是紧的.

引理 2[1](Krasnoseskii 不动点定理)　设 K 是 Banach 空间 E 的有界凸闭子集,$T,S: K \to E$ 满足(C_1)—(C_3):

(C_1) 对任意 $x,y \in K$ 有 Tx, $Tx+Sy \in K$;

(C_2) T 是压缩映像;

(C_3) S 在 K 上是全连续.

则 $T+S$ 在 K 内至少存在一个不动点.

引理 3[6](Perov's 不动点定理)　在完备的广义度量空间(X,d)中,若 $T: X \to X$ 是带有 Lipschitz 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 压缩算子,即

$$d(T^k(u_0),u) \leqslant \boldsymbol{M}^k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1} d(u_0,T^k(u_0)),\ \forall\, k \in \mathbf{N},\ u_0 \in X.$$

则存在唯一不动点 $u \in X$.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 $h \in C([0,1],\mathbf{R})$,则分数阶 q-差分方程

$$\begin{cases} {}^c D_q^\alpha u(t) = -h(t),\ t \in \boldsymbol{I} = [0,1]; \\ u(0) = \phi[u,v],\ u(1) = Au(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解

$$u(t) = \frac{t}{1-A\eta}\int_0^1 \frac{(1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} h(s)\,\mathrm{d}_q s - \int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} h(s)\,\mathrm{d}_q s - \frac{At}{1-A\eta}\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} h(s)\,\mathrm{d}_q s +$$

$$\frac{1+At-A\eta-t}{1-A\eta}\phi[u,v] = \left(1-\frac{t(1-A)}{1-A\eta}\right)\phi[u,v] + \int_0^1 G_{\alpha,A}(t,qs) h(s)\,\mathrm{d}_q s. \tag{3}$$

式(3)中的 $G_{\alpha,A}(t,qs)$ 是如下形式:

$$G_{\alpha,A}(t,qs) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-qs)^{(\alpha-1)} t}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)},\ 0 \leqslant \max\{\eta,t\} < qs \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{(1-qs)^{(\alpha-1)} t - (t-qs)^{(\alpha-1)}(1-A\eta)}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)},\ 0 \leqslant \eta < qs \leqslant t \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{[(1-qs)^{(\alpha-1)} - (\eta-qs)^{(\alpha-1)} A]t}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)},\ 0 \leqslant t \leqslant qs \leqslant \eta \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{[(1-qs)^{(\alpha-1)} - (\eta-qs)^{(\alpha-1)} A]t - (t-qs)^{(\alpha-1)}(1-A\eta)}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)},\ 0 \leqslant qs \leqslant \min\{t,\eta\} \leqslant 1. \end{cases}$$

证明 设 $u(t)$ 是边值问题(2) 的解.根据性质 1,可得

$$u(t)=-\int_0^t \frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_q s+c_0+c_1 t. \tag{4}$$

由边值条件 $u(0)=\phi[u,v]$,可得 $c_0=\phi[u,v]$.再由边值条件 $u(1)=Au(\eta)$ 可得

$$c_1=\frac{1}{1-A\eta}\int_0^1 \frac{(1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_q s-\frac{A}{1-A\eta}\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_q s-\frac{1-A}{1-A\eta}\phi[u,v].$$

将 c_1 代入式(4) 可得到式(3).

为了证明系统(1) 解的唯一性和存在性,对两个 Banach 空间 $X=C([0,1],\mathbf{R})$ 和 $Y=C([0,1],\mathbf{R})$ 分别赋范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$ 和 $\|y\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|y(t)|$,则空间 $X\times Y$ 也是 Banach 空间.在 $X\times Y$ 上赋范数 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$,再定义一个度量:$d((x,y),(\bar{x},\bar{y}))=\|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|:=\begin{bmatrix}\|x-\bar{x}\|\\ \|y-\bar{y}\|\end{bmatrix}$,则 $(X\times Y,d)$ 是一个完备的广义度量空间.

