文章编号：1004-4353(2018)01-0007-07

随机半线性强衰减波动方程在局部一致空间上的吸引子

杜萍， 杨玉彤， 刘爽， 韩英豪*

（辽宁师范大学 数学学院，辽宁 大连 116029）

摘要： 在无界区域 $\mathbf{R}^n$ 中考虑了具有可加噪声的随机强衰减半线性波动方程的 Cauchy 问题，在相空间 $X=\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$ 中证明了该方程的整体可解性和随机吸引子的存在性. 为解决该方程相关联的半群 $\mathcal{S}(t,\omega)$ 的弱渐近紧性问题，首先证明了集合 $\mathcal{B}_1:=\mathcal{S}(1,\omega)\gamma^+(\mathcal{B}_0)$ 在空间 $D(L)=\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)$ 中的有界性，其中 $\mathcal{B}_0$ 是半群 $\mathcal{S}(t,\omega)$ 在相空间 X 中的吸收集；然后利用紧嵌入定理 $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\subseteq\dot{W}_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 得到了集合 $\mathcal{B}_1$ 在相空间 X 中的弱渐近紧性.

关键词： 强衰减随机波动方程；无界区域；局部一致空间；随机吸引子

中图分类号： O211.63；O175.29　　**文献标识码：** A

Attractor for stochastic semilinear strongly damped wave equations in locally uniform spaces

DU Ping, YANG Yutong, LIU Shuang, HAN Yinghao*

(*School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029, *China*)

Abstract: In this paper, we consider the Cauchy problem for the stochastic strongly damped semilinear wave equations with additive noisein the unbounded domain-$\mathbf{R}^n$. The global solvability and the existence of the stochastic attractor to this problem are proved in the phase space $X=\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$. To study to the asymptotic compactness of the corresponding semigroup $\mathcal{S}(t,\omega)$, we first prove the set $\mathcal{B}_1:=\mathcal{S}(1,\omega)\gamma^+(\mathcal{B}_0)$ is bounded in $D(L)=\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)$, where $\mathcal{B}_0$ is the absorbing set of in $\mathcal{S}(t,\omega)$ in X, then we use the compact embedding theorems $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\subseteq\dot{W}_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ obtain the compactness of the set $\mathcal{B}_1$ in the phase space X.

Keywords: strongly damped stochastic wave equation; unbounded domain; locally uniform space; stochastic attractor

0 引言

本文在局部一致空间上研究了具有可加噪声的随机强衰减半线性波动方程

$$\begin{cases}u_{tt}-\alpha\Delta u_t-\Delta u+\beta u_t=f(u)+g(x)+\sum_{j=1}^{m}h_j\dot{W}_j,\ x\in\mathbf{R}^n,\ t>0;\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=v_0(x),\ x\in\mathbf{R}^n\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期： 2018－01－12

* **通信作者：** 韩英豪(1963—)，男，理学博士，副教授，研究方向为无穷维动力系统.

的整体解的存在性和长时间动力行为,上述方程中:$n \geqslant 3$;α 和 β 为给定正常数;对 $0 < q < (n+2)/(n-2)$,非线性项 f 具有 $|u|^q$ 的增长率;W_j 为相互独立的一维双边标准实值 Winer 过程.

近年来,随机无穷维动力系统的理论研究及其相关应用备受关注.虽然有关随机强衰减波动方程的研究已有较大进展,但因在无界区域上因 Sobolev 嵌入不再是紧致,Sobolev 空间嵌套公式不再成立,且经典的 Sobolev 空间不包括行波解及常数解等原因,一般的 Sobolev 空间作为上述方程的相空间来研究上述方程的渐近紧性仍不够理想.1990 年,A.V.Babin 等在文献[1]中利用加权空间证明了抛物型方程吸引子的存在性.2004 年,J.Arrieta 等在文献[2]中系统地研究了局部一致空间的相关性质,得到了较完整的有关线性抛物型方程解的存在性与相关动力学理论.

