

文章编号: 1004-4353(2018)01-0049-05

# 具反馈控制和 Holling-III 的 修正 Leslie-Gower 捕食系统的持久性

余胜斌

( 阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015 )

**摘要:** 运用微分不等式研究了具有反馈控制变量和 Holling-III 型功能性反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统的持久性问题, 得到了一组新的保证该系统持久的充分性条件. 研究表明, 反馈控制变量不会影响系统的持久性, 该结果补充了文献[6]并改进了文献[7]的结果.

**关键词:** 持久性; Leslie-Gower; 反馈控制; Holling-III 型功能性反应

**中图分类号:** O175.14

**文献标识码:** A

## Permanence of a modified Leslie-Gower model with Holling-type III and feedback controls

YU Shengbin

( *Department of Basic Teaching and Research, Yango University, Fuzhou 350015, China* )

**Abstract:** A modified Leslie-Gower predation system with Holling-type III response function and feedback controls is studied. By applying the differential inequality theory, a new sufficient conditions which guarantee the permanence of the system are obtained. The results indicate that feedback control variables have no influence on the persistent property of the system, this results not only supplement the literature [6] but also improve the literature [7].

**Keywords:** permanence; Leslie-Gower; feedback controls; Holling-III response function

## 0 引言

对定义在  $[0, +\infty)$  上的任一有界连续函数  $f(t)$ , 本文恒设:

$$f^L = \inf_{t \in [0, +\infty)} f(t), f^U = \sup_{t \in [0, +\infty)} f(t).$$

自 Aziz-Alaoui 等<sup>[1]</sup>于 2003 年提出修正 Leslie-Gower 捕食食饵系统以来, 诸多学者对该类系统的动力学行为进行了探讨, 如具有 Holling-II 型和 Beddington-DeAngelis 功能性反应函数的修正 Leslie-Gower 捕食食饵系统的稳定性<sup>[2-3]</sup>, 非自治的连续型和离散型修正 Leslie-Gower 捕食食饵系统的持久性、稳定性、周期解和概周期的存在性等<sup>[4-9]</sup>. 特别地, 陈江彬在文献[7]中提出如下具反馈控制和 Holling-III 型功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统:

**收稿日期:** 2018-01-22

**作者简介:** 余胜斌(1984—), 男, 副教授, 研究方向为生物数学.

**基金项目:** 2016 年度福建省高校杰出青年科研人才培育计划项目; 福建省自然科学基金资助项目(2015J01012, 2015J01019)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left[ r_1(t) - b(t)x(t) - \frac{a_1(t)x(t)y(t)}{x^2(t) + k_1(t)} - c_1(t)u(t) \right], \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[ r_2(t) - \frac{a_2(t)y(t)}{x(t) + k_2(t)} - c_2(t)v(t) \right], \\ \dot{u}(t) = -e_1(t)u(t) + d_1(t)x(t), \\ \dot{v}(t) = -e_2(t)v(t) + d_2(t)y(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $r_i(t), a_i(t), c_i(t), e_i(t), d_i(t), k_i(t)$  ( $i=1,2$ ) 和  $b(t)$  均为  $[0, +\infty)$  上的有正上下界的连续函数;  $x(t)$  和  $y(t)$  分别表示种群  $x$  和  $y$  在  $t$  时刻的密度;  $u(t), v(t)$  为反馈控制变量. 该系统各系数的生物学含义见文献[8] 及其所引文献. 文献[7] 在假设系统(1) 满足初值条件:  $x(0) > 0, y(0) > 0, u(0) > 0, v(0) > 0$  的情况下, 通过运用适当的分析方法, 得到了如下关于持久性的结论:

**定理 1**<sup>[7]</sup> 若  $r_1^L > c_1^M W_1$  且  $r_2^L > c_2^M W_2$ , 则系统(1) 是永久持续生存的, 其中:

$$M_1 = \frac{r_1^U}{b^L}, M_2 = \frac{r_2^U(M_1 + k_2^U)}{a_2^L}, W_1 = \frac{d_1^U M_1}{e_1^L}, W_2 = \frac{d_2^U M_2}{e_2^L}.$$

从条件  $r_1^L > c_1^M W_1$  且  $r_2^L > c_2^M W_2$  和  $W_1, W_2$  的表达式可以看出, 该系统的持久性与反馈控制变量有关. 但是, 最近诸多具反馈控制的连续型生态系统的持久性研究结果表明, 反馈控制变量不会影响系统的持久性<sup>[8-11]</sup>. 那么, 反馈控制变量是否不会影响系统(1) 的持久性呢? 本文利用文献[9] 的分析方法, 得到了如下结果:

**定理 2** 系统(1) 是永久持续生存的.

即对于系统(1), 反馈控制变量不会影响到系统的持久性.

