文章编号： 1004-4353(2018)01-0031-04

基于海森堡 XX 模型的多粒子自旋纠缠浓缩

董举成， 计新*

(延边大学 理学院，吉林 延吉 133002)

摘要： 利用自旋链系统的海森堡相互作用，提出了关于多粒子非最大自旋纠缠态的纠缠浓缩方案. 研究结果表明，仅利用自然的自旋相互作用和简单的单自旋量子比特测量即可实现 GHZ 态和 W 态的纠缠浓缩，因而本方案在实际的物理系统中更容易实现.

关键词： 海森堡模型；纠缠浓缩；GHZ 态；W 态

中图分类号： O431　　　　**文献标识码：** A

Entanglement concentration for multipartite spin entangled states via Heisenberg XX model

DONG Jucheng, JI Xin*

(*College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: This paper proposes entanglement concentration schemes for multipartite entangled states based on the Heisenberg interaction in spin system. The analysis shows that the entanglement concentration schemes can be realized only with natural spin interaction and single-qubit measurements. So the presented schemes are feasible for actual physical systems with current technology.

Keywords: Heisenberg model; entanglement concentration; GHZ states; W states

0　引言

量子纠缠在量子信息和量子计算领域中扮演着重要角色，是众多量子信息处理任务的核心物理资源[1-3]. 在纠缠态的应用中，最大纠缠态通常作为优质的量子通道被广泛地应用于远程节点间的量子通信或分布式量子计算方案中. 对于多粒子最大纠缠态来说，其不仅拥有更大的通道容量，而且多个粒子可以分属于不同的参与者，这就为受控的量子通信和量子计算提供了条件. 在多量子体系的纠缠态中，Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态[4]和 W 态[5]是两种最受关注的非等价纠缠态形式；然而，在实际的纠缠制备和分布过程中，研究者通常得到的是纠缠度下降的非最大纠缠态[6]. 相比于最大纠缠态，非最大纠缠态在很多的量子通信和量子计算任务中会降低方案的精确度和安全性，所以研究者们提出了纠缠浓缩理论来从非最大纠缠态中获得最大纠缠态. 例如：1996 年，Bennett 等利用局域操作和经典通讯的方法从较多数目的非最大纠缠对中得到了较少数目的最大纠缠对资源[7-8]；1999 年，Bose 等提出了一种基于纠缠交换的纠缠浓缩方案[9]；之后，Kwiat 等[10]和 Pan 等[11]相继提出了利用光学器件对纠缠光子对进行浓缩过程的方案.

收稿日期： 2017-03-30

* **通信作者：** 计新(1965—)，女，教授，研究方向为量子光学与量子信息学.

在现有的纠缠浓缩方案中,大多是基于光子系统[12-14]和腔量子电动力学系统[15-16]进行研究的,而且研究的对象多数是两粒子纠缠态和在两粒子 Bell 态基础上推广的 GHZ 态[17-18].但是,通常针对 Bell 态和 GHZ 态的纠缠浓缩方法并不适用于 W 态,所以有必要研究一种对 GHZ 态和 W 态都适用的操作过程来实现纠缠浓缩.近年来,固态量子体系中的自旋自由度被认为是理想的量子比特载体之一,其原因一方面是因为自旋自由度在固体环境中具有较长的量子相干时间,另一方面是因为借助成熟的半导体微电子技术手段可以很容易地实现系统的集成.此外,许多实际的物理系统都可以用海森堡自旋相互作用来模拟,例如超导系统中的库伯对[19]、量子点中的电子自旋和核自旋[20]等,所以海森堡自旋相互作用系统对获得量子信息和量子计算时所需要的纠缠资源和量子门操作方面具有重要的应用价值[21-23].目前为止,未见有关利用自旋链模型对多粒子纠缠态的浓缩方案进行研究的文献报道,基于此,本文利用自旋 1/2 粒子之间的海森堡 XX 相互作用,研究了多粒子非最大自旋纠缠态的浓缩方案,通过参与者引入单自旋辅助粒子以及局域的自旋相互作用和单比特测量的方式,以一定的成功概率从非最大纠缠态中萃取出了最大纠缠态.

