

文章编号: 1004-4353(2018)01-0039-04

大光子数近似下宏观场与原子相互作用 系统的纠缠动力学

罗成立, 张春玲

(阳光学院 电子信息工程系, 福建 福州 350002)

摘要: 研究初始时处于纠缠态的两个宏观场各自独立地与一个原子相互作用的系统的动力学特性, 结果表明: 当原子与场的作用时间 $t = (2n+1)\pi\sqrt{n}/g$ 时, 两个腔场间的纠缠将完全消失, 即出现纠缠突然死亡现象 (ESD), 同时腔场与原子间也无任何纠缠; 当 $t = 2n\pi\sqrt{n}/g$ 时, 腔场间完全消失掉的纠缠又重新恢复过来并达到最大纠缠, 即出现纠缠突然产生现象 (ESB); 腔场的平均光子数越大, 纠缠保存得越久; 当腔场间的纠缠完全消失时, 两个原子处在最大纠缠态上. 通过引入 3 个近似, 解决了无法刻画宏观场纠缠的困境, 给出了宏观场纠缠的解析解, 并通过与建立在 Bell-CHSH 不等式上的结果进行对比分析, 证明了 3 个近似所带来的误差可以忽略不计.

关键词: 纠缠相干态; 宏观场; 纠缠动力学; 大光子数近似

中图分类号: O413.1

文献标识码: A

Entanglement dynamics for the macroscopic fields interacted with atoms under a huge photons number approximation

LUO Chengli, ZHANG Chunling

(*Institute of Electronic Information Engineering, Yango College, Fuzhou 350002, China*)

Abstract: We study the entanglement dynamics for two initially entangled coherent macroscopic fields each interacting with an atom. The results obtained by resolvable values show the entanglement of the two fields disappears when $t = (2n+1)\pi\sqrt{n}/g$ and appears again when $t = 2n\pi\sqrt{n}/g$. It is obviously that the field-field entanglement will increase with the mean photon number of the macroscopic field. Then we find that when the entanglement of the two fields disappears, the two-atom entanglement appears. By introducing 3 approximations, we can solve the difficult problem of describing the macroscopic field entanglement, and give the analytical solution of the macroscopic field entanglement. Compared with the results based on Bell-CHSH inequality, it is proved that the errors caused by the 3 approximations can be neglected.

Keywords: entangled coherent state; macroscopic field; entanglement dynamics; huge photons number approximation

量子纠缠是量子信息中的最重要的资源, 其在通信、计算等领域有着巨大的应用价值^[1-3]. 然而, 由于纠缠的脆弱性, 使得纠缠的保存时间成为人们最为关心的一个问题. 2003 年, 于挺等首次发现了纠缠突然死亡现象 (ESD)^[4], 随后一些研究者在其他的一些微观系统中也发现了纠缠突然死亡现象^[5-8]. 2008 年, López 等提出了纠缠突然产生现象 (ESB)^[9], 并在多粒子系统中研究了此类现象^[10-13]. 近年来, 一些文献又报道了宏观系统的纠缠动力学^[14-16], 其中文献^[16]研究了宏观场纠缠态与一种对腔场的影响.

收稿日期: 2017-09-02

基金项目: 福建省教育厅科学研究 B 类项目 (JB14220)

作者简介: 罗成立 (1986—), 男, 讲师, 研究方向为量子光通信、物理电子学.

响只体现在腔场光子数的泄漏上的环境相互作用的系统,结果表明环境会导致系统纠缠的突然死亡,并且无法复原;与此同时,原本没有关系的两个环境之间变得互相纠缠,即实现了纠缠交换. 本文在文献[16]研究的基础上,通过引进 3 个特别的近似,研究两个初始时处于纠缠相干态上的宏观场与两个原子相互作用过程中的纠缠突然死亡与产生现象,以及各级近似对纠缠演化的影响.

1 理论模型

考虑两个无任何相互作用的宏观场各自独立地与一个原子作用的系统. 假设两个腔场没有损耗,且不考虑原子的自发辐射,则易得整个系统的哈密顿量(设 $\hbar=1$):

$$H_{\text{tot}} = g(a_1^+ \sigma_-^A + a_1 \sigma_+^A) + g(a_2^+ \sigma_-^B + a_2 \sigma_+^B), \quad (1)$$

其中 σ_+^i 和 σ_-^i 是第 i 个原子的上升和下降算符, a_j^+ 和 a_j 是第 j 个腔模的产生和湮灭算符, g 是原子与腔场的耦合常数.