由定理 1,得系统(1) 与下列方程组等价:

$$\begin{cases} u(t)=\left(1-\dfrac{t(1-A)}{1-A\eta}\right)\phi[u,v]+\displaystyle\int_0^1 G_{\alpha,A}(t,qs)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}_q s,\ t=[0,1];\\ v(t)=\left(1-\dfrac{t(1-B)}{1-B\xi}\right)\varphi[u,v]+\displaystyle\int_0^1 G_{\beta,B}(t,qs)g(s,u(s),v(s))\mathrm{d}_q s,\ t=[0,1]. \end{cases}$$

上式中的 $G_{\alpha,A}(t,qs)$ 与定理 1 相同,且 $G_{\beta,B}(t,qs)$ 是如下形式:

$$G_{\beta,B}(t,qs)=$$
$$\begin{cases} \dfrac{(1-qs)^{(\beta-1)}t}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)},\ 0\leqslant \max\{\xi,t\}<qs\leqslant 1;\\ \dfrac{(1-qs)^{(\beta-1)}t-(t-qs)^{(\beta-1)}(1-B\xi)}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)},\ 0\leqslant \xi<qs\leqslant t\leqslant 1;\\ \dfrac{[(1-qs)^{(\beta-1)}-(\eta-qs)^{(\beta-1)}B]t}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)},\ 0\leqslant t\leqslant qs\leqslant \xi\leqslant 1;\\ \dfrac{[(1-qs)^{(\beta-1)}-(\eta-qs)^{(\beta-1)}B]t-(t-qs)^{(\beta-1)}(1-B\xi)}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)},\ 0\leqslant qs\leqslant \min\{t,\xi\}\leqslant 1. \end{cases}$$

很显然,$\max\limits_{t\in[0,1]}\{G_{\alpha,A}(t,qs)\}=\dfrac{(1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)}$,$\max\limits_{t\in[0,1]}\{G_{\beta,B}(t,qs)\}=\dfrac{(1-qs)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}$,$s\in[0,1]$.

下面定义如下 4 个算子 $F_1,F_2,G_1,G_2:X\times Y\to X\times Y$,即:

$$F_1(u,v)(t)=\left(1-\frac{t(1-A)}{1-A\eta}\right)\phi[u,v],$$

$$F_2(u,v)(t)=\left(1-\frac{t(1-B)}{1-B\xi}\right)\varphi[u,v];$$

$$G_1(u,v)(t)=\int_0^1 G_{\alpha,A}(t,qs)f(t,u(s),v(s))\mathrm{d}_q s,$$

$$G_2(u,v)(t)=\int_0^1 G_{\beta,B}(t,qs)g(t,u(s),v(s))\mathrm{d}_q s.$$

在此基础上定义一个新的算子 $T=F+G$,其中 $F=(F_1,F_2)$,$G=(G_1,G_2)$,则证明系统(1) 解的存在性问题转化为算子 T 是否具有不动点问题.

定理 2 设(H_1) 和(H_2) 成立,即:

$$(\mathrm{H}_1)\ \begin{cases}|\phi[u_1,v_1]-\phi[u_2,v_2]|\leqslant K'_\phi|u_1(t)-u_2(t)|+K''_\phi|v_1(t)-v_2(t)|;\\ |\varphi[u_1,v_1]-\varphi[u_2,v_2]|\leqslant K'_\varphi|u_1(t)-u_2(t)|+K''_\varphi|v_1(t)-v_2(t)|.\end{cases}$$

其中对于一切的 $u_1,v_1,u_2,v_2\in C([0,1],\mathbf{R})$,$K'_\phi,K'_\varphi,K''_\phi,K''_\varphi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

$$(\mathrm{H}_2)\begin{cases}|\phi[u,v]|\leqslant K'''_{\phi}|u(t)|+K''''_{\phi}|v(t)|+M_{\phi};\\ |\varphi[u,v]|\leqslant K'''_{\varphi}|u(t)|+K''''_{\varphi}|v(t)|+M_{\varphi}.\end{cases}$$

其中对于一切的 $u,v\in C([0,1],\mathbf{R})$, $M_{\phi},M_{\varphi},K'''_{\phi},K'''_{\varphi},K''''_{\phi},K''''_{\varphi}>0$.

则算子 F 满足:

1) $\|F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)\|\leqslant K\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|$;

2) $\|F(u,v)\|\leqslant C\|(u,v)\|+M,\ \forall(u,v)\in X\times Y$.

其中 $C=2\max\{K'''_{\phi},K'''_{\varphi},K''''_{\phi},K''''_{\varphi}\}$, $M=2\max\{M_{\phi},M_{\varphi}\}$, $K=2\max\{K'_{\phi},K'_{\varphi},K''_{\phi},K''_{\varphi}\}\in(0,1)$.

证明　对于一切 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in X\times Y$,有

$$\|F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)\|=\|(F_1(u_1,v_1)-F_1(u_2,v_2),F_2(u_1,v_1)-F_2(u_2,v_2))\|\leqslant$$
$$K\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|)=K\|(u_1,u_2)-(v_1,v_2)\|,$$

因此可知算子 F 满足结论 1).