1 多粒子纠缠浓缩

1.1 GHZ 态

假设初始为 3 个参与者共享一个非局域的三粒子非最大纠缠 GHZ 态:

$$|\phi\rangle = a\,|000\rangle_{123} + b\,|111\rangle_{123}, \tag{1}$$

其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示自旋 1/2 粒子所具有的两种正交自旋状态.为了方便,这里假设 a 和 b 为已知实数.根据 a 和 b 的关系,下面的纠缠浓缩过程将分为两种情况进行分析.

1) 若 $a > b$,则第 1 个参与者(设为 Alice)引入处在 $|1\rangle_4$ 态的第 4 个自旋 1/2 粒子 4,并且使粒子 1 和 4 构成海森堡 XX 相互作用系统,其相互作用哈密顿为

$$H_{14} = J\left(S_1^x S_4^x + S_1^y S_4^y\right), \tag{2}$$

其中 J 表示自旋相互作用耦合强度,S_i^j $(i=1,4;\ j=x,y)$ 是自旋 1/2 算符.在相互作用哈密顿量的支配下,整个四粒子系统的联合量子态在 t 时间内的演化过程可以表示为:

$$\begin{aligned}(a\,|000\rangle + b\,|111\rangle)_{123}\,|1\rangle_4 &\rightarrow a\left(\cos\frac{Jt}{2}\,|01\rangle - \mathrm{i}\sin\frac{Jt}{2}\,|10\rangle\right)_{14}|00\rangle_{23} + b\,|1111\rangle_{1234} = \\ &a\cos\frac{Jt}{2}\,|0001\rangle_{1234} - \mathrm{i}a\sin\frac{Jt}{2}\,|1000\rangle_{1234} + b\,|1111\rangle_{1234}.\end{aligned} \tag{3}$$

取相互作用时间 $t = 2\arccos\dfrac{b}{a}/J$,则式(3)的量子态可写为

$$b\,|0001\rangle_{1234} - \mathrm{i}a\sin\left(\arccos\frac{b}{a}\right)|1000\rangle_{1234} + b\,|1111\rangle_{1234}. \tag{4}$$

在此基础上,Alice 对粒子 4 的状态执行 σ_z 测量,若测量结果为 $|1\rangle_4$ 态,则演化之后的系统末态坍缩为

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_{123} + |111\rangle_{123}\right). \tag{5}$$

由此得到最大纠缠的三粒子 GHZ 态,成功概率为 $2b^2$.在整个纠缠浓缩过程中,只需要 Alice 在自己的实验室执行海森堡相互作用和单粒子测量操作,就可以在分离的 3 个参与者之间建立三粒子最大纠缠态通道.

2) 若 $a < b$,则 Alice 需要引入处在 $|0\rangle_4$ 态的第 4 个自旋 1/2 粒子 4,同样使粒子 1 和 4 构成海森堡 XX 相互作用系统.由此,整个四粒子系统在相互作用时间 $t = 2\arccos\dfrac{a}{b}/J$ 之后的量子态演化为

$$a\,|0000\rangle_{1234} - \mathrm{i}b\sin\left(\arccos\frac{a}{b}\right)|0111\rangle_{1234} + a\,|1110\rangle_{1234}. \tag{6}$$

随后,Alice 对粒子 4 执行 σ_z 自旋测量,若测量结果为 $|0\rangle_4$ 态,则 3 个参与者就可成功得到最大纠缠的三

粒子 GHZ 态,成功概率为 $2a^2$.

综上所述,Alice 可以根据初始的纠缠态参数关系,选定自己的辅助粒子状态和相互作用时间,最终实现三粒子纠缠态的纠缠浓缩.通过进一步计算,以上的推论过程可以被推广到多粒子 GHZ 态浓缩的情况.

