文章编号：1004-4353(2018)02-0095-08

Bregman 广义弱相对非扩张与均衡问题的强收敛定理及其应用

朱胜[1]， 黄建华[2]， 陈丽君[1]
(1.福建农林大学 金山学院，福建 福州 350108；2.福州大学 数学与计算机科学学院，福建 福州 350116)

摘要： 在自反的 Banach 空间中，引入 Bregman 广义弱相对非扩张映射概念，针对均衡问题和 Bregman 广义弱相对非扩张映射的不动点问题的公共解，构造了一种新的迭代算法，并在适当的条件下得到了该算法的强收敛性. 最后，将本文结论应用在极大单调算子的零点问题上.

关键词： Bregman 广义弱相对非扩张；不动点问题；均衡问题
中图分类号： O177.91　　**文献标识码：** A

Strong convergence theorems and its applications for equilibrium problems and Bregman generalized weak relatively nonexpansive mapping

ZHU Sheng[1]， HUANG Jianhua[2]， CHEN Lijun[1]
(1. *Jinshan College, Fujian Agriculture and Forest University, Fuzhou* 350108, *China*;
2. *College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou* 350116, *China*)

Abstract: In this paper, we introduce a concept of generalized weak relatively nonexpansive mapping and construct a new algorithms for finding a common solution to equilibrium problem and fixed point of the mapping that generalize the concept of nonexpansivity in reflexive real Banach spaces. Moreover, the strong convergence of the proposed algorithms is proved under appropriate conditions. Finally, the application to zero point problem of maximal monotone operators is given by the result.

Keywords: Bregman generalized weak relatively nonexpansive; fixed point problem; equilibrium problem

0　引言

1994 年 Blum 等[1]首次研究了均衡问题(EP)，即求 $x \in C$，使得 $g(x,y) \geqslant 0$，$\forall\, y \in C$，其中 $g: C \times C \to R$ 为一个二元函数，记均衡问题的解集为(EP). 在最优化、投资决策、经济模型、最优控制和工程技术等领域中，许多实际问题的描述都可归结为均衡问题. 由于均衡问题与不动点问题联系十分紧密，因此均衡问题与不动点问题的公共元问题就成为非线性领域中的重要研究课题之一. 在研究算子不动点问题时，一些算子的非扩张性会随空间结构的改变而发生变化，如有些算子在 Hilbert 空间中是非扩张的，而在 Banach 空间中却不是非扩张的. 2016 年，沈金良等[2]在 Hilbert 空间中，对均衡问题与渐进非扩张映射不动点问题的公共解问题提出了如下算法：

收稿日期： 2018－05－12　　**基金项目：** 福建省中青年教师教育科研项目(JAT170889)
作者简介： 朱胜(1990—)，男，助教，研究方向为非线性分析.

$$\begin{cases} g(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle \geqslant 0,\forall y\in C, \\ x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)(T^n u_n-\lambda_n\mu f(T^n u_n)), \end{cases}$$

并证明了迭代序列强收敛到 $\mathrm{proj}^f_{F(T)\cap \mathrm{EP}(g)}x_0$. 同年,朱胜等[3] 在自反的 Banach 空间中,研究了 Bregman 弱相对非扩张映象与均衡问题的公共解,并证明了迭代序列强收敛到 $\mathrm{proj}^f_{F(T)\cap EP(g)}x_0$. 受上述工作的启发,本文针对均衡问题和Bregman广义弱相对非扩张映射的不动点问题的公共解,构造Bregman投影算法,在适当的条件下得到了强收敛定理,并将所得的结果应用到极大单调算子的零点问题上.

1　预备知识

设 E 为实自反的Banach空间,E^*为其对偶空间,E的范数记为$\|\cdot\|$,E与E^*的配对记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$,$f:E\to(-\infty,+\infty]$是真的实值函数,$f$ 的 Fenchel 共轭函数 $f^*:E^*\to(-\infty,+\infty]$ 定义为 $f^*(x^*)=\sup\{\langle x^*,x\rangle-f(x):x\in E\}$, $x^*\in E^*$.

