文章编号: 1004-4353(2018)01-0014-05

Banach 空间变系数的一阶非线性微分方程的正周期解

李小龙
(陇东学院 数学与统计学院, 甘肃 庆阳 745000)

摘要: 讨论了 Banach 空间 E 中变系数的一阶非线性常微分方程 $u'(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t))$, $t\in\mathbf{R}$ 正 ω-周期解的存在性,其中 $a(t)\in C(\mathbf{R},(0,+\infty))$, $f:\mathbf{R}\times P\to P$ 连续, P 为 E 中的正元锥. 利用凝聚映射的不动点指数理论获得了该问题正 ω-周期解的存在性,所得结果改进和推广了文献[5-8] 中的相关结论.

关键词: 闭凸锥; 周期解; 凝聚映射; 不动点指数
中图分类号: O175.15 **文献标识码**: A

Positive periodic solutions for nonlinear first order differential equations with changing of coefficents in Banach spaces

LI Xiaolong
(*College of Mathematics and Statistics*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*)

Abstract: The existence of positive ω-periodic solutions for first order differential equations $u'(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t))$, $t\in\mathbf{R}$ in Banach spaces E was discussed, where $a(t)\in C(\mathbf{R},(0,+\infty))$, $f:\mathbf{R}\times P\to P$ is continuous, and P is the cone of positive elements in E. An existence result of positive ω-periodic solutions was obtained by using the fixed point index theory of condensing mapping. The results extended and improved the relevant conclusion in the literature [5-8].

Keywords: closed convex cone; periodic solution; condensing mapping; fixed point index

0 引言

设 E 为实的 Banach 空间,正元锥 P 为正规锥,本文考虑 E 中的变系数非线性一阶常微分方程

$$u'(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t)),\ t\in\mathbf{R} \tag{1}$$

的正 ω-周期解的存在性,其中: $a(t)\in C(\mathbf{R},(0,+\infty))$,以 ω 为周期; $f:\mathbf{R}\times P\to P$ 连续,关于 t 以 ω 为周期. 问题(1) 等价于 E 中的周期边值问题:

$$\begin{cases}u'(t)+a(t)u(t)=f(t,u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant\omega;\\ u(0)=u(\omega).\end{cases} \tag{2}$$

因为当问题(1) 的 ω-周期解限制在 $I=[0,\omega]$ 上时即为问题(2) 的解,而以 ω 为周期的问题(2) 的解延拓到 $\mathbf{R}$ 上即为问题(1) 的解.

周期现象常出现在自然变化、经济运转、工程技术等方面,在对其的相关研究中,有关 $a(t)$ 为常数的情形已有很多研究结果[1-8],在这些研究中采用的方法主要是拓扑度及相关的不动点方法与上下解

收稿日期: 2018-01-11 **作者简介**: 李小龙(1976—),男,副教授,研究方向为抽象微分方程及其应用.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11561038);甘肃省高等学校科研项目(2016B-103)

的单调迭代方法.本文将利用凝聚映射的不动点指数理论讨论当 $a(t)$ 不为常数时方程(2)正解的存在性.

在一般的 Banach 空间中，将微分方程转化为与之等价的积分方程后，相应的积分算子不再具有紧性.如若对积分算子应用凝聚映射的不动点指数理论，通常需要给 f 附加一些非紧性测度条件.本文假设 f 满足如下非紧性测度条件：

(H_0) 对 $\forall R>0$，$f(I\times P_R)$ 有界，且存在常数 $L=L_R\in\left(0,\dfrac{\sigma-1}{4\sigma}\right)$ 使得对 $\forall t\in I$，$D\subset P_R$，有 $\alpha(f(t,D))\leqslant L\alpha(D)$，其中 $P_R=\{x\in P:\|x\|\leqslant R\}$，$\sigma=\mathrm{e}^{\int_0^\omega a(\theta)\mathrm{d}\theta}$.