下证算子 F 也满足结论 2). 事实上,对于一切 $(u,v)\in X\times Y$,有

$$\|F(u,v)\|=\|(F_1(u,v),F_2(u,v))\|=\|F_1(u,v)\|+\|F_2(u,v)\|\leqslant$$
$$\|\phi[u,v]\|+\|\varphi[u,v]\|\leqslant C\|(u,v)\|+M.$$

定理 3　设 (H_3) 和 (H_4) 成立,即:

$$(\mathrm{H}_3)\begin{cases}|f(t,u,v)|\leqslant A_1|u|+A_2|v|+M_f,\\ |g(t,u,v)|\leqslant B_1|u|+B_2|v|+M_g,\end{cases}$$

其中对于 $u,v\in\mathbf{R}$, $A_i,B_i(i=1,2)$, M_f 和 M_g 都是正实数.

$$(\mathrm{H}_4)\begin{cases}|f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant L_{\phi}(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|),\\ |g(t,u,v)-g(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant L_{\varphi}(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|),\end{cases}$$

其中对于一切的 $u,v,\bar{u},\bar{v}\in\mathbf{R}$, L_{ϕ} 和 L_{φ} 是正实数.

则 G 是连续算子且满足

$$\|G(u,v)\|\leqslant\Delta\|(u,v)\|+\Lambda,\ \forall(u,v)\in X\times Y.$$

其中 $\Delta=\theta(A_3+B_3)$, $\Lambda=\theta(M_f+M_g)$, $\theta=\max\{\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)(1-A\eta)},\frac{1}{\Gamma_q(\beta+1)(1-B\xi)}\}$, $A_3=\max\{A_1,A_2\}$, $B_3=\max\{B_1,B_2\}$.

证明　记 $U_r=\{\|(u,v)\|\leqslant r,(u,v)\in X\times Y,r\in\mathbf{R}\}$. 首先证明 G 是连续算子. 事实上,在 U_r 上任取一点列 $\{(x_n,y_n)\}$,满足 $(x_n,y_n)\to(x,y)\ (n\to\infty)$,其中 $(x,y)\in U_r$. 以下证明 $\|G(x_n,y_n)-G(x,y)\|\to 0\ (n\to\infty)$,为此需要证 $\|G_1(x_n,y_n)-G_1(x,y)\|\to 0\ (n\to\infty)$. 事实上,

$$|G_1(x_n,y_n)(t)-G_1(x,y)(t)|=\left|\int_0^1 G_{\alpha,A}(t,qs)(f(t,x_n(s),y_n(s))-f(t,x(s),y(s)))\mathrm{d}_qs\right|\leqslant$$
$$\left|\int_0^1 G_{\alpha,A}(t,qs)L_{\phi}(|x_n(t)-x(t)|+|y_n(t)-y(t)|)\mathrm{d}_qs\right|\leqslant\frac{L_{\phi}(\|x_n-x\|+\|y_n-y\|)}{\Gamma_q(\alpha+1)(1-A\eta)},$$

进而有 $\|G_1(x_n,y_n)-G_1(x,y)\|\leqslant\frac{L_{\phi}(\|x_n-x\|+\|y_n-y\|)}{\Gamma_q(\alpha+1)(1-A\eta)}$. 当 $(x_n,y_n)\to(x,y)\ (n\to\infty)$ 时,有 $\|G_1(x_n,y_n)-G_1(x,y)\|\to 0\ (n\to\infty)$. 同理可证 $\|G_2(x_n,y_n)-G_2(x,y)\|\to 0\ (n\to\infty)$. 从而 G 是连续算子.

由 (H_3) 知,对 $(u,v)\in X\times Y$,有

$$\|G_1(u,v)\|\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G_{\alpha,A}(t,qs)(A_1|u(t)|+A_2|v(t)|+M_f)\mathrm{d}_qs\right|\leqslant\frac{A_1\|u\|+A_2\|v\|+M_f}{\Gamma_q(\alpha+1)(1-A\eta)}.$$

同理可得 $\|G_2(u,v)\|\leqslant\frac{B_1\|u\|+B_2\|v\|+M_g}{\Gamma_q(\beta+1)(1-B\xi)}$. 从而

$$\|G(u,v)\|=\|G_1(u,v)\|+\|G_2(u,v)\|\leqslant\Delta\|(u,v)\|+\Lambda,\ \forall(u,v)\in X\times Y.$$

定理 4 设(H_1)—(H_4)成立,则 G 是紧算子.