本文在相空间 $X = \dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n) \times \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$ $(p > \dfrac{n}{2}, p \geqslant 2)$ 上证明方程(1)的整体解的存在性和随机拉回吸引子的存在性.针对无界区域中嵌入公式的非紧性以及强衰减波动方程的传播速度的无限性等问题,采用弱紧性对渐近紧性进行处理.

本文对权函数 $\rho \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R}^n)$ 施加如下条件:

$$\left|\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant \rho_0 \rho(x),\ \left|\frac{\partial^2 \rho(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leqslant \rho_1 \rho(x),\ x \in \mathbf{R}^n,\ j,k = 1,\cdots,n. \tag{2}$$

其中 ρ_0 和 ρ_1 是正常数.在等价范数意义下,满足条件(2)的任意严格正可积函数 ρ 都可生成相同的局部一致空间 $W_{lu}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$,$\dot{W}_{lu}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$,$m = 0,1,2$,$p \geqslant 1$.因而不妨设存在充分小的 $\delta > 0$,使得

$$|\nabla \rho| \leqslant C_0 \sqrt{\delta}\rho. \tag{3}$$

1 线性强衰减波动方程和一致空间

本文假设,非线性项 f 满足如下增长条件:存在常数 $C_1 > 0$,使得

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant C_1 |s_1 - s_2| (1 + |s_1|^{q-1} + |s_2|^{q-1}),\ s_1, s_2 \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

由此可以得出:存在常数 $C_2 > 0$,使得

$$|f(s)| \leqslant C_2 (1 + |s|^q),\ s \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

其中 $n = 1,2$ 时,$q \geqslant 1$;当 $n \geqslant 3$ 时,$1 \leqslant q \leqslant \dfrac{n+2}{n-2}$.

另外,非线性项 f 还满足耗散条件:$\exists C_3, C_4, C_5, \sigma > 0$,$k \geqslant 1$,对任意 $s \in \mathbf{R}$,有:

$$sf(s) - kF(s) \leqslant -\sigma s^2 + C_3; \tag{6}$$

$$F(s) \leqslant C_4; \tag{7}$$

$$F(s) \geqslant C_5 (|s|^{p+1} - 1). \tag{8}$$

其中 $F(s) = \int_0^s f(z)\mathrm{d}z$.

本文主要证明如下定理:

定理 1 假设 $\alpha > 0$,$\alpha\beta \geqslant 1$,$p > n/2$,$p \geqslant 2$,$g \in \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$,$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为局部 Lipschitz 连续函数,且满足条件(5)—(7),则在局部一致空间 $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n) \times \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$,$p > \dfrac{n}{2}$,$p \geqslant 2$ 中方程(1)存在整体解.用 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 表示整体解相对应的 C^0-半群,那么对 $n \geqslant 3$,$q < (n+2)/(n-2)$,$\mathscr{S}(t,\omega)$ 满足结论:

(i) 在空间 $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n) \times \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$ 中的任意有界集合关于动力过程 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 的轨道为有界,并且 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 在该空间中存在有界正不变的吸收集 $\mathscr{B}_1$;

(ii) $\mathscr{S}(t,\omega)$ 在 $\mathscr{B}_1$ 上的限制在度量空间 $V = cl_{H_\rho^1(\mathbf{R}^n) \times L_\rho^2(\mathbf{R}^n)}(\mathscr{B}_1)$ 中可连续扩张,并且 $V \subset \dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \times$

$\dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$；

(iii) $\mathcal{S}(t,\omega)$ 存在一个吸引子 $\mathcal{A}\subset V$，满足：① 在 V 中，$\mathcal{A}$ 关于 $\mathcal{S}(t,\omega)$ 是正不变的；② $\mathcal{A}$ 在 $W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 中是紧的；③ 在 $\dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 中，$\mathcal{A}$ 是有界闭集；④ $\mathcal{A}$ 是关于 Hausdorff 半度量 $d=d_{W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)\times W_\rho^{1,p}(\mathbf{R}^n)}$ 吸引 $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$ 中的任意有界集.