记 f 的有效域为 $\mathrm{dom}f=\{x\in E, f(x)<\infty\}$, f 的有效域内部为 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$. 对任意的 $x\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$ 与 $y\in E$,定义 f 在方向 y 的右导数如下:

$$f^0(x,y):=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}.$$

若对任意的 $y\in E$,极限存在,则称 f 在 x 上是 Gâteaux 可微. 此时,$f^0(x,y)$ 与 f 在 x 梯度值 $\nabla f(x)$ 上是一致的. 若 f 对任意的 $x\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$ 是 Gâteaux 可微,则称 f 是 Gâteaux 可微. 若上式极限关于 $\|y\|=1$ 一致存在,称 f 在 x 处是 Fenchel 可微. 若上式极限关于 $x\in C$ 与 $\|y\|=1$ 一致存在,称 f 在 E 的子集 C 上是一致 Fenchel 可微.

文献[4]给出了 Legendre 函数 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 的概念,即 f 是 Legendre 函数当且仅当它满足下列条件:

1) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)\neq\varnothing$, f 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$ 上是 Gâteaux 可微,且 $\mathrm{dom}\nabla f=\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$;

2) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)\neq\varnothing$, f^* 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}f^*)$ 上是 Gâteaux 可微,且 $\mathrm{dom}\nabla f^*=\mathrm{int}(\mathrm{dom}f^*)$.

注 1　如果 E 为实自反的 Banach 空间,f 为 Legendre 函数[5],则:

a) f 为 Legendre 函数当且仅当 f^* 为 Legendre 函数;

b) $(\partial f)^{-1}=\partial f^*$;

c) $\nabla f=(\nabla f^*)^{-1}$, $\mathrm{ran}\nabla f=\mathrm{dom}\nabla f^*=\mathrm{int}(\mathrm{dom}f^*)$; $\mathrm{ran}\nabla f^*=\mathrm{dom}\nabla f=\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$,其中 $\mathrm{ran}f$ 表示 f 的值域;

d) f 和 f^* 在各自的有效域内部是严格凸的.

定义 1[6]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为凸的 Gâteaux 可微函数,称 $D_f:\mathrm{dom}f\times\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)\to[0,+\infty)$ 为关于 f 的 Bregman 距离

$$D_f(y,x):=f(y)-f(x)-\langle\nabla f(x),y-x\rangle.$$

易知,D_f 不满足对称性质和三角不等式性质,故 Bregman 距离并不是真正实际意义上的距离. 当 f 为 Legendre 函数[4] 时,$D_f(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

定义 2[7]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数,点 $x\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$ 到非空闭凸子集 $C\subset\mathrm{dom}f$ 上的 Bregman 投影为唯一的向量 $\mathrm{proj}^f_C(x)\in C$,满足

$$D_f(\mathrm{proj}^f_C(x),x)=\inf\{D_f(y,x):y\in C\}.$$

定义 3[8]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数,称 f 是:

1) 在 $x\in\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$ 全局凸的,若它在 x 的总体凸性模是正的,其中 f 在 x 的总体凸性模 $v_f:\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 定义为

$v_f(x,t) := \inf\{D_f(y,x): y \in \mathrm{dom} f, \|y-x\|=t\}, \forall t > 0$；

2）全局凸的，若对 $\forall x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$，$f$ 在 x 处都是总体凸的；

3）在有界集上全局凸的，若对 E 的任何非空有界子集 B 和 $t > 0$，$v_f(B,t)$ 均为正数，其中 $v_f(B,t) := \inf\{v_f(x,t): x \in B \cap \mathrm{dom} f\}$ 为 f 在集合 B 上的全局凸性模.

引理 1[8]　称 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 是序列一致的，如果对 E 中任意两个序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 和 $\{y_n\} \subset \mathrm{dom} f$，当 $\{x_n\}$ 有界且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} D_f(y_n, x_n) = 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$ 成立. f 在有界集上是全局凸的当且仅当 f 是序列一致的.

引理 2[9]　设 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 是一致 Fenchel 可微的，且在 E 的有界子集上是有界的，则 f 在 E 的有界子集上是一致连续的，且 $\nabla f: E$ 的强拓扑 $\to E^*$ 的强拓扑在 E 的有界子集上是一致连续的.

引理 3[10]　设 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 是 Gâteaux 可微的全局凸函数. 取 $x_0 \in E$，如果序列 $\{D_f(x_n, x_0)\}$ 是有界的，则序列 $\{x_n\}$ 也是有界的.