在非紧性测度条件下，文献[5]中要求非线性项 f 在有界集上一致连续，本文利用新的非紧性测度的计算与估计技巧[9]删去了对 f 在有界集上一致连续的要求，所得结果改进和推广了文献[5-8]中的相关结论.

1　预备知识

设 $C(I,E)$ 为定义于 I 取值于 E 的全体连续函数按范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$ 构成的 Banach 空间.记 $C(I,P)=\{u\in C(I,E)\,|\,u(t)\in P,\ t\in I\}$，则 $C(I,P)$ 为 $C(I,E)$ 中的正规锥.以下使用的 $C(I,E)$ 中的半序 $\leqslant$ 由 $C(I,P)$ 引出.定义算子 Q 如下：

$$(Qu)(t)=\int_0^\omega G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\,\mathrm{e}^{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta}}{\sigma-1},\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega;\\[2ex] \dfrac{\mathrm{e}^{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta}}{\sigma-1},\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega,\end{cases} \tag{4}$$

则 $Q:C(I,P)\to C(I,P)$ 连续，且方程(2)的解等价于算子 Q 的不动点.本文将用凝聚映射的不动点指数理论寻找 Q 的不动点，先证明在条件(H_0)下，$Q:C(I,P)\to C(I,P)$ 为凝聚映射，为此引入非紧性测度的相关结果.本文中 E 与 $C(I,E)$ 中有界集的 Kuratiwski 非紧性测度均由 $\alpha(\cdot)$ 表示.对 $B\subset C(I,E)$，记 $B(t)=\{u(t)\,|\,u\in B\}\subset E$，$t\in I$.

引理 1[1]　设 $B\subset C(I,E)$ 为等度连续的有界函数族，则 $\alpha(B(t))$ 在 I 上连续，且 $\alpha(B)=\max\limits_{t\in I}\alpha(B(t))$.

引理 2[10]　设 $B=\{u_n\}\subset C(I,E)$ 为可列集，若存在 $\psi\in L^1(I)$ 使得 $\|u_n(t)\|\leqslant\psi(t)$ a.e，$t\in I$，$n=1,2,\cdots$，则 $\alpha(B(t))$ 在 I 上可积，且 $\alpha\left(\left\{\int_I u_n(t)\mathrm{d}t\right\}\right)\leqslant 2\int_I\alpha(B(t))\mathrm{d}t$.

引理 3[9]　设 $D\subset E$ 有界，则存在 D 的可列子集 D_0，使得 $\alpha(D)\leqslant 2\alpha(D_0)$.

引理 4　设 $f:I\times P\to P$ 满足假设(H_0)，则由式(3)定义的算子 $Q:C(I,P)\to C(I,P)$ 为凝聚映射.

证明　由式(3)易证，Q 把 $C(I,P)$ 中的有界集映为有界的等度连续集.任取非相对紧的有界集 $B\subset C(I,P)$，下证 $\alpha(Q(B))<\alpha(B)$.令 $R=\sup\{\|u\|\,|\,u\in B\}$，则对 $\forall t\in I$，$B(t)\subset P_R$，设 $L=L_R\in\left(0,\dfrac{\sigma-1}{4\sigma}\right)$ 为假设(H_0)中的非紧性测度系数.由引理 3 知，存在可列集 $B_1=\{u_n\}\subset B$，使得 $\alpha(Q(B))\leqslant 2\alpha(Q(B_1))$.故对 $\forall t\in I$，由引理 2 及假设(H_0)，有

$$\alpha(Q(B_1(t)))=\alpha\left(\left\{\int_0^\omega G(t,s)f(s,u_n(s))\mathrm{d}s\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}\right)\leqslant$$

$$2\int_0^\omega\alpha(\{G(t,s)f(s,u_n(s))\,|\,n=1,2,\cdots\})\mathrm{d}s=2\int_0^\omega G(t,s)\alpha(f(s,B_1(s)))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$2L\int_0^{\omega}G(t,s)\alpha(B_1(s))\mathrm{d}s\leqslant 2L\int_0^{\omega}G(t,s)\mathrm{d}s\cdot\alpha(B_1)\leqslant 2\frac{\sigma L}{\sigma-1}\cdot\alpha(B_1).$$