本文利用稠密嵌入公式 $C_{bd}^\infty(\mathbf{R}^n)\subset\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\subset\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$，且对方程(1)的线性部分有以下结论：

引理 1[3]　对任意 $\omega>0$，$p\in(1,\infty)$，当 $\omega=\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\alpha\beta\geqslant 1$，$\operatorname{Re}\sigma(L)>0$ 时，线性算子 $L=\begin{pmatrix}0 & -I\\ \omega I-\Delta & \beta I-\alpha\Delta\end{pmatrix}$ 在相空间 $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$ 中是扇形算子，其定义域为 $D(L)=\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)$.

推论 1[3]　如果 $\alpha>0$，$\omega=\beta/\alpha$，$\alpha\beta\geqslant 1$，那么线性算子 L 在相空间 $\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$，$p\in(1,\infty)$ 中生成强连续解析半群 $\{\mathrm{e}^{-Lt}\}$，满足：

$$\|L^\gamma\mathrm{e}^{-Lt}\|_{L(\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n),\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n))}\leqslant c_\gamma\frac{\mathrm{e}^{-at}}{t^\gamma},\ \gamma\geqslant 0,\ t>0,$$

其中 c_γ 和 a 都是正常数.

2　半线性方程的局部解和先验估计

2.1　随机项的基本设定

容易看出，Ornstein-Uhlenbeck 过程 $z_j(\theta_t\omega_j)=-\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^s(\theta_t\omega_j)(s)\mathrm{d}s$ 是微分方程 $\mathrm{d}z_j+z_j\mathrm{d}t=\mathrm{d}W_j(t)$ 的一个解，并且是缓增的. 另一方面，存在 P 测度 1 的 θ_t -不变的集合 $\tilde{\Omega}\subset\Omega$，对任意 $\omega\in\tilde{\Omega}$，$j=1,2,\cdots,m$，映射 $t\mapsto z_j(\theta_t\omega)$ 是连续的. 因而不妨设 $\Omega=\tilde{\Omega}$，并令 $z(\theta_t\omega)=z(x,\theta_t\omega)=\sum_{j=1}^m h_j(x)z_j(\theta_t\omega)$，则该过程是随机方程 $\mathrm{d}z+z\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^m h_j\mathrm{d}W_j$ 的一个解.

引理 2[4]　对任意 $\lambda>0$，存在缓增随机变量 $r,r^l:\Omega\mapsto\mathbf{R}^+$，$l=\dfrac{1}{2},1$；对所有 $t\in\mathbf{R}$，$\omega\in\Omega$，满足：

$$\|z(\theta_t\omega)\|\leqslant\mathrm{e}^{\lambda|t|}r(\omega),\ \mathrm{e}^{-\lambda|t|}r(\omega)\leqslant r(\theta_t\omega)\leqslant\mathrm{e}^{\lambda|t|}r(\omega);$$
$$\|(-\Delta)^{(l)}z(\theta_t\omega)\|\leqslant\mathrm{e}^{\lambda|t|}r^l(\omega),\ \mathrm{e}^{-\lambda|t|}r^{(l)}(\omega)\leqslant r(\theta_t\omega)\leqslant\mathrm{e}^{\lambda|t|}r^{(l)}(\omega),$$

其中 $r^{(l)}(\omega)=\sum_{j=1}^m r_j(\omega_j)\|(-\Delta)^l h_j\|$.

2.2　线性方程局部解的存在性

为了方便，令 $v=u_t$，$\psi_1=u$，$\psi_2=v-z(\theta_t\omega)$，将方程(1)转化为具有随机参数的确定性方程：

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=\psi_2+z(\theta_t\omega),\\ \dot{\psi}_2=\Delta\psi_1-(-\alpha\Delta+\beta)\psi_2-(-\alpha\Delta+\beta-1)z(\theta_t\omega)+f(\psi_1)+g(x).\end{cases}\tag{9}$$

通过变量替换 $\vartheta=u_t+\varepsilon u-z(\theta_t\omega)$，方程(9)可化为如下矩阵形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}u\\ \vartheta\end{pmatrix}=-(H(u,\vartheta))+\begin{pmatrix}z(\theta_t\omega)\\ f(u)+g(x)-(-\alpha\Delta+\beta-1-\varepsilon)z(\theta_t\omega)\end{pmatrix},\tag{10}$$