引理 4[11]　设 $f: E \to (-\infty, +\infty]$ 为 Gâteaux 可微的凸函数且在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$ 上是全局凸的，$x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$，非空闭凸子集 $C \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$. 若 $z \in C$，则下列结论等价：

1）$z = \mathrm{proj}_C^f(x)$；

2）z 是变分不等式 $\langle \nabla f(x) - \nabla f(z), z - y\rangle \geqslant 0, \forall y \in C$ 的解；

3）z 是不等式 $D_f(y,z) + D_f(z,x) \leqslant D_f(y,x), \forall y \in C$ 的解.

定义 4　记 $F(T)$ 为 T 的不动点集，即 $F(T) = \{x \in C, Tx = x\}$；对任意序列 $\{x_n\} \subset C$，若 $\{x_n\}$ 弱收敛到 p 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$，则称 p 为 T 的渐近不动点；若 $\{x_n\}$ 强收敛到 p 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n - x_n\| = 0$，则称 p 为 T 的强渐近不动点；以 $\hat{F}(T)$ 和 $\widetilde{F}(T)$ 分别表示渐近不动点集和强渐近不动点集. 若令 $C \subset E$，称 $T: C \to C$ 为：

1）闭的，若对任意序列 $\{x_n\} \subset C$，满足 $x_n \to x \in C$ 且 $Tx_n \to y \in C\ (n \to \infty)$，则 $Tx = y$.

2）弱相对非扩张的，若 $\widetilde{F}(T) = F(T) \neq \varnothing$ 且有 $\varphi(p, Tx) \leqslant \varphi(p, x), \forall x \in C, p \in F(T)$.

3）Bregman 相对非扩张的，若 $\hat{F}(T) = F(T) \neq \varnothing$ 且有 $D_f(p, Tx) \leqslant D_f(p, x), \forall x \in C, p \in F(T)$.

4）Bregman 弱相对非扩张的，若 $\widetilde{F}(T) = F(T) \neq \varnothing$ 且有 $D_f(p, Tx) \leqslant D_f(p, x), \forall x \in C, p \in F(T)$.

5）Bregman 广义弱相对非扩张的，若存在序列 $\{k_n\} \subseteq [0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$ 且 $F(T) \neq \varnothing$，有 $D_f(p, Tx) \leqslant D_f(p, x) + k_n D_f(x, Tx), \forall x \in C, p \in F(T)$.

注 2　容易看出，Bregman 相对非扩张和 Bregman 弱相对非扩张都是 Bregman 广义弱相对非扩张的，即 Bregman 广义弱相对非扩张比 Bregman 相对非扩张和 Bregman 弱相对非扩张是更为一般的算子.

例 1　设 E 为光滑 Banach 空间. 定义 $T: E \to E$，$f: E \to R$，满足 $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$，$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}x_0, & x = \frac{1}{n}x_0; \\ -\frac{1}{2}x, & x \neq \frac{1}{n}x_0, \end{cases}$ 其中 $x_0 \neq 0$，则 T 是 Bregman 广义弱相对非扩张映射.

证明　由定义知 f 是真凸下半连续的，$F(T) = \{0\}$. 易知 $\nabla f(x) = Jx$，且有 $J(\alpha x) = \alpha Jx$. 当 $x = \frac{1}{n}x_0$ 时，有

$$D_f(0, Tx) = f(0) - f(Tx) - \langle \nabla f(Tx), 0 - Tx\rangle =$$

$$-f\left(\frac{1}{n+1}x_0\right) - \left\langle \nabla f\left(\frac{1}{n+1}x_0\right), 0 - \frac{1}{n+1}x_0\right\rangle = -f\left(\frac{n}{n+1}x\right) - \left\langle \nabla f\left(\frac{n}{n+1}x\right), 0 - \frac{n}{n+1}x\right\rangle =$$

$$-(\frac{n}{n+1})^2 f(x)-\langle J(\frac{n}{n+1}x),0-\frac{n}{n+1}x\rangle=-(\frac{n}{n+1})^2 f(x)-(\frac{n}{n+1})^2\langle J(x),0-x\rangle=$$
$$(\frac{n}{n+1})^2[-f(x)-\langle\nabla f(x),0-x\rangle]=(\frac{n}{n+1})^2 D_f(0,x)\leqslant D_f(0,x)\leqslant$$
$$D_f(0,x)+k_n D_f(x,Tx).$$

同理,当 $x\neq\frac{1}{n}x_0$ 时,也可得 $D_f(0,Tx)\leqslant D_f(0,x)+k_n D_f(x,Tx)$. 因此 T 是Bregman广义弱相对非扩张映射.

