文章编号: 1004-4353(2018)01-0019-03

AANA 阵列部分和的收敛性

王宽程
(闽南理工学院 信息管理学院, 福建 泉州 362700)

摘要: 利用 AANA 序列的性质及 Markov 不等式,研究了比 NA 序列更弱的 AANA 阵列部分和的收敛性. 利用截尾方法和矩不等式,证明了 AANA 阵列的完全收敛性,所得结果改进和推广了文献[8]的结果.

关键词: AANA 阵列; 部分和; 完全收敛性
中图分类号: O211.4　　　　**文献标识码:** A

Convergence of the partial sums for sequence of AANA random variable

WANG Kuancheng
(*School of Information Management, Minnan University of Science and Technology, Quanzhou* 362700, *China*)

Abstract: By using the property of asymptotically almost negatively associated sequences and the Markov inequality, we studied the convergence of the partial sums of asymptotically almost negative associated random matrix sequences, which is weaker than negatively associated in this paper. We investigated the complete convergence for the arrays of asymptotically almost AANA by using the means moment inequality and truncated method. The results presented in this paper extend the results of document [8].

Keywords: arrays of AANA; partial sums; complete convergence

0 引言

定义 1[1]　称$\{X_n; n\in\mathbf{N}\}$为渐近几乎负相依(简称 AANA)随机变量序列,如果存在非负序列$q(n)\to 0\ (n\to\infty)$,对任意的$n,k\geqslant 1$都有

$$\mathrm{Cov}(f(X_n),g(X_{n+1},\cdots,X_{n+k}))\leqslant q(n)(\mathrm{Var}(f(X_n))\mathrm{Var}(g(X_{n+1},\cdots,X_{n+k})))^{1/2},$$

其中f和g是任何两个使上述方差存在且对每个变元均为非降的连续函数. 称$\{q(n); n\in\mathbf{N}\}$为该序列的混合系数.

AANA 序列是包含 NA 序列(只要令$q(n)=0$, $n\geqslant 1$)和独立列的更广泛的随机变量序列[1]. 显然, AANA 序列比 NA 序列更弱. 此外, AANA 序列也不同于 ANA 列[2]. 近年来,有关 AANA 序列的研究已取得不少的成果[3-7],但对于 AANA 随机阵列的研究还比较少;因此,本文研究 AANA 阵列部分和的收敛性,推广和改进了文献[8] 中 NA 列和独立列情形的相关结论.

本文中,称随机阵列$\{X_{ni}; 1\leqslant i\leqslant n, n\in\mathbf{N}\}$是行为 AANA 阵列,固定$n$,假设每一行内的随机变量列$\{X_{nk}\}$是 AANA 的;以$C$记与$n$无关的正常数,且$C$在不同的地方可表示不同的值,即使在同一式子

收稿日期: 2017-10-18　　**基金项目:** 福建省中青年教师教育科研项目(JAT170739)
作者简介: 王宽程(1981—),男,讲师,研究方向为概率极限理论.

中也是如此;$S_j \triangleq \sum_{i=1}^{j} X_{ni}$,“$\ll$”表示通常的大“$O$”.

1 相关引理

引理1[1] 设$\{X_n;n \in \mathbf{N}\}$为AANA序列,混合系数为$\{q(n);n \in \mathbf{N}\}$.若$\{f_n;n \in \mathbf{N}\}$皆是单调非降(或者单调非增)连续函数,则$\{f_n(x_n);n \in \mathbf{N}\}$仍然是AANA序列,其混合系数仍然是$\{q(n);n \in \mathbf{N}\}$.

引理2[3] 设$\{X_n;n \in \mathbf{N}\}$为零均值的AANA序列,混合系数为$\{q(n);n \in \mathbf{N}\}$,满足$\sum_{n=1}^{\infty} q^2(n) < \infty$,那么存在仅依赖于$p$的正常数$C_p$,使得当$1 < p \leqslant 2$时,$E(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| \sum_{i=1}^{j} X_i \right|^p) \leqslant C_p \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p$.

2 结果及其证明

定理1 设$\{X_{ni},i \in \mathbf{N},n \geqslant 1\}$是零均值的行为AANA阵列,其混合系数$\{q(n),n \geqslant 1\}$满足$\sum_{n=1}^{\infty} q^2(n) < \infty$,且对$1 < p < 2$,$\delta > 2/p - 1$,有$\lim_{x \to \infty} \sup_{n \in \mathbf{N}} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x^{1+\delta} P(|X_{ni}|^p \geqslant x) = 0$,则对任意的$\varepsilon > 0$,若$\alpha p \geqslant 1$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} P(|S_n| > n^{\alpha} \varepsilon) < \infty. \tag{1}$$

证明 取$x = n^{\alpha(2-p)/4}$,当$n \to \infty$时,$x \to \infty$.对X_{ni}截尾,分别记:

$$X'_{ni} = -x I_{(X_{ni} \leqslant -x)} + X_{ni} I_{(|X_{ni}| < x)} + x I_{(X_{ni} \geqslant x)},$$

$$X''_{ni} = X_{ni} - X'_{ni} = (X_{ni} + x) I_{(X_{ni} \leqslant -x)} + (X_{ni} - x) I_{(X_{ni} \geqslant x)},$$

$$S'_j = \sum_{i=1}^{j} X'_{ni},$$

$$S''_j = \sum_{i=1}^{j} X''_{ni}.$$

由引理1知,X'_{ni}及X''_{ni}仍是AANA列,$\forall \varepsilon > 0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(|S_n - ES_n| > n^{\alpha} \varepsilon) \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(|S'_n - ES'_n| > n^{\alpha} \varepsilon/2) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(|S''_n - ES''_n| > \varepsilon n^{\alpha}/2) = I_1 + I_2,$$

因此证明式(1),只需证$I_1 < \infty$,$I_2 < \infty$即可.