其中

$$H(u,\vartheta)=\begin{pmatrix}\varepsilon u-\vartheta\\ -\Delta u-\varepsilon(-\alpha\Delta-\varepsilon)u+(-\alpha\Delta-\varepsilon)\vartheta+\beta(\vartheta-\varepsilon u)\end{pmatrix}.$$

此时,初值条件变成$\begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix}_{t=0}=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0+\varepsilon u_0-z(\theta_\tau \omega) \end{pmatrix}$.

基于引理 1 的结论,即得空间$\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$中的局部解存在性.

定理2 设 f 满足条件(4)—(8),且 $g(x)\in \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$,则在空间 $X=\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)\times \dot{L}_{lu}^{p}(\mathbf{R}^n)$ 中,方程(1)的整体解存在;因而,在 X 中可定义一个 C^0 -半群 $\mathscr{S}(t,\omega)$. 具体地说,对任意$(u_0,\vartheta_0)\in X$, $T>0$,方程(1) 存在唯一的关于初始条件连续依赖的解:

$$(u,\vartheta)\in C([0,T),X)\cap C^1((0,T),X)\cap C((0,T),D(L)).$$

证明 根据抽象抛物方程理论以及引理 1 的结论可知,只需证明$(0,f(\cdot)+g-(-\alpha\Delta+\beta-1)z(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}}$ 在 X 中局部 Lipschitz 连续,即证明 $\dot{W}_{lu}^{2,p}$ 到 $\dot{L}_{lu}^{p}$ 上是 $f(\cdot)$ 局部 Lipschitz 的即可. 对任意的 $u_1,u_2\in \dot{W}_{lu}^{2,p}$ 和 $y\in \mathbf{R}^n$,根据后面证明的引理 4 和引理 5 中给出的关于 u 在 $\dot{W}_{lu}^{2,p}$ 中的有界性以及嵌入公式 $\dot{W}_{lu}^{2,p}\subset C_b(\mathbf{R}^n)$,可得到

$$\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho(x)\,|f(u_1)-f(u_2)|^p\mathrm{d}x\leqslant C_1^p\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho(x)(1+|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})^p\,|u_1-u_2|^p\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C'\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho(x)\,|u_1-u_2|^p\mathrm{d}x\leqslant C'\|u_1-u_2\|^p_{\dot{W}_{lu}^{2,p}(\mathbf{R}^n)},$$

其中常数 C' 取决于 C_1 和 $\|u_i\|_{\dot{W}_{lu}^{2,p}}(i=1,2)$ 的大小.

记 $E_y=H^1_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)\times L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)$. 在 E_y 中定义内积. 对给定的 $\mu\in(0,1)$,令

$$\langle(\varphi_1,\varphi_2),(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}\rangle_{E_y}=\mu\langle\nabla\varphi_1,\nabla\psi_1\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\mu\varepsilon\langle\varphi_1,\psi_1\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\langle\varphi_2,\psi_2\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}.$$

由文献[5] 中的引理 2 得出,线性问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix}=-H(u,\vartheta),\\ \begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix}_{t=0}=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0+\varepsilon u_0 \end{pmatrix}\end{cases}$$

的解$(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}$,当 $\varepsilon>0$ 足够小,$\mu=1-\varepsilon\alpha$ 时,有如下关系式:

$$\langle H(u,\vartheta),(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\rangle_{E_y}\geqslant\frac{\mu\varepsilon}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\mu\varepsilon^2\|u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}\|\vartheta\|^2_{H^1_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+$$
$$(\varepsilon^2-\mu\varepsilon-\beta\varepsilon)\langle u,\vartheta\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}. \tag{11}$$

再估计如下定义的能量函数 $\mathscr{E}_y: X\to\mathbf{R}$:

$$\mathscr{E}_y(\phi,\psi)=\frac{\mu}{2}\|\nabla\phi\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{\mu\varepsilon}{2}\|\phi\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\int_{\mathbf{R}^n}F(\phi)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^n}g\phi\tau_y\rho\,\mathrm{d}x,$$

从而得到方程(9) 的局部解在相空间$\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)$上的一致估计.