**注 1** 定理 2 与定理 1 相比, 显然条件弱化了很多, 说明本文的结果改进了文献[7] 的主要结果. 此外, 朱艳玲<sup>[6]</sup> 研究了系统(1) 在  $k_i(t) = k_i$  ( $i=1,2$ ) 为常数且无反馈控制变量即  $c_i = e_i = d_i = 0$  的这一特殊情况下的持久性问题, 也得到了该系统无条件永久持续生存的结论, 这与本文的结论一致, 这说明本文研究结果也补充了文献[6] 的结论.

## 1 主要引理及证明

**引理 1**<sup>[12]</sup> 设  $a > 0, b > 0$ , 当  $t \geq 0$  且  $x(0) > 0$  时, 若有  $\dot{x} \geq x(b - ax)$ , 则有  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \frac{b}{a}$ .

设  $a > 0, b > 0$ , 当  $t \geq 0$  且  $x(0) > 0$  时, 若有  $\dot{x} \leq x(b - ax)$ , 则有  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{b}{a}$ .

**引理 2**<sup>[12]</sup> 设  $a > 0, b > 0$ , 当  $t \geq 0$  且  $x(0) > 0$  时, 若有  $\dot{x} \geq b - ax$ , 则有  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \frac{b}{a}$ . 设

$a > 0, b > 0$ , 当  $t \geq 0$  且  $x(0) > 0$  时, 若有  $\dot{x} \leq b - ax$ , 则有  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{b}{a}$ .

**引理 3**<sup>[10]</sup> 设  $a > 0, b(t) > 0$  为有界连续函数, 当  $t \geq 0$  且  $x(0) > 0$  时, 对任意的  $t \geq s \geq 0$ , 若有  $\dot{x}(t) \leq -ax(t) + b(t)$ , 则有  $x(t) \leq x(t-s)\exp\{-as\} + \int_{t-s}^t b(\tau)\exp\{a(\tau-t)\}d\tau$ .

本文借助如下 3 个引理来证明定理 2.

**引理 4**<sup>[7]</sup> 设  $(x(t), y(t), u(t), v(t))^T$  为系统(1) 的任一正解, 则有:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{r_1^U}{b^L} \triangleq M_1, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \frac{r_2^U(M_1 + k_2^U)}{a_2^L} \triangleq M_2,$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq \frac{d_1^U M_1}{e_1^L} \triangleq W_1, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} v(t) \leq \frac{d_2^U M_2}{e_2^L} \triangleq W_2.$$

**引理 5** 设  $(x(t), y(t), u(t), v(t))^T$  为系统(1) 的任一正解, 存在  $m_1, m_3 > 0$ , 使得  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq$

$$m_1, \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq m_3.$$

**证明** 由引理 4 可知, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $T > 0$ , 使得对任意的  $t \geq T$ , 有  $x(t) \leq M_1 + \varepsilon \triangleq M_{1\varepsilon}$ ,  $y(t) \leq M_2 + \varepsilon \triangleq M_{2\varepsilon}$ ,  $u(t) \leq W_1 + \varepsilon \triangleq W_{1\varepsilon}$ ,  $v(t) \leq W_2 + \varepsilon \triangleq W_{2\varepsilon}$ . 从而当  $t \geq T$  时, 由系统(1) 的第 1 个方程可知

$$\dot{x}(t) \geq x(t) \left( r_1^L - b^U M_{1\varepsilon} - \frac{a_1^U M_{1\varepsilon} M_{2\varepsilon}}{k_1^L} - c_1^U W_{1\varepsilon} \right) \triangleq Qx(t), \quad (2)$$

其中由  $M_{1\varepsilon} = \frac{r_1^U}{b^L} + \varepsilon$  可知,  $Q = r_1^L - b^U M_{1\varepsilon} - \frac{a_1^U M_{1\varepsilon} M_{2\varepsilon}}{k_1^L} - c_1^U M_{3\varepsilon} < 0$ . 对式(2) 两端从  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ) 到  $t$  积分得

$$\frac{x(t)}{x(\tau)} \geq \exp \left\{ \int_{\tau}^t Q ds \right\}, \text{ 即 } x(\tau) \leq x(t) \exp \{-Q(t-\tau)\}. \quad (3)$$