由引理2、Morkov不等式和$|X'_{ni}| \leqslant x$,有

$$I_1 \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} \sum_{i=1}^{n} E(X'_{ni} - EX'_{ni})^2 \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} \sum_{i=1}^{n} E(X'_{ni})^2 \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha(2-p)/2} < \infty.$$

由Morkov不等式和引理2有

$$I_2 \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} E(|S''_n - ES''_n|^p) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} E|X''_{ni}|^p =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} (E|X_{ni} + x|^p I_{(X_{ni} \leqslant -x)} + E|X_{ni} - x|^p I_{(X_{ni} \geqslant x)}) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}|^p I_{(|X_{ni}| \geqslant x)} \ll$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^{x^p} + \int_{x^p}^{\infty}\right) P(|X_{ni}|^p I_{(|X_{ni}| \geqslant x)} > t) \mathrm{d}t =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^{x^p} P(|X_{ni}| \geqslant x) \mathrm{d}t + \int_{x^p}^{\infty} P(|X_{ni}|^p > t) \mathrm{d}t\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\sum_{i=1}^{n}x^{p}P(|X_{ni}|\geqslant x)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\int_{x^{p}}^{\infty}P(|X_{ni}|^{p}>t)\mathrm{d}t.$$

由已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}x^{1+\delta}P(|X_{ni}|^{p}\geqslant x)=0$ 可知 $\exists M>0$. 当 $x>M$ 时，有

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}P(|X_{ni}|^{p}\geqslant x)\leqslant x^{-1-\delta}.$$

又因为 $x=n^{\alpha(2-p)/4}$，所以 $\exists N>0$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $x>M$，故

$$I_2=\sum_{n=1}^{N-1}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}n^{-1}E|X_{ni}|^{p}+\sum_{n=N}^{\infty}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left[n^{-1}xP(|X_{ni}|^{p}\geqslant x)+\int_{x^{p}}^{\infty}n^{-1}P(|X_{ni}|^{p}>t)\mathrm{d}t\right]\ll$$

$$C+\sum_{n=N}^{\infty}n^{-1}x^{-\delta}+\sum_{n=N}^{\infty}n^{-1}\int_{x^{p}}^{\infty}t^{-1-\delta}\mathrm{d}t\ll\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{nx^{\delta}}+\sum_{n=N}^{\infty}n^{-1}\int_{x^{p}}^{\infty}\frac{1}{t^{1+\delta}}\mathrm{d}t\ll$$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha\delta(2-p)/4}}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta\alpha p(2-p)/4}}<\infty.$$

定理证毕.

若令 $q(n)=0\ (n\geqslant 1)$，则可得下列推论：

推论 1　设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是零均值的 NA 列，且对 $1<p<2$，$\delta>2/p-1$，有

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\in\mathbf{N}}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}x^{1+\delta}P(|X_i|^{p}\geqslant x)=0,$$

则对 $\alpha p\geqslant 1$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}P\left(\left|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right|>n^{\alpha}\varepsilon\right)<\infty$，$\forall\varepsilon>0$.

参考文献：

[1] Chandra T K, Ghosal S. Extensions of the strong law of number of Marcinkiewicz and Zygmund for dependent variables[J]. Acta Mathematical Hungarica, 1996,71(4):327-336.

[2] Zhang L X, Wang X Y. Convergence rates in the strong laws of asymptotically negatively associated random fields [J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 1999,14(4):406-416.

[3] Yuan D M, An J. Rosenthal type inequalities for asymptotically almost negatively associated random variables and applications[J]. Sci China Ser A, 2009,52(9):1887-1904.

[4] Ko M H, Kim T S, Lin Z. The Hajek-Renyi inequality for the AANA random variables and its applications[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2005,9(1):111-122.

[5] Wang X J, Hu S H, Li X Q, et al. Maximal inequalities and strong law of large numbers for AANA sequences [J]. Communications of Korean Mathematical Society, 2011,26:151-161.

[6] 徐怀，唐玲. AANA 序列部分和的收敛性质[J]. 浙江大学学报(理学版)，2013,40(4):396-400.

[7] 邱德华. AANA 随机变量序列加权和的 Teicher 型强大数律[J]. 应用数学，2013,26(2):410-417.

[8] 吴群英，王远清，伍艳春. NA 阵列行和最大值的若干极限定理[J]. 应用概率统计，2006,22(1):56-62.