引理 3 假设条件(6)、(7) 成立,方程(9) 的局部解$(u,\vartheta)=(u(t),\vartheta(t))$存在,函数$(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}=(u,\psi_2+\varepsilon u)^{\mathrm{T}}$ 满足方程(1),则有 $\mathscr{E}_y(u,\vartheta)(t,\theta_{-t}\omega,(u_0,\vartheta_0))_{E_y}\leqslant\rho(\omega)$,其中 ε 是给定的正常数.

证明 将方程(10) 的两边与$(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}$ 在 E_y 中做内积,由 $\vartheta=u_t+\varepsilon u-z(\theta_t\omega)$ 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\|^2_{E_y}=-\langle H(u,\vartheta),(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\rangle_{E_y}+\mu\langle\nabla z,\nabla u\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\mu\varepsilon\langle z,u\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-$$
$$\langle(\beta-1-\varepsilon)z,\vartheta\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\alpha\langle(-\Delta)z,\vartheta\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\langle f(u)+g(x),z\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+$$
$$\langle f(u)+g(x),u_t+\varepsilon u\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}. \tag{12}$$

下面将分别估计式(12) 右端的每一项. 首先,根据 Hölder 不等式有:

$$\mu\langle\nabla z,\nabla u\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\frac{\mu}{\varepsilon}\|\nabla z\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{\mu\varepsilon}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)},\tag{13}$$

$$\mu\varepsilon\langle z,u\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\frac{\mu}{2}\|z\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{\mu\varepsilon^2}{2}\|u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}.\tag{14}$$

利用非线性项 f 的假设条件(5) 和(8) 以及 Hölder 不等式，再根据引理(2) 得

$$-\langle f(u),z\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C_2\varepsilon\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+C_2\frac{1}{\varepsilon}\|\nabla z\|^{q+1}_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+C_6,\tag{15}$$

其中 $C_6=C_2\int_{\mathbf{R}^n}|z|\tau_y\rho\,\mathrm{d}x$. 另外，根据 Hölder 不等式有

$$-\langle g(x),z\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}[g(x)(\tau_y\rho)^{\frac{1}{2}}]\cdot[z(\tau_y\rho)^{\frac{1}{2}}]\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{1}{2}\|z\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}.\tag{16}$$

再根据 Green 公式以及估计式(3) 得：

$$-\alpha\langle(-\Delta)z,\vartheta\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant2\alpha\|\nabla z\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{\alpha}{2}\|\nabla\vartheta\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+C^2\delta\|\vartheta\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)};\tag{17}$$

$$-(\beta-1-\varepsilon)\langle z,\vartheta\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant(\beta-1-\varepsilon)\|z\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{\beta-\varepsilon-C^2\delta}{2}\|\vartheta\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)};\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\langle f(u)+g(x),u_t+\varepsilon u\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}gu\tau_y\rho\,\mathrm{d}x\right]+\\&\varepsilon\int_{\mathbf{R}^n}f(u)u\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\mathbf{R}^n}gu\tau_y\rho\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{19}$$

根据条件(6) 得

$$\int_{\mathbf{R}^n}uf(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x\leqslant k\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x-\sigma\int_{\mathbf{R}^n}u^2\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+C_3\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x.\tag{20}$$