假设初始时两个宏观场处于纠缠相干态上. 纠缠相干态在实验上可以通过将一个相干态和一个真空态发送到一个非线性的 Mach-Zehnder 干涉仪(NLMZI)来得到^[17]. 通常,最大纠缠相干态有如下 4 种形式:

$$|ECS\rangle = N_1 (|\alpha\rangle |-\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle |\alpha\rangle), \quad (2)$$

$$|ECS\rangle = N_1 (|\alpha\rangle |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle |-\alpha\rangle), \quad (3)$$

其中 $N_1 = 1/\sqrt{2(1 - e^{-4|\alpha|^2})}$. 从式(2)和(3)可知,纠缠相干态是非正交但严格归一的态. 选取第 1 种纠缠相干态为两个宏观场的初态: $|\Psi_{\text{field}}\rangle = N_a (|\alpha\rangle_1 |-\alpha\rangle_2 - |-\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2)$, 其中 $N_a = 1/\sqrt{2(1 - e^{-4\alpha\alpha^*})}$. 原子的初态为 $(e^{i\varphi} |e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$.

2 大光子数近似下的腔场纠缠动力学

研究表明,纠缠相干态是静态时,可直接使用 concurrence 来度量纠缠相干态的纠缠,但由于本文的两个宏观场一直与原子作用,这就使得两个宏观场的内态不再是严格的纠缠相干态. 这一问题可以以一个相干态场与一个原子共振作用的简单情况来解释. 设场的初态为 $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$, $C_n = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$,

原子假设处于基态 $|g\rangle$, 经过原子与场的共振作用之后,系统的态演化成 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n [\cos(g\sqrt{n}t) |g, n\rangle - i \sin(g\sqrt{n}t) |e, n-1\rangle]$, 而不再是严格的相干态. 这表明初始时处于纠缠相干态的两个宏观场,在彼此独立地与原子作用之后,两个宏观场的内态不再是严格的纠缠相干态,腔场的基矢将有无穷多个.

若用 concurrence 来衡量两个宏观场内态的纠缠,则必须采用一些近似^[18-19]. 采用近似的前提条件是腔场的平均光子数要大. 因为 C_n 是泊松函数,即仅当 $\alpha^2 + \alpha \geq n \geq \alpha^2 - \alpha$ 时, C_n 的值才比较大,这样就可以只留下 $2\alpha + 1$ 项而略去其他项,并且这样的操作对结果不会有太大的影响. 在这一前提下,有 $C_{n+1} \approx C_n e^{i\varphi}$, $\sqrt{n+1} \approx \sqrt{n} + 1/2\sqrt{n}$, $\sqrt{n} \approx \sqrt{n}/2 + n/2\sqrt{n}$ (其中 $\bar{n} = |\alpha|^2$). 经过原子与场的相互共振作用之后,系统的态随时间的表达式为

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2N_a} [(e^{i\varphi} e^{-igt/2\sqrt{n}} |e\rangle_1 + |g\rangle_1)(e^{i\varphi} e^{igt/2\sqrt{n}} |e\rangle_2 + |g\rangle_2) |\alpha e^{-igt/2\sqrt{n}}\rangle_1 |-\alpha e^{igt/2\sqrt{n}}\rangle_2 - (e^{i\varphi} e^{igt/2\sqrt{n}} |e\rangle_1 + |g\rangle_1)(e^{i\varphi} e^{-igt/2\sqrt{n}} |e\rangle_2 + |g\rangle_2) |-\alpha e^{igt/2\sqrt{n}}\rangle_1 |\alpha e^{-igt/2\sqrt{n}}\rangle_2]. \quad (4)$$

从式(4)可发现腔场部分的基矢只剩下 4 个非正交基矢,所以需要设新的正交基矢: $|0\rangle = |\alpha e^{-igt/2\sqrt{n}}\rangle$, $|1\rangle = (|-\alpha e^{igt/2\sqrt{n}}\rangle - P|0\rangle)/\sqrt{1 - |P|^2}$, $P = e^{-|\alpha|^2(1+e^{igt/\sqrt{n}})}$, 由此便可使用 concurrence 来度量两个宏观场间的纠缠.

求迹掉这个系统的密度矩阵的腔场部分,可得到原子部分的密度矩阵 ρ_{atom} , 由此即可求出它们的

concurrence. 同理,可以得到两个宏观场部分密度矩阵的 concurrence 为

$$C(\rho_{\text{field}}) = \frac{1 - \exp[-2\bar{n}(1 + \cos(gt/\sqrt{\bar{n}}))]}{2(1 - e^{-4\bar{n}})}(1 + \cos(gt/\sqrt{\bar{n}})).$$

图 1 为腔场间纠缠随时间的变化曲线. 在图 1 中,当原子与场的作用时间 $t = (2n+1)\pi\sqrt{\bar{n}}/g$ (n 为一非负整数) 时,两个腔场间的纠缠完全消失,即出现了纠缠突然死亡现象;当 $t = 2n\pi\sqrt{\bar{n}}/g$ 时,腔场间完全消失掉的纠缠又重新恢复并达到最大纠缠,即出现了纠缠突然产生现象. 这表明腔场的平均光子数越大,其纠缠就可以保存越久. ESD 产生的原因是因为腔场与原子相互作用后,原子偶极矩存储了腔场的相位信息,带走了腔场间的纠缠. 在本系统中,腔场所处的纠缠态是一个相位纠缠,与光子数无关.