假设1 设 C 是一致凸和一致光滑的Banach空间 E 的非空闭凸子集,映射 $g:C\times C\to R$ 为满足以下条件的二元函数:

C1) $g(x,x)=0$, $\forall x\in C$;

C2) g 是单调的,即 $g(x,y)+g(y,x)\leqslant 0$, $\forall x,y\in C$;

C3) $\forall x,y,z\in C$, $\limsup\limits_{t\to 0^+} g(tz+(1-t)x,y)\leqslant g(x,y)$;

C4) $\forall x\in C$, $g(x,\cdot)$ 是下半连续的凸函数.

定义5[12] 设 $g:C\times C\to R$ 是二元函数,g 的预算子 $\mathrm{Res}_g^f:E\to 2^C$ 定义为:

$$\mathrm{Res}_g^f(x)=\{z\in C: g(z,y)+\langle\nabla f(z)-\nabla f(x),y-z\rangle\geqslant 0,\forall y\in C\}.$$

引理5[9] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是强制的(即 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)/\|x\|=+\infty$)Legendre函数,非空闭凸子集 $C\subset\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$, $g:C\times C\to R$ 为满足假设1中条件C1)—C4)的二元函数,则有如下结论成立:

1) Res_g^f 是单值的且 $\mathrm{dom}(\mathrm{Res}_g^f)=E$;

2) Res_g^f 是Bregman稳定非扩张映射;

3) $EP(g)$ 是 C 的闭凸子集,且 $EP(g)=F(\mathrm{Res}_g^f)$;

4) $\forall x\in E$, $u\in F(\mathrm{Res}_g^f)$,有 $D_f(u,\mathrm{Res}_g^f x)+D_f(\mathrm{Res}_g^f x,x)\leqslant D_f(u,x)$.

引理6[13] 设 $f:E\to R$ 是Legendre函数且 ∇f^* 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$ 的有界子集上是有界的,取 $x\in E$,如果序列 $\{D_f(x,x_n)\}$ 是有界的,则序列 $\{x_n\}$ 也是有界的.

引理7 设 C 是实自反的Banach空间 E 的非空闭凸子集,$f:E\to R$ 是一致Fenchel可微的和全局凸的,且在 E 的有界子集上是有界的Legendre函数,$T:C\to C$ 是Bregman广义弱相对非扩张映射,则 $F(T)$ 是 C 的闭凸子集.

证明 首先证明 $F(T)$ 是凸的.对于任意 $z_1,z_1\in F(T)$, $t\in(0,1)$,设 $z=tz_1+(1-t)z_2$,即证明 $z\in F(T)$.由定义4中的5)知:

$$D_f(p,Tx)\leqslant D_f(p,x)+k_n D_f(x,Tx),$$
$$f(p)-f(Tx)-\langle\nabla f(Tx),p-Tx\rangle\leqslant f(p)-f(x)-\langle\nabla f(x),p-x\rangle+$$
$$k_n[f(x)-f(Tx)-\langle\nabla f(Tx),x-Tx\rangle](1-k_n)f(x)+(k_n-1)f(Tx)+$$
$$k_n\langle\nabla f(Tx),x-Tx\rangle\leqslant\langle\nabla f(Tx),p-Tx\rangle-\langle\nabla f(x),p-x\rangle.$$

因为 $z_1,z_2\in F(T)$,于是有:

$$(1-k_n)f(x)+(k_n-1)f(Tx)+k_n\langle\nabla f(Tx),x-Tx\rangle\leqslant$$
$$\langle\nabla f(Tx),z_1-Tx\rangle-\langle\nabla f(x),z_1-x\rangle,\tag{1}$$
$$(1-k_n)f(x)+(k_n-1)f(Tx)+k_n\langle\nabla f(Tx),x-Tx\rangle\leqslant$$
$$\langle\nabla f(Tx),z_2-Tx\rangle-\langle\nabla f(x),z_2-x\rangle.\tag{2}$$

在式(1)左右两端乘以 t,式(2)左右两端乘以 $(1-t)$,然后两式进行相加得

$$(1-k_n)f(x)+(k_n-1)f(Tx)+k_n\langle\nabla f(Tx),x-Tx\rangle\leqslant\langle\nabla f(Tx),z-Tx\rangle-\langle\nabla f(x),z-x\rangle.$$

即 $D_f(z,Tx)\leqslant D_f(z,x)+k_n D_f(x,Tx)$,于是有 $D_f(z,Tz)\leqslant D_f(z,z)+k_n D_f(z,Tz)$,从而有(1-

$k_n)D_f(z,Tz)\leqslant 0$. 其中 $k_n\in[0,1)$，则 $D_f(z,Tz)\leqslant 0$. 又因为 f 是 Legendre 函数，所以 $z=Tz$，即 $z\in F(T)$.