因为 $Q(B_1)$ 等度连续,由引理 1 知 $\alpha(Q(B_1))=\max\limits_{t\in I}\alpha(Q(B_1(t)))\leqslant 2\dfrac{\sigma L}{\sigma-1}\cdot\alpha(B_1)$, 于是有

$$\alpha(Q(B))\leqslant 2\alpha(Q(B_1))\leqslant 4\frac{\sigma L}{\sigma-1}\cdot\alpha(B_1)\leqslant 4\frac{\sigma L}{\sigma-1}\cdot\alpha(B)<\alpha(B),$$

因此 $Q: C(I,P)\to C(I,P)$ 为凝聚映射.

由式(4) 易知,Green 函数 $G(t,s)$ 具有性质:$\dfrac{1}{\sigma-1}\leqslant G(t,s)\leqslant\dfrac{\sigma}{\sigma-1}$, $t,s\in I$. 取 $C(I,P)$ 的子锥:

$$K=\left\{u\in C(I,P)\,\middle|\,u(t)\geqslant\frac{1}{\sigma}u(\tau),\ \forall\, t,\tau\in I\right\}.\tag{5}$$

引理 5 设 $f: I\times P\to P$, 则 $Q(C(I,P))\subset K$.

证明 对 $\forall\, u\in C(I,P)$, $\forall\, t,\tau\in I$, 由式(3) 有

$$(Qu)(\tau)=\int_0^{\omega}G(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{\sigma}{\sigma-1}\int_0^{\omega}f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

另一方面

$$(Qu)(t)=\int_0^{\omega}G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{\sigma}\,\frac{\sigma}{\sigma-1}\int_0^{\omega}f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{\sigma}Qu(\tau),$$

由式(5) 知,$Qu\in K$, 因此 $Q(C(I,P))\subset K$.

由以上知当 $f: I\times P\to P$ 时,$Q: K\to K$ 为凝聚映射,方程(2) 的正解等价于 Q 在 K 中的不动点. 本文将用凝聚映射的不动点指数理论寻找 Q 的不动点.

引理 6[11] 设 E 为 Banach 空间,K 为 E 中的锥,$\Omega\subset E$ 为有界开集,$\theta\in\Omega$, $\Omega: K\cap\bar{\Omega}\to K$ 为凝聚映射. 若 Q 满足 $u\neq\lambda Qu$, $\forall\, u\in K\cap\partial\Omega$, $0<\lambda\leqslant 1$, 则不动点指数 $i(Q,K\cap\Omega,K)=1$.

引理 7[12] 设 E 为 Banach 空间,K 为 E 中的锥,$\Omega\subset E$ 为有界开集,$\theta\in\Omega$,$\Omega: K\cap\bar{\Omega}\to K$ 为凝聚映射. 若存在 $v_0\in K$, $v_0\neq\theta$, 使得 Q 满足 $u-Qu\neq\mu v_0$, $\forall\, u\in K\cap\partial\Omega$, $\mu\geqslant 0$, 则不动点指数 $i(Q, K\cap\Omega,K)=0$.

2 主要结果及证明

定理 1 设 E 为 Banach 空间,其正元锥 P 为正规锥,$f: I\times P\to P$ 连续,满足条件(H_0). 若 f 满足下列条件(H_1) 或(H_2),则方程(1) 至少存在一个正 ω-周期解:

(H_1) 1) 存在 $\varepsilon\in(0,a(t))$ 及 $\delta>0$, 使得当 $x\in P_\delta$ 时,$f(t,x)\leqslant(a(t)-\varepsilon)x$; 2) 存在 $\eta>0$ 及 $h_0\in C(I,P)$, 使得当 $x\in P$ 时,$f(t,x)\geqslant(a(t)+\eta)x-h_0(t)$.