将 $t = (2n+1)\pi\sqrt{\bar{n}}/g$ 代入到式(4),即 $e^{igt/2\sqrt{\bar{n}}} = i$, $e^{-igt/2\sqrt{\bar{n}}} = -i$, 由此可得

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{N_a}(|g\rangle_1|e\rangle_2 - |e\rangle_1|g\rangle_2) - i\alpha|g\rangle_1 - i\alpha|g\rangle_2. \quad (5)$$

从式(5)可知,此时两个腔场完全解纠缠,腔场与原子之间也没有任何的纠缠关联,且两个原子处在最大纠缠态上. 由此可知,如果两个原子之间较远,就可轻松实现纠缠交换.

3 各级近似对纠缠演化的影响

本文选取 3 个近似,分别为 $C_{n+1} \approx C_n e^{i\varphi}$, $\sqrt{n+1} \approx \sqrt{n} + 1/2\sqrt{\bar{n}}$ 和 $\sqrt{n} \approx \sqrt{\bar{n}}/2 + n/2\sqrt{\bar{n}}$. 引入时间项后这 3 个近似的误差可能会被放大,因为时间 t 总是在不断地增大. 在这 3 项中与时间 t 直接相乘的只有后 2 项,所以这里只考虑后 2 项近似对纠缠演化的影响.

首先考虑 $\sqrt{n+1} \approx \sqrt{n} + 1/2\sqrt{\bar{n}}$. 假设泰勒展开到第 3 项为近似的精确解(在本文研究的时间范围内,这样的假设对结果不会产生影响),于是有

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} &= \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} + \sqrt{\bar{n}}[1 + \frac{n-\bar{n}+1}{2\bar{n}} - \frac{(n-\bar{n}+1)^2}{8\bar{n}^2}] - \\ &\sqrt{\bar{n}}[1 + \frac{n-\bar{n}}{2\bar{n}} - \frac{(n-\bar{n})^2}{8\bar{n}^2}] = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{n-\bar{n}+0.5}{4\bar{n}^{1.5}} \approx \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

在计算过程中,略掉了项 $(n-\bar{n}+0.5)/4\bar{n}^{1.5}$. 由于 n 有意义的取值范围为 $\bar{n} + \sqrt{\bar{n}} \geq n \geq \bar{n} - \sqrt{\bar{n}}$, 因此 $(n-\bar{n}+0.5)/4\bar{n}^{1.5}$ 最大值的量级为 $1/4\bar{n}$. 本文中令 $\bar{n}=400$, 则其误差的最大量级为 $1/(4\sqrt{\bar{n}^3 - \bar{n}^{1.5}} + 2\sqrt{\bar{n}})$. 由于本文中仅考虑 $0 \leq gt \leq 2\pi\sqrt{\bar{n}}$ 时间内的纠缠演化,因此稍作计算就会发现这个误差几乎可以忽略不计.

再考虑 $\sqrt{n} \approx \sqrt{\bar{n}}/2 + n/2\sqrt{\bar{n}}$. 处理过程同上,得

$$\sqrt{n} = \sqrt{\bar{n}}[1 + \frac{n-\bar{n}}{2\bar{n}} - \frac{(n-\bar{n})^2}{8\bar{n}^2}] = \sqrt{\bar{n}}/2 + n/2\sqrt{\bar{n}} - \frac{(n-\bar{n})^2}{8\bar{n}^{1.5}} \approx \sqrt{\bar{n}}/2 + n/2\sqrt{\bar{n}}. \quad (7)$$

在计算过程中,略掉了项 $(n-\bar{n})^2/8\bar{n}^{1.5}$, 其最大值的量级为 $1/8\sqrt{\bar{n}}$, 由此知其误差的最大量级为 $1/(8\bar{n} - 4\sqrt{\bar{n}})$. 在 $0 \leq gt \leq 2\pi\sqrt{\bar{n}}$ 时间内,这个近似产生的误差也完全可以忽略不计.