现证 $F(T)$ 是闭的. 设 $\{z_n\}\subseteq F(T)$，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$. 因为 $Tz_n=z_n\to z_n(n\to\infty)$，由于 T 是闭的，则有 $Tz=z$，即 $F(T)$ 是闭的.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 E 是实自反的 Banach 空间，$f:E\to R$ 是强制的 Legendre 函数，且在 E 的有界子集上是有界的、一致 Fenchel 可微的和全局凸的. 非空闭凸子集 $C\subset \mathrm{int}(\mathrm{dom}f)$，$T:C\to C$ 为 Bregman 广义弱相对非扩张有界闭映射. 设 $g:C\times C\to R$ 是满足假设 1 中 C1)—C4) 的二元函数及 $\Omega:=F(T)\cap EP(g)\neq\varnothing$. 序列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$\begin{cases}x_1=u\in C,\\ u_n=\mathrm{Res}_g^fTx_n,\\ C_n=\{z\in C: D_f(z,u_n)\leqslant D_f(z,x_n)+k_nD_f(x_n,Tx_n)\},\\ D_n=\bigcap_{i=1}^{n}C_i,\\ x_{n+1}=\mathrm{proj}_{D_n}^fu.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\{k_n\}\subseteq[0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$，$\mathrm{proj}_{D_n}^f$ 是 E 在 D_n 上的 Bregman 投影. 则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^*=\mathrm{proj}_{\Omega}^fu$.

证明　以下分 6 个步骤来完成此定理的证明.

第 1 步　证明对于任意的 $n\geqslant 1$，Ω 和 D_n 是闭凸集. 由引理 5 和引理 7，易得 $F(T)\cap EP(g)$ 是闭凸集，则 Ω 是闭凸集，因此 $\mathrm{proj}_{\Omega}^fu$ 有意义. 设 C_m 是闭凸集，则对于 $\forall z\in C_m$ 有

$$D_f(z,u_m)\leqslant D_f(z,x_m)+k_mD_f(x_m,Tx_m).\tag{4}$$

由 $D_f(\cdot)$ 的定义知，式(4) 等价于

$$(1+k_m)f(x_m)-f(u_m)-k_mf(Tx_m)-k_m\langle\nabla f(Tx_m),x_m-Tx_m\rangle\leqslant$$
$$\langle\nabla f(u_m),z-u_m\rangle-\langle\nabla f(x_m),z-x_m\rangle.$$

由上式易知 C_{m+1} 是闭凸集，因此 C_n 是闭凸集，进而知 D_n 也是闭凸集，$\mathrm{proj}_{D_n}^fu$ 有意义，序列 $\{x_n\}$ 可定义.

第 2 步　证明 $\Omega:=F(T)\cap EP(g)\subset D_n$. 假设 $\forall v\in\Omega$，由引理 5 和 $u_n=\mathrm{Res}_g^fTx_n$，可知

$$D_f(v,u_n)=D_f(v,\mathrm{Res}_g^fTx_n)\leqslant D_f(v,Tx_n)\leqslant D_f(v,x_n)+k_nD_f(x_n,Tx_n).\tag{5}$$

由式(5) 可知 $v\in C_n$，因此 $\Omega\subset C_n$. 又由于 $D_n=\bigcap_{i=1}^{n}C_i$，进而有 $\Omega\subset D_n$.

第 3 步　证明序列 $\{x_n\}$ 有界. 由引理 4 中的 3) 及 $x_{n+1}=\mathrm{proj}_{D_n}^fu$，可知对任意的 $v\in\Omega$ 有

$$D_f(x_{n+1},u)=D_f(\mathrm{proj}_{D_n}^fu,u)\leqslant D_f(v,u)-D_f(v,\mathrm{proj}_{D_n}^fu)\leqslant D_f(v,u),$$

所以序列 $\{D_f(x_n,u)\}$ 有界. 再由引理 3 知序列 $\{x_n\}$ 有界.