由系统(1) 的第 3 个方程可知

$$\dot{u}(t) \leq -e_1^L u(t) + d_1^U x(t). \quad (4)$$

由式(3)、(4) 及引理 3 得, 对任意的  $0 \leq s \leq t$ , 有

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(t-s) \exp\{-e_1^L s\} + \int_{t-s}^t d_1^U x(\tau) \exp\{e_1^L(\tau-t)\} d\tau \leq u(t-s) \exp\{-e_1^L s\} + \\ &\int_{t-s}^t d_1^U x(t) \exp\{-Q(t-\tau)\} \exp\{e_1^L(\tau-t)\} d\tau \leq u(t-s) \exp\{-e_1^L s\} + \\ &d_1^U x(t) \int_{t-s}^t \exp\{-Q(t-\tau)\} d\tau = u(t-s) \exp\{-e_1^L s\} + \frac{d_1^U}{Q} (1 - \exp\{-Qs\}) x(t), \end{aligned} \quad (5)$$

这里利用了  $\max_{\tau \in [t-s, t]} \exp\{e_1^L(\tau-t)\} = \exp\{0\} = 1$ .

取适当的  $K$ , 不妨取  $K > \max \left\{ \frac{1}{e_1^L} \ln \frac{2c_1^U W_{1\varepsilon}}{r_1^L}, 0 \right\}$ , 则有

$$c_1^U W_{1\varepsilon} \exp\{-e_1^L K\} < \frac{r_1^L}{2}. \quad (6)$$

对上述  $K$ , 存在  $T_1 \geq T + K$ . 当  $t \geq T_1$  时, 在式(5) 中取  $s = K$  可得

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(t-K) \exp\{-e_1^L K\} + \frac{d_1^U}{Q} (1 - \exp\{-QK\}) x(t) \leq \\ &W_{1\varepsilon} \exp\{-e_1^L K\} + \frac{d_1^U}{Q} (1 - \exp\{-QK\}) x(t) = W_{1\varepsilon} \exp\{-e_1^L K\} + Dx(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $D = \frac{d_1^U}{Q} (1 - \exp\{-QK\}) > 0$ . 当  $t \geq T_1$  时, 由式(6)、(7) 及系统(1) 的第 1 个方程可知,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\geq x(t) \left( r_1^L - b^U x(t) - \frac{a_1^U M_{2\varepsilon} x(t)}{k_1^L} - c_1^U u(t) \right) \geq \\ &x(t) \left( r_1^L - b^U x(t) - \frac{a_1^U M_{2\varepsilon} x(t)}{k_1^L} - c_1^U (W_{1\varepsilon} \exp\{-e_1^L K\} + Dx(t)) \right) = \\ &x(t) \left( r_1^L - c_1^U W_{1\varepsilon} \exp\{-e_1^L K\} - \left( b^U + c_1^U D + \frac{a_1^U M_{2\varepsilon}}{k_1^L} \right) x(t) \right) \geq \\ &x(t) \left( \frac{r_1^L}{2} - \left( b^U + c_1^U D + \frac{a_1^U M_{2\varepsilon}}{k_1^L} \right) x(t) \right). \end{aligned}$$

由引理 1 可知  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \frac{r_1^L}{2 \left( b^U + c_1^U D + \frac{a_1^U M_{2\varepsilon}}{k_1^L} \right)} \triangleq m_1$ , 从而对上述  $\varepsilon$ , 存在  $T_2 > T_1$ , 使得对任意的

$t \geq T_2$ , 有  $x(t) \geq m_1 - \varepsilon$ . 由上面的不等式及系统(1) 的第 3 个方程可知, 当  $t \geq T_2$  时,  $\dot{u}(t) \geq -e_1^U u(t) + d_1^L (m_1 - \varepsilon)$ . 由引理 2, 可得  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq \frac{d_1^L (m_1 - \varepsilon)}{e_1^U}$ . 令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 得  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq \frac{d_1^L m_1}{e_1^U} \triangleq w_1$ . 证毕.