证明 在 U_r 中任取一点(u,v),由定理 3 得$\|G(u,v)\|\leqslant\Delta\|(u,v)\|+\Lambda\leqslant\Delta r+\Lambda$,从而知 $G(U_r)$ 是有界的. 下面证 G 是等度连续的算子. 对于$(u,v)\in U_r$, $t_1,t_2\in[0,1]$ 且 $t_1>t_2$ 有

$$\left|G_1(u,v)(t_1)-G_1(u,v)(t_2)\right|=$$

$$\left|\frac{(t_1-t_2)}{1-A\eta}\int_0^1\frac{(1-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f(s,u,v)\mathrm{d}_qs-\frac{A(t_1-t_2)}{1-A\eta}\int_0^\eta\frac{(\eta-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f(s,u,v)\mathrm{d}_qs+\right.$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f(s,u,v)\mathrm{d}_qs-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-qs)^{(\alpha-1)}-(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}f(s,u,v)\mathrm{d}_qs\right|.$$

于是当 $t_1\to t_2$ 时, $\left|G_1(u,v)(t_1)-G_1(u,v)(t_2)\right|\to 0$. 同理可证 $\left|G_2(u,v)(t_1)-G_2(u,v)(t_2)\right|\to 0$. 从而$\left|G(u,v)(t_1)-G(u,v)(t_2)\right|\to 0$. 因此,$G(U_r)$ 是等度连续的. 再由引理 1 知,$G(U_r)$ 是紧的.

定理 5 设(H_1)—(H_4)成立. 当 $r>\dfrac{M+\Lambda}{1-(C+\Delta)}$ 时,系统(1) 至少存在一个解$(u,v)\in U_r$,其中 $U_r=\{\|(u,v)\|\leqslant r,(u,v)\in X\times Y\}$.

证明 首先证明 $T(U_r)\subseteq U_r$. 事实上,对 $\forall(u,v)\in U_r$,有

$$\|T(u,v)\|=\|F(u,v)\|+\|G(u,v)\|\leqslant C\|(u,v)\|+M+\Delta\|(u,v)\|+\Lambda\leqslant$$
$$(C+\Delta)\|(u,v)\|+(M+\Lambda)\leqslant r,$$

因此 $T(U_r)\subseteq U_r$. 对于$(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in X\times Y$,由定理 2 知

$$\|F(u_1,v_1)-F(u_2,v_2)\|\leqslant K\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|,$$

其中 $K\in(0,1)$. 由此可知,F 是压缩算子. 下面证明 $G(U_r)$ 是一致有界的. 事实上,对 $\forall(u,v)\in U_r$,由定理 3 得$\|G(u,v)\|\leqslant\Delta\|(u,v)\|+\Lambda\leqslant\Delta r+\Lambda$,因此 $G(U_r)$ 是一致有界的. 再由定理 3 和定理 4 知,G 是连续且等度连续的算子,因此 G 是全连续算子. 由引理 2 知,系统(1) 在 U_r 至少有一个解.

定理 6 设(H_1)—(H_4)成立. 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}K'_\phi+\dfrac{L_\phi}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)} & K''_\phi+\dfrac{L_\phi}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)}\\[2ex] K'_\varphi+\dfrac{L_\varphi}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)} & K''_\varphi+\dfrac{L_\varphi}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}\end{bmatrix},$$

且满足条件:

(H_5) $(K'_\phi+K'_\varphi)+\dfrac{L_\phi\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)+L_\varphi\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}<1,$

$$(K''_\phi+K''_\varphi)+\frac{L_\phi\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)+L_\varphi\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}<1.$$

则系统(1) 存在唯一解.

证明 对于$(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in X\times Y$,由定理 2 知:

$$\|F_1(u_1,v_1)-F_1(u_2,v_2)\|\leqslant K'_\phi\|u_1-u_2\|+K''_\phi\|v_1-v_2\|;$$
$$\|F_2(u_1,v_1)-F_2(u_2,v_2)\|\leqslant K'_\varphi\|u_1-u_2\|+K''_\varphi\|v_1-v_2\|.$$

类似定理 3 的证明,可得:

$$\|G_1(u_1,v_1)-G_1(u_2,v_2)\|\leqslant\frac{L_\phi(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)};$$

$$\|G_2(u_1,v_1)-G_2(u_2,v_2)\|\leqslant\frac{L_\varphi(\|u_1-u_2\|+\|v_1-v_2\|)}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}.$$

由以上可得

(下转第 178 页)

sign, implementation, and evaluation of a microcomputer based portable arrhythmia monitor[J]. Med Biol Eng Comput, 1984,22:151-159.