第 4 步　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$. 根据 $\{x_n\}$ 的定义可知 $x_{n+1}=\mathrm{proj}_{D_n}^fu$，$x_{n+2}=\mathrm{proj}_{D_{n+1}}^fu\in D_{n+1}\subset D_n$. 由引理 4 有 $D_f(x_{n+2},\mathrm{proj}_{D_n}^fu)+D_f(\mathrm{proj}_{D_n}^fu,u)\leqslant D_f(x_{n+2},u)$，即 $D_f(x_{n+2},x_{n+1})+D_f(x_{n+1},u)\leqslant D_f(x_{n+2},u)$，所以 $\{D_f(x_n,u)\}$ 是单调递增序列. 因为 $\{D_f(x_n,u)\}$ 有界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(x_n,u)$ 存在. 由于 D_n 是压缩的，对于任意的正整数 $m\geqslant n$，有 $D_m\subset D_n$. 由 $x_m=\mathrm{proj}_{D_{m-1}}^fu\in D_{m-1}\subset D_{n-1}$，可得

$$D_f(x_m,x_n)=D_f(x_m,\mathrm{proj}_{D_{n-1}}^fu)\leqslant D_f(x_m,u)-D_f(\mathrm{proj}_{D_{n-1}}^fu,u)=D_f(x_m,u)-D_f(x_n,u).\tag{6}$$

在式(6) 中令 $m,n\to\infty$，则可得

$$D_f(x_m,x_n)\to 0,\ m,n\to\infty.\tag{7}$$

式(7) 蕴含

$$\lim_{n\to\infty} D_f(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{8}$$

根据引理 1 的结论,可知

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0. \tag{9}$$

第 5 步 证明$\{x_n\}$强收敛于$\Omega := F(T) \cap EP(g)$中的某个点. 由式(9),不妨假设$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in C$.

首先,证明$x^* \in F(T)$. 因为$x_{n+1} = \mathrm{proj}_{D_n}^f u \in D_n \subset C_n$,所以

$$D_f(x_{n+1}, u_n) \leqslant D_f(x_{n+1}, x_n) + k_n D_f(x_n, Tx_n). \tag{10}$$

因为序列$\{x_n\}$有界,T有界,所以Tx_n也有界. 又因为f和∇f在有界子集上是有界的,所以$D_f(x_n, Tx_n)$有界. 再根据$\lim_{n\to\infty} k_n = 0$可知

$$\lim_{n\to\infty} k_n D_f(x_n, Tx_n) = 0. \tag{11}$$

由式(8)及式(11)知

$$\lim_{n\to\infty} D_f(x_{n+1}, u_n) = 0. \tag{12}$$

对于任意$v \in C_n$,有$D_f(v, u_n) \leqslant D_f(v, x_n) + k_n D_f(x_n, Tx_n)$,因此可知$D_f(v, u_n)$有界. 再由引理 6 知$\{u_n\}$有界. 根据式(12)及引理 1,可得

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - u_n \| = 0. \tag{13}$$

因为$\| x_n - u_n \| \leqslant \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - u_n \|$,于是可得

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - u_n \| = 0. \tag{14}$$

由引理 2 可知f是一致 Fenchel 可微的,且$\{x_n\}$及$\{u_n\}$有界,于是有

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(x_n) - \nabla f(u_n) \| = 0. \tag{15}$$

又因为f是一致连续的,所以有

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x_n) - f(u_n) \| = 0. \tag{16}$$

由$D_f(\cdot, \cdot)$的定义可知

$$\begin{aligned} D_f(v, x_n) - D_f(v, u_n) = {} & f(v) - f(x_n) - \langle \nabla f(x_n), v - x_n \rangle - [f(v) - f(u_n) - \langle \nabla f(u_n), v - u_n \rangle] = \\ & f(u_n) - f(x_n) + \langle \nabla f(u_n), v - u_n \rangle - \langle \nabla f(x_n), v - x_n \rangle = \\ & f(u_n) - f(x_n) + \langle \nabla f(u_n), x_n - u_n \rangle + \langle \nabla f(x_n) - \nabla f(x_n), v - x_n \rangle. \end{aligned}$$