**引理 6** 设  $(x(t), y(t), u(t), v(t))^T$  为系统(1) 的任一正解, 则存在  $m_2, m_4 > 0$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq m_2, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t) \geq m_4.$$

**证明** 引理 6 的证明与引理 5 的证明类似. 由引理 4 可知, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $T > 0$ , 使得对任意的  $t \geq T$ , 有  $x(t) \leq M_1 + \epsilon \triangleq M_{1\epsilon}$ ,  $y(t) \leq M_2 + \epsilon \triangleq M_{2\epsilon}$ ,  $u(t) \leq W_1 + \epsilon \triangleq W_{1\epsilon}$ ,  $v(t) \leq W_2 + \epsilon \triangleq W_{2\epsilon}$ . 当  $t \geq T$  时, 由系统(1) 的第 2 个方程可知

$$\dot{y}(t) \geq y(t) \left( r_2^L - \frac{a_2^U M_{2\epsilon}}{k_2^L} - c_2^U W_{2\epsilon} \right) \triangleq P x(t), \quad (8)$$

从而由  $M_{2\epsilon} = \frac{r_2^U (M_1 + k_2^U)}{a_2^L} + \epsilon$  可知,  $P = r_2^L - \frac{a_2^U M_{2\epsilon}}{k_2^L} - c_2^U W_{2\epsilon} < 0$ . 对式(8) 两端从  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ) 到  $t$  积分得

$$\frac{y(t)}{y(\tau)} \geq \exp \left\{ \int_{\tau}^t P ds \right\}, \quad \text{即 } y(\tau) \leq y(t) \exp \{-P(t-\tau)\}. \quad (9)$$

由系统(1) 的第 4 个方程可知

$$\dot{v}(t) \leq -e_2^L v(t) + d_2^U y(t). \quad (10)$$

由式(9)、(10) 及引理 3 得, 对任意的  $0 \leq s \leq t$ , 有

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(t-s) \exp\{-e_2^L s\} + \int_{t-s}^t d_2^U y(\tau) \exp\{e_2^L(\tau-t)\} d\tau \leq v(t-s) \exp\{-e_2^L s\} + \\ &\int_{t-s}^t d_2^U y(t) \exp\{-P(t-\tau)\} \exp\{e_2^L(\tau-t)\} d\tau \leq v(t-s) \exp\{-e_2^L s\} + \\ &d_2^U y(t) \int_{t-s}^t \exp\{-P(t-\tau)\} d\tau = v(t-s) \exp\{-e_2^L s\} + \frac{d_2^U}{P} (1 - \exp\{-Ps\}) y(t). \end{aligned} \quad (11)$$

取适当的  $H$  使得  $H > \max \left\{ \frac{1}{e_2^L} \ln \frac{2c_2^U W_{2\epsilon}}{r_2^L}, 0 \right\}$ , 则有

$$c_2^U W_{2\epsilon} \exp\{-e_2^L H\} < \frac{r_2^L}{2}. \quad (12)$$

对上述  $H$ , 存在  $T_1 \geq T + H$ . 当  $t \geq T_1$  时, 在式(11) 中取  $s = H$  可得

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(t-H) \exp\{-e_2^L H\} + \frac{d_2^U}{P} (1 - \exp\{-PH\}) y(t) \leq \\ &W_{2\epsilon} \exp\{-e_2^L H\} + \frac{d_2^U}{P} (1 - \exp\{-PH\}) y(t) = W_{2\epsilon} \exp\{-e_2^L H\} + B y(t), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $B = \frac{d_2^U}{P} (1 - \exp\{-PH\}) > 0$ . 当  $t \geq T_1$  时, 由式(12)、(13) 及系统(1) 的第 2 个方程可知,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &\geq y(t) \left( r_2^L - \frac{a_2^U}{k_2^L} y(t) - c_2^U v(t) \right) \geq y(t) \left( r_2^L - \frac{a_2^U}{k_2^L} y(t) - c_2^U (W_{2\epsilon} \exp\{-e_2^L H\} + B y(t)) \right) = \\ &y(t) \left( r_2^L - c_2^U W_{2\epsilon} \exp\{-e_2^L H\} - \left( \frac{a_2^U}{k_2^L} + c_2^U B \right) y(t) \right) \geq y(t) \left( \frac{r_2^L}{2} - \left( \frac{a_2^U}{k_2^L} + c_2^U B \right) y(t) \right). \end{aligned}$$

再由引理 1 可得  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \frac{r_2^L}{2 \left( \frac{a_2^U}{k_2^L} + c_2^U B \right)} = \frac{r_2^L k_2^L}{2(a_2^U + c_2^U B k_2^L)} \triangleq m_2$ . 从而对上述  $\epsilon$ , 存在  $T_2 > T_1$ , 使得对任意的  $t \geq T_2$ , 有  $y(t) \geq m_2 - \epsilon$ . 由上面的不等式及系统(1) 的第 4 个方程可知, 当  $t \geq T_2$  时,

$\dot{v}(t) \geq -e_2^U v(t) + d_2^L (m_2 - \epsilon)$ . 再由引理 2 可得  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t) \geq \frac{d_2^L (m_2 - \epsilon)}{e_2^U}$ . 令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 得  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t) \geq$

$\frac{d_2^L m_2}{e_2^U} \triangleq w_2$ . 证毕.