(H_2) 1) 存在 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$, 使得当 $x\in P_\delta$ 时,$f(t,x)\geqslant(a(t)+\varepsilon)x$; 2) 存在 $\eta\in(0,a(t))$ 及 $h_0\in C(I,P)$, 使得当 $x\in P$ 时,$f(t,x)\leqslant(a(t)-\eta)x+h_0(t)$.

证明 由上面的论述知,只需证明由式(3) 定义的凝聚映射 $Q: K\to K$ 存在非零的不动点即可. 取 $0<r<R<\infty$, 记 $\Omega_r=\{u\in K\mid\|u\|<r\}$, $\partial\Omega_r=\{u\in K\mid\|u\|=r\}$. 以下分两种情形分别证明当 r 充分小、R 充分大时 Q 在 $K\cap(\Omega_R\backslash\bar{\Omega}_r)$ 上存在不动点.

情形 1 f 满足假设(H_1). 取 $0<r<\delta$, 其中 δ 为假设(H_1) 中的常数,证明 Q 满足引理 6 中的条件:

$$u\neq\lambda Qu,\ \forall\, u\in K\cap\partial\Omega_r,\ 0<\lambda\leqslant 1.\tag{6}$$

反设式(6) 不成立,则存在 $u_0\in K\cap\partial\Omega_r$ 及 $0<\lambda_0\leqslant 1$, 使得 $u_0=\lambda_0 Qu_0$. 按 Q 的定义,u_0 满足微分方程:

$$\begin{cases}u_0'(t)+a(t)u_0(t)=f(t,u_0(t)),\ t\in I;\\ u_0(0)=u_0(\omega).\end{cases}\tag{7}$$

将方程(7) 的第 1 式在 I 上积分,并应用假设(H_1) 之 1),有

$$\int_0^\omega a(t)u_0(t)\mathrm{d}t=\lambda_0\int_0^\omega f(t,u_0(t))\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega (a(t)-\varepsilon)u_0(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $0<\varepsilon<a(t)$，故由上式有 $\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t\leqslant\theta$.

另一方面，因为 $u_0\in K$，按锥 K 的定义，$u_0(t)\geqslant\frac{1}{\sigma}u_0(s)\geqslant\theta,\forall t,s\in I$. 在 I 上积分，得

$$\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{\omega u_0(s)}{\sigma}\geqslant\theta,\tag{8}$$

即 $u_0(s)=\theta$ 于 I. 此与 $u_0\in K\cap\partial\Omega(\|u\|=r)$ 矛盾，因此式(6) 成立. 由引理 6 知，

$$i(Q,K\cap\Omega_r,K)=1.\tag{9}$$

取 $e\in P$ 使得 $\|e\|=1$，令 $v_0(t)=e$，则 $v_0(t)$ 是 $f(t,u(t))=a(t)e$ 时方程(2) 的解. 由 Green 函数的性质易知 $v_0\in K\backslash\{\theta\}$，下证当 R 充分大时有

$$u-Qu\neq\tau v_0,\forall u\in K\cap\partial\Omega_R,\ \tau\geqslant 0.\tag{10}$$

反设存在 $u_0\in K\cap\partial\Omega_R$ 及 $\tau_0\geqslant 0$，使得 $u_0-Qu_0=\tau_0v_0$，则 $u_0-\tau_0v_0=Qu_0$. 按算子 Q 的定义，u_0 满足微分方程

$$u_0'(t)+a(t)(u_0(t)-\tau_0v_0(t))=(Qu_0)'(t)+a(t)Qu_0(t)=f(t,u_0(t)),\ t\in I.\tag{11}$$