把上述估计式(14)—(20) 和不等式(11) 带入式(12) 中，并且令 $\delta<\frac{\beta}{2(1+\alpha+C^2)}$，则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\|^2_{E_y}\leqslant&-\frac{\mu\varepsilon}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\frac{\mu\varepsilon^2}{2}\|u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-(\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{4}-\frac{C^2\delta}{2})\|\vartheta\|^2_{H^1_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}gu\tau_y\rho\,\mathrm{d}x\right]+\varepsilon(k+C_1)\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x-\varepsilon\sigma\int_{\mathbf{R}^n}u^2\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\\&\varepsilon C_3\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x-(\varepsilon^2-\mu\varepsilon-\beta\varepsilon)\langle u,\vartheta\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\varepsilon\Re(\theta_{-t}\omega),\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $\Re(\theta_{-t}\omega)=\left(\frac{\mu}{\varepsilon^2}+\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)\|\nabla z\|^2+\frac{\mu+\beta-\varepsilon}{2\varepsilon}\|z\|^2+\frac{C_1}{\varepsilon^2}\|\nabla z\|^{q+1}+\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{C_3}{\varepsilon}$. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_y(u,\vartheta)\leqslant&-\frac{\mu\varepsilon}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\frac{\mu\varepsilon^2}{2}\|u\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-(\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{4}-\frac{C^2\delta}{2})\|\vartheta\|^2_{H^1_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\\&\varepsilon(k+C_1)\int_{\mathbf{R}^n}F(u)\tau_y\rho\,\mathrm{d}x-\varepsilon\sigma\int_{\mathbf{R}^n}u^2\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\varepsilon C_3\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x-(\varepsilon^2-\mu\varepsilon-\beta\varepsilon)_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\\&\varepsilon\int_{\mathbf{R}^n}gu\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\varepsilon\Re(\theta_{-t}\omega).\end{aligned}$$

注意到 $\mu\in(0,1)$，$\mu=1-\varepsilon\alpha$，$\alpha\beta\geqslant1$. 考虑到非线性项 f 满足的条件(7)，当 ε 和 δ 取值充分小($\beta>\varepsilon$)时，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_y(u,\vartheta)\leqslant&-\varepsilon\mathscr{E}_y(u,\vartheta)+\varepsilon C_3\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\varepsilon(k-1+C_1)C_4\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\varepsilon\Re(\theta_t\omega)=\\&-\varepsilon\mathscr{E}_y(u,\vartheta)+\varepsilon\left[(C_3+(k-1+C_1)C_4)\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\Re(\theta_t\omega)\right].\end{aligned}$$

令 $\Re_1(\theta_t\omega)=(C_3+(k-1+C_2)C_4)\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\,\mathrm{d}x+\Re(\theta_t\omega)$，则根据广义 Gronwall 引理，对所有 $t\geqslant0$ 有

$$\mathscr{E}_y(u,\vartheta)(t,\theta_{-t}\omega,(u_0,\vartheta_0))_{E_y}\leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathscr{E}_y(u_0,\vartheta_0)_{E_y}+\varepsilon\int_{-t}^{0}\Re_1(\theta_\xi\omega)\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\mathrm{d}\xi.$$

根据文献[6]中的引理3.3,令 $\lambda=\dfrac{\sigma}{4}$,可得

$$\int_{-t}^{0}\Re_1(\theta_\xi\omega)\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\mathrm{d}\xi\leqslant\int_{-t}^{0}\widetilde{\Re}_1(\xi,\omega)\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\mathrm{d}\xi\leqslant\int_{-\infty}^{0}\widetilde{\Re}_1(\xi,\omega)\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}\mathrm{d}\xi<+\infty,$$

其中 $\widetilde{\Re}_1(\xi,\omega)=(C_3+(k-1+C_2)C_4)\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\mathrm{d}x+\left(\dfrac{\mu}{\varepsilon^2}+\dfrac{2\alpha}{\varepsilon}\right)(\mathrm{e}^{\frac{\sigma|\xi|}{4}}r^{\frac{1}{2}}(\omega))^2+\dfrac{\mu+\beta-\varepsilon}{2\varepsilon}(\mathrm{e}^{\frac{\sigma|\xi|}{4}}r(\omega))^2+\dfrac{C_1}{\varepsilon^2}(\mathrm{e}^{\frac{\sigma|\xi|(q+1)}{4}}r^{\frac{q+1}{2}}(\omega))+\dfrac{1}{2\varepsilon}+\dfrac{C_3}{\varepsilon}$. 从而,对于任何 $(u_0,\vartheta_0)\in B(\theta_{-t}\omega)$,$\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}(u_0,\vartheta_0)_{E_y}=0$. 于是存在一个 $T=T(\omega;B)>0$,对所有 $t\geqslant T$,不等式 $\mathscr{E}_y(u,\vartheta)(t,\theta_{-t}\omega,(u_0,\vartheta_0))_{E_y}\leqslant\rho(\omega)$ 成立,其中 $\rho^2(\omega)=\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}\widetilde{\Re}_1(\tau,\omega)\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\mathrm{d}\tau$. 证毕.