因为$\{u_n\}$有界,所以$\nabla f(u_n)$有界. 结合式(14)—(16),则有

$$\lim_{n\to\infty} \{ D_f(v, x_n) - D_f(v, u_n) \} = 0. \tag{17}$$

对于$v \in EP(g) = F(\mathrm{Res}_g^f)$及$u_n = \mathrm{Res}_g^f Tx_n$,由引理 5 中的 4) 有

$$\begin{aligned} D_f(u_n, Tx_n) = D_f(\mathrm{Res}_g^f Tx_n, Tx_n) \leqslant D_f(v, Tx_n) - D_f(v, \mathrm{Res}_g^f Tx_n) \leqslant \\ D_f(v, x_n) + k_n D_f(x_n, Tx_n) - D_f(v, u_n). \end{aligned} \tag{18}$$

由式(11)和式(17),有$\lim_{n\to\infty} D_f(u_n, Tx_n) = 0$. 再由引理 1,得$\lim_{n\to\infty} \| u_n - Tx_n \| = 0$. 因为$f$是一致 Fenchel 可微的,由引理 2 有

$$\lim_{n\to\infty} \| \nabla f(u_n) - \nabla f(Tx_n) \| = 0. \tag{19}$$

因为$\| x_n - Tx_n \| \leqslant \| x_n - u_n \| + \| u_n - Tx_n \|$,可得$\lim_{n\to\infty} \| x_n - Tx_n \| = 0$. 注意到

$$\| x^* - Tx_n \| \leqslant \| x^* - x_n \| + \| x_n - Tx_n \|,$$

则有$\lim_{n\to\infty} \| x^* - Tx_n \| = 0$. 又因为$T$是闭的,可知$x^* \in F(T)$.

下面证明$x^* \in EP(g)$. 由$u_n = \mathrm{Res}_g^f Tx_n$和定义 5 知:

$$g(u_n, y) + \langle \nabla f(u_n) - \nabla f(Tx_n), y - u_n \rangle \geqslant 0, \forall y \in C.$$

由假设 1 中的条件 C2) 可得

$$\langle \nabla f(u_n) - \nabla f(Tx_n), y - u_n \rangle \geqslant - g(u_n, y) \geqslant g(y, u_n), \forall y \in C. \tag{20}$$

在式(20)中令 $n \to \infty$，再由假设 1 中的条件 C4）与式(19)有 $g(y, x^*) \leqslant 0, \forall y \in C$. 对于任意的 $y \in C$，取 $t \in (0,1]$. 令 $y_t = ty + (1-t)x^* \in C$，则有 $g(y_t, x^*) \leqslant 0$ 以及

$$0 = g(y_t, y_t) \leqslant tg(y_t, y) + (1-t)g(y_t, x^*) \leqslant tg(y_t, y). \tag{21}$$

由以上可知 $g(y_t, y) \geqslant 0$. 进一步可得 $0 \leqslant \limsup_{t \to 0^+} g(y_t, y) = \limsup_{t \to 0^+} g(ty + (1-t)x^*, y), \forall y \in C$，即证得 $x^* \in EP(g)$.

综合以上证明可得，$x^* \in \Omega := F(T) \cap EP(g)$.

第 6 步　$\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* = \mathrm{proj}_\Omega^f u$. 由 $x_{n+1} = \mathrm{proj}_{D_n}^f u$ 可知 $\langle \nabla f(u) - \nabla f(x_{n+1}), x_{n+1} - z \rangle \geqslant 0$，$\forall z \in D_n$. 因为 $\Omega \subset D_n$，所以

$$\langle \nabla f(u) - \nabla f(x_{n+1}), x_{n+1} - z \rangle \geqslant 0, \forall z \in \Omega. \tag{22}$$

在式(22)中令 $n \to \infty$，则有 $\langle \nabla f(u) - \nabla f(x^*), x^* - z \rangle \geqslant 0, \forall z \in \Omega$，即 $x^* = \mathrm{proj}_\Omega^f u$. 因此，序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* = \mathrm{proj}_\Omega^f u$. 证毕.

3　结果应用

当 E 为光滑的严格凸实自反 Banach 空间时，假设 $f(x) = \|x\|^2, \forall x \in E$，则 $\nabla f(x) = 2Jx$. 其中：$J: E \to 2^{E^*}$ 为正规对偶映射；Bregman 距离函数 $D_f(x, y)$ 退变为 Lyapunov 函数，即 $\varphi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2, \forall x, y \in E$；Bregman 投影 $\mathrm{proj}_C^f(x)$ 退变为广义投影 $\Pi_C(x)$，满足 $\varphi(\Pi_C(x), x) = \min_{y \in C} \varphi(y, x)$. 根据定理 1 可得推论 1.