按假设(H_1) 之 2)，有 $u_0'(t)+a(t)u_0(t)=f(t,u_0(t))+a(t)\tau_0v_0(t)\geqslant(a(t)+\eta)u_0(t)-h_0(t),\ t\in I$. 注意到 $u_0=\tau_0v_0+Qu_0$ 满足边界条件 $u(0)=u(\omega)$，将上式两边在 I 上积分得

$$\int_0^\omega a(t)u_0(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^\omega(a(t)+\eta)u_0(t)\mathrm{d}t-\int_0^\omega h_0(t)\mathrm{d}t,$$

从而有 $\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\eta}\int_0^\omega h_0(t)\mathrm{d}t$. 再结合式(8)，有 $\theta\leqslant u_0(s)\leqslant\frac{\sigma}{\omega\eta}\int_0^1 h_0(t)\mathrm{d}t,\forall s\in I$. 由锥 P 的正规性，有

$$\|u_0(s)\|\leqslant N\left\|\frac{\sigma}{\omega\eta}\int_0^\omega h_0(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant N\frac{\sigma}{\eta}\|h_0\|:=\bar{R},\tag{12}$$

式中 N 为正规常数. 取 $R>\max\{\bar{R},r\}$，则式(10) 成立. 由引理 7 知，$i(Q,K\cap\Omega_R,K)=0$. 根据不动点指数理论的区域可加性，由上式结合式(9) 有

$$i(Q,K\cap(\Omega_R\backslash\bar{\Omega}_r),K)=i(Q,K\cap\Omega_R,K)-i(Q,K\cap\Omega_r,K)=-1.$$

由可解性知 Q 在 $K\cap(\Omega_R\backslash\bar{\Omega}_r)$ 中至少存在一个不动点，该不动点即为方程(1) 的正 ω-周期解.

情形 2　f 满足假设(H_2). 取 $0<r<\delta$，证明

$$u-Qu\neq\tau v_0,\forall u\in K\cap\partial\Omega_r,\ \tau\geqslant 0,\tag{13}$$

其中 $v_0(t)=e\in K$. 反设式(13) 不成立，则存在 $u_0\in K\cap\partial\Omega_r$ 及 $\tau_0\geqslant 0$，使得 $u_0-Qu_0=\tau_0v_0$，于是 $u_0(t)$ 满足微分方程(11). 由式(11) 及假设(H_2) 之 1) 有

$$u_0'(t)+a(t)u_0(t)=f(t,u_0(t))+a(t)\tau_0v_0(t)\geqslant(a(t)+\varepsilon)u_0(t),\ t\in I.$$

将上式两边在 I 上积分，得 $\int_0^\omega a(t)u_0(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^\omega(a(t)+\varepsilon)u_0(t)\mathrm{d}t$，从而有 $\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t\leqslant\theta$. 再结合式(8) 可得 $u_0(s)=\theta$ 于 I，此与 $u_0\in\partial\Omega_r$ 矛盾，因此式(13) 成立. 由引理 7 知

$$i(Q,K\cap\Omega_r,K)=0.\tag{14}$$

再证当 R 充分大时，有

$$u\neq\lambda Qu,\forall u\in K\cap\partial\Omega_R,\ 0<\lambda\leqslant 1.\tag{15}$$

假设存在 $u_0\in K$ 及 $0<\lambda_0\leqslant 1$，使得 $u_0=\lambda_0Qu_0$，则 u_0 满足微分方程(7). 将方程(7) 两边在 I 上积分，并应用假设(H_2) 之 2) 得

$$\int_0^\omega a(t)u_0(t)\mathrm{d}t=\lambda_0\int_0^\omega f(t,u_0(t))\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega(a(t)-\eta)u_0(t)\mathrm{d}t+\int_0^\omega h_0(t)\mathrm{d}t,$$