为了验证结果的正确性,需要直接计算未进行近似操作的宏观场系统纠缠的演化. 但由于两个腔场初始时处于纠缠相干态,因此无法采用 concurrence 来度量其纠缠. 为此,本文利用建立在赝自旋基础上的 Bell-CHSH 不等式来进行衡量^[15]. 通过对比计算结果,发现采用 concurrence 和赝自旋基础上的

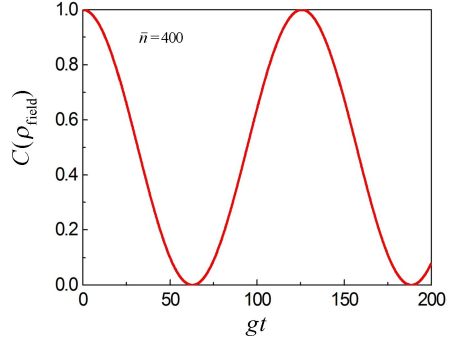


图 1 当光场的平均光子数等于 400 时,腔场间纠缠随时间的变化曲线

Bell-CHSH 不等式所得到的腔场系统纠缠还原时间都为 $t = 2n\pi\sqrt{n}/g$, 纠缠死亡时间也都为 $t = (2n + 1)\pi\sqrt{n}/g$, 这进一步说明本文所采取的近似对结果几乎没有影响. 与文献[15] 相比, 本文采用 3 个特殊近似后, 宏观场的纠缠可以直接度量, 而不需要从侧面计算其非定域性.

参考文献:

- [1] Bennett C H, Divincenzo D P. Quantum information and computation[J]. *Nature*, 2000,404(6775):247-255.
- [2] 廖庆洪, 张旗, 刘晔. J-C 模型和原子-腔光力学系统中的纠缠交换[J]. *光学技术*, 2017,43(2):97-102.
- [3] Wineland D J, Leibfried D. Quantum information processing and metrology with trapped ions[J]. *Laser Physics Letters*, 2015,8(3):175-188.
- [4] Yu T, Eberly J H. Qubit disentanglement and decoherence via dephasing[J]. *Physical Review B*, 2003,68(68):202-206.
- [5] Abdel-Khalek S, Berrada K, Eleuch H. Effect of the time-dependent coupling on a superconducting qubit-field system under decoherence: entanglement and wehrl entropy[J]. *Annals of Physics*, 2015,361:247-258.
- [6] Ficek Z, Tanas R. Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system[J]. *Physical Review A*, 2006,74(2):343-346.
- [7] Dijkstra A G, Tanimura Y. Non-Markovian entanglement dynamics in the presence of system-bath coherence[J]. *Physical Review Letters*, 2010,104(25):250401.
- [8] Magán J M. Black holes as random particles: entanglement dynamics in infinite range and matrix models[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2016,2016(8):81.
- [9] López C E, Romero G, Lastra F, et al. Sudden birth versus sudden death of entanglement in multipartite systems[J]. *Physical Review Letters*, 2008,101(8):080503.
- [10] Liu Y, Lu J, Zhou L. Quantum correlations of two qubits interacting with a macroscopic medium[J]. *Quantum Information Processing*, 2015,14(4):1-18.
- [11] Man Z X, Xia Y J, An N B. Entanglement dynamics for a six-qubit model in cavity QED[J]. *Journal of Physics B Atomic Molecular & Optical Physics*, 2008,41(15):155501.
- [12] Aolita L, Chaves R, Cavalcanti D, et al. Scaling laws for the decay of multiqubit entanglement[J]. *Physical Review Letters*, 2008,100(8):080501.
- [13] Hu J, Yu H. Entanglement dynamics for uniformly accelerated two-level atoms[J]. *Physical Review A*, 2015,91(1):012327.
- [14] Liao C G, Chen Z H, Luo C L. Dynamics of Bell nonlocality in non-degenerate two-photon Jaynes-Cummings model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010,59(12):8526-8534.
- [15] Luo C L, Liao C G, Chen Z H. The collapse and revival of Bell-nonlocality of two macroscopic fields interacting with resonant atoms[J]. *Optics Communications*, 2010,283(16):3168-3170.
- [16] Luo C L, Shen L T, Liu W W. Sudden birth versus sudden death of entanglement during the interaction of macroscopic fields with environments[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013,62(19):190301.
- [17] Sanders B C, Milburn G J. Complementarity in a quantum nondemolition measurement[J]. *Physical Review A*, 1989,39(2):694.
- [18] Auffeves A, Maioli P, Meunier T, et al. Entanglement of a mesoscopic field with an atom induced by photon graininess in a cavity[J]. *Physical Review Letters*, 2003,91(23):230405.
- [19] Gea-Banacloche J. Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields[J]. *Physical Review A*, 1991,44(9):5913.