[2] Jain S, Ahirwal M K, A Kumar A. QRS detection using adaptive filters: a comparative study[J]. Isa Trans, 2016,66:362-375.

[3] Pandit D, Zhang L, Liu C. A light weight QRS detector for single lead ECG signals using a max-min difference algorithm[J]. Computer Methods & Programs in Biomedicine, 2017,144:61-75.

[4] 朱芳,李淮江,姜恩华.心电信号预处理数字滤波器的设计与分析[J].淮北师范大学学报(自然科学版),2017,38(1):36-40.

[5] Ifeachor E C, Jervis B W. Digital Signal Processing: A Practical Approach[M]. 2nd Edition. California: Academic Press Inc Elsevier Science, 2002.

[6] 尚宇,徐婷,何永辉.分数阶傅里叶变换在心电信号处理中的应用[J].电子科技,2011,24(8):116.

[7] Rahman M Z U, Shaik R A, Reddy D V. Efficient and simplified adaptive noise cancelers for ECG sensor based remote health monitoring[J]. IEEE Sensors Journal, 2012,12(3):566-573.

[8] Eielsen A A, Teo Y R, Fleming A J. Improving Robustness Filter Bandwidth in Repetitive Control by Considering Model Mismatch[J]. Asian Journal of Control, 2016,19(4):1-11.

[9] Sharma T, Sharma K K. A new method for QRS detection in ECG signals using QRS-preserving filtering techniques[J]. Biomedizinische Technik Biomedical Engineering, 2017,63(2):207-217.

[10] Ristovski A, Guseva A, Gusev M. Visualization in the ECG QRS detection algorithms[C]//International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics. Opatija: IEEE Conferences, 2016:202-207.

[11] 徐效文,曾超,崔松野.MIT-BIH 数据库心电数据重采样研究[J].计算机工程与应用,2011,47(8):245-248.

(上接第 108 页)

$$\|T(u_1,v_1)-T(u_2,v_2)\|=$$
$$\begin{bmatrix}\|F_1(u_1,v_1)+G_1(u_1,v_1)-F_1(u_2,v_2)-G_1(u_2,v_2)\|\\ \|F_2(u_1,v_1)+G_2(u_1,v_1)-F_2(u_2,v_2)-G_2(u_2,v_2)\|\end{bmatrix}\leqslant$$
$$\begin{bmatrix}\left(K'_\phi+\dfrac{L_\phi}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)}\right)\|u_1-u_2\|+\left(K''_\phi+\dfrac{L_\phi}{\Gamma_q(\alpha)(1-A\eta)}\right)\|v_1-v_2\|\\ \left(K'_\varphi+\dfrac{L_\varphi}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}\right)\|u_1-u_2\|+\left(K''_\varphi+\dfrac{L_\varphi}{\Gamma_q(\beta)(1-B\xi)}\right)\|v_1-v_2\|\end{bmatrix}\leqslant \boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\|u_1-u_2\|\\ \|v_1-v_2\|\end{bmatrix}.$$

由(H_5)及性质 2 知,矩阵 $\boldsymbol{M}$ 收敛于零矩阵.再由引理 3 知,系统(1)有唯一解.

参考文献:

[1] Ricardo Almeida, Natalia Martins. Existence results for factional q-difference equations of order $\alpha\in[2,3]$ with three-point boundary conditions[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2014,19:1675-1685.

[2] Graef J R, Kong Lingju. Positive solutions for a class of higher order boundary value problems with fractional q-derivatives[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012,218:9682-9689.

[3] 孙明哲,韩筱爽.一类分数阶差分边值问题的正解[J].延边大学学报(自然科学版),2013,39(4):252-255.

[4] Fan Chengtao, Ge Qi. Existence of solutions for fractional q-difference equations with nonlocal and sub-strip type fractional boundary condition[J]. Mathematica Aeterna, 2016,6(3):427-445.

[5] Yu Changlong, Wang Jufang. Existence of positive solutions for nonlinear second-order q-difference equations with first-order q-derivatives[J]. Advances in Difference Equations, 2013,124:1-11.

[6] Bolo N O, Infante G, Precup R. Existence results for systems with coupled non-local initial conditions[J]. Nonlinear Analysis, 2014,94(1):231-242.

[7] Kamal Shah, Amjad Ali, Rahmat Kahn. Degree theory and existence of positive solutions to coupled systems of multi-point boundary valued problems[J]. Boundary Value Problems, 2016,43:1-12.

[8] 葛琦,侯成敏.一类有序分数阶 q-差分方程解的存在性[J].吉林大学学报(理科版),2015,53(3):377-382.