从而有 $\int_0^{\omega} u_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\eta}\int_0^{\omega} h_0(t)\mathrm{d}t$. 由上式和式(8)可证 u_0 满足式(12). 取 $R > \max\{\bar{R}, r\}$，则式(15)成立. 由引理 6 知，$i(Q, K\cap\Omega_R, K)=1$，再结合式(14)有 $i(Q, K\cap(\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r), K)=i(Q, K\cap\Omega_R, K)-i(Q, K\cap\Omega_r, K)=1$. 由可解性知 Q 在 $K\cap(\Omega_R\setminus\bar{\Omega}_r)$ 中至少存在一个不动点，该不动点即为方程(1)的正 ω-周期解.

参考文献:

[1] 郭大钧，孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南：山东科学技术出版社，1989:188-222.

[2] 孙经先. Banach 空间常微分方程的解[J]. 数学学报，1990,33(3):374-380.

[3] 宋福民. Banach 空间中微分方程的弱 Caratheodory 解[J]. 数学学报，1998,41(6):1265-1272.

[4] 李永祥. 抽象一阶周期边值问题解的存在性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，1998,34(4):1-5.

[5] 李永祥. 有序 Banach 空间常微分方程的正周期解[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2002,38(1):1-5.

[6] Li Yongxiang. Positive periodic solutions of first and second order ordinary differential equations[J]. Chin Ann Math, 2004,25B(3):413-420.

[7] 李小龙. 有序 Banach 空间常微分方程正周期解的存在性[J]. 系统科学与数学，2012,35(2):190-196.

[8] 朱雯雯. 带参数的一阶周期边值问题正解的存在性及多解性[J]. 山东大学学报(理学版)，2016,51(12):36-41.

[9] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]. 数学学报，2005,48(6):1103-1108.

[10] Heinz H R. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differention and integration of vector-valued functions[J]. Nonlinear Anal, 1983,7(12):1351-1371.

[11] 余庆余. 半序 Banach 空间中凝聚映射及其正不动点[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，1979,15(3):1-5.

[12] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，1985:234-353.

(上接第 13 页)

$W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛，且其极限一定属于 $W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\subseteq \dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times \dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$.

运用紧嵌入 $\dot{W}_\rho^{2,p}\times\dot{W}_\rho^{2,p}\subset W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 可得到定理 1 的证明. 吸引子 $\mathscr{A}$ 为：

$$\mathscr{A}=\{(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\in W_\rho^{1,p}\times W_\rho^{1,p}:\text{存在 }\mathscr{B}_1\text{ 中的序列}\{(u_n,\vartheta_n)^{\mathrm{T}}\},\ t_n\to\infty,\text{使}$$

$$\mathscr{S}(t_n,\theta_{-t_n}(\omega))(u_n,\vartheta_n)\xrightarrow{W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)}(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\}.$$

参考文献:

[1] Babin A V, Vishik M I. Attractors of partial differential evolution equations in an unbounded domain[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1990,116(3/4):221-243.

[2] Arrieta J M, Rodríguez-Bemal A, Cholewa J W, et al. Linear parabolic equations in locally uniform spaces[J]. Math Models Method Appl Sci, 2004,14(2):253-293.

[3] Cholewa J W, Dlotko T. Strongly damped wave equation in uniform spaces[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2006,64(1):174-187.

[4] Shen Z, Zhou S, Shen W. One-dimensional random attractor and rotation number of the stochastic damped sine-Gordon equation[J]. Journal of Differential Equations, 2014,248(6):1432-1457.

[5] Feireisl E. Bounded, locally compact global attractors for semilinear damped wave equations on R^N[J]. Diff Inter Eqns, 1996,9(5):1147-1156.

[6] Wang Zhaojuan, Zhou Shengfan, Gu Anhui. Random attractor of the stochastic strongly damped wave equation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2002,17(4):1649-1658.

[7] Cholewa J W, Dlotko T. Global Attractors in Abstract Parabolic Problems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000,10(1):54-69.