1.2　W 态

假设在初始 3 个空间上分离的参与者共享一个非局域的三粒子非最大纠缠态 W 态:

$$|W\rangle = a\,|001\rangle_{123} + b\,|010\rangle_{123} + c\,|100\rangle_{123}\,, \tag{7}$$

其中粒子 1、2、3 分别属于 Alice、Bob 和 Charlie.不失一般性,首先假设参数已知且满足 $a > b > c$.在此基础上,Bob 和 Charlie 各自引入一个初态为 $|0\rangle$ 态的自旋 1/2 粒子 4 和 5,并且使粒子 2 和 4 以及粒子 3 和 5 分别构成海森堡 XX 相互作用系统,则在形如公式(1)的哈密顿量的支配下,整个五粒子联合系统的量子态在 t 时间内的演化过程可以表示为:

$$\begin{aligned}
&(a\,|001\rangle + b\,|010\rangle + c\,|100\rangle)_{123}\,|00\rangle_{45} \rightarrow \\
&\quad a\,|000\rangle_{124}\left(\cos\frac{Jt_1}{2}\,|10\rangle - \mathrm{i}\sin\frac{Jt_1}{2}\,|01\rangle\right)_{35} + b\,|000\rangle_{135}\left(\cos\frac{Jt_2}{2}\,|10\rangle - \mathrm{i}\sin\frac{Jt_2}{2}\,|01\rangle\right)_{24} = \\
&\quad \left(a\cos\frac{Jt_1}{2}\,|0001\rangle + b\cos\frac{Jt_2}{2}\,|010\rangle + c\,|100\rangle\right)_{123}|00\rangle_{45} - \\
&\quad \mathrm{i}a\sin\frac{Jt_1}{2}\,|00001\rangle_{12345} - \mathrm{i}b\sin\frac{Jt_2}{2}\,|00010\rangle_{12345}.
\end{aligned} \tag{8}$$

取相互作用时间 $t_1 = 2\arccos\dfrac{c}{a}/J$,且 $t_2 = \arccos\dfrac{c}{b}/J$,则上式的量子态演化为

$$|\psi\rangle = c\,|00100\rangle + c\,|01000\rangle + c\,|10000\rangle - \mathrm{i}a\sin\left(\arccos\frac{c}{a}\right)|00001\rangle - \mathrm{i}b\sin\left(\arccos\frac{c}{b}\right)|00010\rangle. \tag{9}$$

然后,Bob 和 Charlie 分别对各自手中的粒子 4 和 5 执行自旋测量,若测量结果为 $|00\rangle_{45}$ 态,则演化之后的系统末态坍缩为

$$|W'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle_{123} + |010\rangle_{123} + |100\rangle_{123}). \tag{10}$$

由此就得到最大纠缠的三粒子 W 态,成功概率为 $3c^2$.在纠缠浓缩过程中,只需要局域的海森堡相互作用和单粒子测量操作,就可以在分离的 3 个参与者之间建立三粒子最大纠缠态通道.

与 GHZ 态的纠缠浓缩方案类似,若初始 W 纠缠态的参数 a,b,c 之间满足不同的大小关系,则需要不同的参与者引入处在不同状态的辅助粒子来完成最后的纠缠浓缩过程.例如,若 $a < b < c$,就需要 Alice 和 Bob 各自引入一个初态为 $|0\rangle$ 态的自旋 1/2 粒子 4 和 5,并且使粒子 1 和 4 以及粒子 2 和 5 分别构成海森堡 XX 相互作用系统;经过合适的相互作用时间和自旋测量之后,3 个参与者即可成功地得到最大纠缠的三粒子 W 态,成功概率为 $3a^2$.