由引理 4、引理 5 和引理 6 可知, 定理 2 成立.

2 应用举例

例 1 考虑系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left[ 2.5 + 0.5\cos(\sqrt{7}t) - 0.3x(t) - \frac{(1 + 0.5\sin(\sqrt{2}t)x(t)y(t))}{x^2(t) + 1} - 0.2u(t) \right], \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[ 0.5 - \frac{3y(t)}{x(t) + 5 + \sin(\sqrt{3}t)} - 0.2v(t) \right], \\ \dot{u}(t) = -(0.4 + 0.3\cos(\sqrt{5}t))u(t) + (0.5 + 0.3\sin(\sqrt{7}t))x(t), \\ \dot{v}(t) = -(0.3 + 0.2\sin(\sqrt{7}t))v(t) + (0.4 + 0.1\cos(\sqrt{11}t))y(t). \end{cases} \tag{14}$$

由定理 2 可知,系统(14)是永久持续生存,数值模拟结果(图 1)也支持了这一结论.

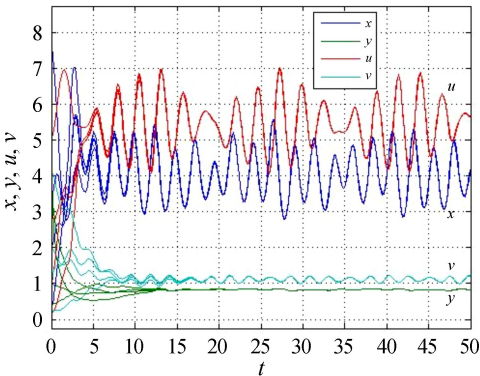


图 1 系统(14)在具初始条件 $(0.3,0.4,0.2,0.2)^T$ 、 $(2,4,3,4)^T$ 、 $(8,1,5,2)^T$  和  $(3,4,1,1)^T$  下的数值模拟图

参考文献：

[1] Aziz-Alaoui M A, Daher Okiye M. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. Applied Mathematics Letters, 2003,16(7):1069-1075.

[2] Yu Shengbin. Global asymptotic stability of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012, Article ID 208167:1-8.

[3] Yu Shengbin. Global stability of a modified Leslie-Gower model with Beddington-DeAngelis functional response[J]. Advances in Difference Equations, 2014,84:1-14.

[4] Zhu Yanling, Wang Kai. Existence and global attractivity of positive periodic solutions for a predator-prey model with modified Leslie-Gower Holling-type II schemes[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 384(2):400-408.

[5] Yu Shengbin, Chen Fengde. Almost periodic solution of a modified Leslie-Gower predator-prey model with Holling-type II schemes and mutual interference[J]. International Journal of Biomathematics, 2014,7(3):1-15.

[6] 朱艳玲. 具有 Leslie-Gower 和 Holling-III 型功能反应的捕食-食饵模型的一致持续生存[J]. 宁夏师范学院学报, 2013,34(3):7-9.

[7] 陈江彬. 具反馈控制和 Holling-III 类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统研究[J]. 延边大学学报(自然科学版),2017,43(3):189-194.

[8] 王颖,陈江彬. 具反馈控制和 Holling-II 类功能性反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统的持久性[J]. 福州大学学报(自然科学版),2016,44(2):150-155.

[9] 余胜斌,张杰华. 具时滞和反馈控制的修正 Leslie-Gower 离散系统的持久性[J]. 应用泛函分析学报,2014,16(3): 244-249.

[10] Chen Fengde, Yang Jinghui, Chen Lijuan. Note on the persistent property of a feedback control system with delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010,11(2):1061-1066.

[11] Yu Shengbin. Extinction for a discrete competition system with feedback controls[J]. Advances in Difference Equations, 2017,9:1-9.

[12] Chen Fengde, Li Zhong, Huang Yunjin. Note on the permanence of a competitive system with infinite delay and feedback controls[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2007,8(2):680-687.