推论 1　设 E 为光滑的严格凸实自反 Banach 空间，非空闭凸子集 $C \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$，$T: C \to C$ 为弱相对非扩张有界闭映射. 设 $g: C \times C \to R$ 是满足假设 1 中条件 C1)—C4) 的二元函数. 序列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$\begin{cases} x_1 = u \in C, \\ u_n = \mathrm{Res}_g^f T x_n, \\ C_n = \{z \in C : \varphi(z, u_n) \leqslant \varphi(z, x_n)\}, \\ D_n = \bigcap_{i=1}^n C_i, \\ x_{n+1} = \Pi_{D_n} u. \end{cases}$$

其中 $\Pi_{D_n}(x)$ 是 E 在 D_n 上的广义投影. 假定 $\Omega := F(T) \cap EP(g) \neq \varnothing$，则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* = \mathrm{proj}_\Omega^f u$.

3.1　极大单调算子的零点问题

设 E 为实自反 Banach 空间，映射 $A: E \to 2^{E^*}$ 是极大单调的，且 $A^{-1}(0) \neq \varnothing$，$f: E \to (-\infty, +\infty]$ 为一致 Fenchel 可微的，且在 E 有界子集上有界，则 A 相对于 f 的预解算子 $\mathrm{Res}_A^f(x) = (\nabla f + A)^{-1}$ 。$\nabla f(x)$ 是 Bregman 相对非扩张闭映射[9]，同时也是 Bregman 广义弱相对非扩张的. 因此，根据定理 1 可得以下结果.

定理 2　设 E 是实自反的 Banach 空间，$f: E \to R$ 是强制的 Legendre 函数，且在 E 的有界子集上是有界的、一致 Fenchel 可微的和全局凸的. 非空闭凸子集 $C \subset \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$，$\mathrm{Res}_A^f: E \to 2^E$ 为 Bregman 广义弱相对非扩张有界闭映射. 设 $g: C \times C \to R$ 是满足假设 1 中条件 C1)—C4) 的二元函数. 序列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$\begin{cases} x_1 = u \in C, \\ u_n = \mathrm{Res}_g^f \mathrm{Res}_A^f(x_n), \\ C_n = \{z \in C : D_f(z, u_n) \leqslant D_f(z, x_n) + k_n D_f(x_n, \mathrm{Res}_A^f(x_n))\}, \\ D_n = \bigcap_{i=1}^n C_i, \\ x_{n+1} = \mathrm{proj}_{D_n}^f u. \end{cases}$$

其中$\{k_n\} \subseteq [0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$，$\mathrm{proj}_{D_n}^f$ 是 E 在 D_n 上的 Bregman 投影. 假定 $\Omega := F(\mathrm{Res}_A^f) \cap EP(g) \neq \varnothing$，则序列$\{x_n\}$强收敛于 $x^* = \mathrm{proj}_\Omega^f u$.

参考文献：

[1] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Stud, 1994, 63:123-145.

[2] 沈金良,黄建华.渐进非扩张映射混合迭代序列的均衡问题和不动点问题[J].福州大学学报(自然科学版),2016,44(5):622-626.

[3] 朱胜,黄建华,万丙晟. Bregman 弱相对非扩张映象与均衡问题的强收敛定理[J].四川大学学报(自然科学版),2016,53(3):471-477.

[4] Bauschke H H, Borwein J M, Combettes P L. Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces[J]. Comm Contemp Math, 2001,3(4):615-647.

[5] Takahashi S, Takahashi W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. Math Anal Appl, 2007,331(1):506-518.

[6] Censor Y, Lent A. An iterative row-action method for interval convex programming[J]. Optim Theory Appl, 1981,34(3):321-353.

[7] Bregman L M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming[J]. USSR Comput Math Math Phys, 1967,7(3):200-217.

[8] Butnariu D, Iusem A N. Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization[M]. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[9] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 2010,73(1):122-135.

[10] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Banach spaces[J]. Numer Funct Anal Optim, 2010,31(1):22-44.

[11] Butnariu D, Resmerita E. Bregman distances, totally convex functions and a method for solving operator equations in Banach spaces[J]. Abstr Appl Anal, 2006,2006(3):1-39.

[12] Combettes P L, Hirstoaga S A. Equilibrium programming in Hilbert spaces[J]. Nonlinear Convex Anal, 2005,6(1):117-136.

[13] Kassay G, Reich S, Sabach S. Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces[J]. SIAM J Optim, 2011,21(4):1319-1344.