2　结论

本文利用海森堡 XX 自旋相互作用提出了多粒子非最大自旋纠缠态的纠缠浓缩方案.该方案通过采用合适的局域量子操作和单比特测量即可实现多粒子纠缠态 GHZ 态和 W 态的浓缩,简单可行.相比于早期的纠缠浓缩方案,本方案不需要对初始纠缠态资源进行多个拷贝,并且最后得到的最大纠缠态中的各量子比特分别属于空间上分离的参与者,因此本方案可以作为远距离量子通信或者分布式量子计算方案的纠缠通道.

参考文献:

[1] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen chnannels[J]. Phys Rev Lett, 1993,70:1895-1899.

[2] Zheng S B, Guo G C. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED[J]. Phys Rev Lett, 2000,85:2392-2395.

[3] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, et al. Quantum entanglemnet[J]. Rev Mod Phys, 2009,81:865-942.

[4] Greenberger D M, Horne M A, Shimony A, et al. Bell's theorem without inequalities[J]. American Journal of Phusics, 1990,58(12):1131-1143.

[5] Dür W, Vidal G, Cirac J I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways[J]. Phys Rev A, 2000,62(6):062314.

[6] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. New York: Cambridge University Press, 2000.

[7] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S, et al. Concentrating partial entanglement by local operations[J]. Phys Rev A, 1996,53:2046.

[8] Bennett C H, Brassard G, Popescu S, et al. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels[J]. Phys Rev Lett, 1996,76(5):722-725.

[9] Bose S, Vedral V, Knight P L. Purification via entanglement swapping and conserved entanglement[J]. Phys Rev A, 1999,60:194.

[10] Kwiat P G, Barraza-Lopez S, Stefanov A, et al. Experimental entanglement distillation and "hidden" non-locality [J]. Nature(London), 2001,409:1014.

[11] Pan J W, Gasparoni S, Ursin R, et al. Experimental entanglement purification of arbitrary unknown states[J]. Nature(London), 2003,423:417.

[12] Zhao Zhi, Yang Tao, Chen Yu-Ao, et al. Experimental realization of entanglement concentration and a quantum repeater[J]. Phys Rev Lett, 2003,90:207901.

[13] Sheng Y B, Zhou L, Zhao S M. Efficient two-step entanglement concentration for arbitrary W states[J]. Phys Rev A, 2012,85:042302.

[14] Ji Y Q, Jin Z, Zhu A D, et al. Concentration of multi-photon entanglement with linear optics assisted by quantum nondemolition detection[J]. J Opt Soc Am B, 2014,31(5):994-999.

[15] Wang C, Zhang Y, Jin G. Entanglement purification and concentration of electron-spin entangled states using quantum-dot spins in optical microcavities[J]. Phys Rev A, 2011,84:032307.

[16] He L, Cao C, Wang C. Entanglement concentration for multi-particle partially entangled W state using nitrogen vacancy center and microtoroidal resonator system[J]. Optics Commun, 2013,298/299(1):260-266.

[17] Torun G, Yildiz A. Canonical operators and the optimal concentration of three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger states[J]. Phys Rev A, 2014,89:032320.

[18] Zhu M Z, Ye L. Efficient entanglement purification for Greenberger-Horne-Zeilinger states via the distributed parity-check detector[J]. Optics Commun, 2015,334(1):51-57.

[19] McDermott R, Simmonds R W, Steffen M, et al. Simultaneous state measurement of coupled Josephson phase qubits[J]. Science, 2005,307:1299-1302.

[20] Loss D, DiVincenzo D P. Quantum computation with quantum dots[J]. Phys Rev A, 1998,57(1):120-126.

[21] Cheng L Y, Shao X Q, Zhang S, et al. Implementation of positive-operator-value measurements for single spin qubit via Heisenberg model[J]. Chin Phys B, 2010,19(9):140-144.

[22] 徐晶. 海森伯 XXZ 自旋链的通用量子门解法[J]. 延边大学学报(自然科学版),2010,36(4):317-320.

[23] Piao M Z, Wang H F, Shao X Q, et al. Generation of multi-qubit graph states via spin networks[J]. Int J Theor Phys, 2011,50(10):3033-3042.