注1 显然,由引理3以及 f 满足的条件(7)可得 $(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}$ 在 E_y 上有如下估计:

$$\frac{\mu\varepsilon}{2}\|u\|^2_{H^1_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\frac{1}{2}\|\vartheta\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}\leqslant\rho(\omega)+C_4\int_{\mathbf{R}^n}\tau_y\rho\mathrm{d}x+\frac{\mu\varepsilon}{4}\int_{\mathbf{R}^n}u^2\tau_y\rho\mathrm{d}x+\frac{1}{\mu\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^n}g^2\tau_y\rho\mathrm{d}x.$$

进而得到一致估计

$$\min\left\{\frac{\mu\varepsilon}{4},\frac{1}{2}\right\}(\|u\|^2_{\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)}+\|\vartheta\|^2_{\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)})\leqslant 3(\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\rho(\omega)+C_7),\tag{22}$$

其中 $C_7=C_4\|\rho\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}+\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\|g\|^2_{\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)}$.

3 整体解和吸收集的存在性

当对非线性项施加适当的增长条件时,方程(1)的局部解在相空间 $X=\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^p_{lu}(\mathbf{R}^n)$ 上可扩充为整体解,并可得出耗散性结果. 下面首先讨论方程在空间 X 中的整体解的一致有界性和渐近估计.

引理4 假设 $g\in\dot{L}^p_{lu}(\mathbf{R}^n)$,$p>n/2$,$p\geqslant 2$,$\alpha>0$,并且条件(6)和(7)成立,则在增长条件(5)下,方程(9)的局部解在 X 上整体存在. 进而,当 $\alpha\beta\geqslant 1$,$n\geqslant 3$ 时,对 $q<(n+2)/(n-2)$ 有如下估计:

$$\|(u,v)^{\mathrm{T}}\|_X\leqslant C_1(\omega)(\|(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}\|_X),\ t\geqslant 0;\tag{23}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{\|(u_0,v_0)\|_X\leqslant r}\|(u,v)^{\mathrm{T}}\|_X\leqslant C_2(\omega).\tag{24}$$

其中 $C_1(\omega)$ 是与 r 无关的常数,$C_2(\omega)$ 是与 r 相关的常数.

证明 在此仅考虑 $n\geqslant 3$ 的情况,其他情形可简单重复下面情形即可推得. 根据方程(9)存在局部解 $(u,v)^{\mathrm{T}}$,以及在 $\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)$ 上对 t 的一致估计式(22),得

$$\|(u,v)^{\mathrm{T}}\|^2_{\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C_1(\omega)\|(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}\|^2_{\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)}.$$

由增长条件(5)可知,对 $n\geqslant 3$,$q\leqslant(n+2)/(n-2)$,函数 $F(u_0)$ 的增长为 $c(1+|u_0|)^{q+1}$. 因而 $\|F(u_0)\|_{L^1_{lu}(\mathbf{R}^n)}$ 可由 u_0 在 $\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)$ 中的范数来控制. 依据条件(5)和Nirenberg-Gagliardo不等式,并注意到 $(n/2-n/pq-1)/(n/2-n/p+1)\leqslant\theta<1/q$,$q\in[1,(n+2)/(n-2)]$,有

$$\|f(u)\|_{\dot{L}^p_{lu}(\mathbf{R}^n)}\leqslant C_8(1+\|u\|^{\theta q}_{\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)}\cdot\|u\|^{(1-\theta)q}_{\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)}),$$

从而得到

$$\left\|\left(0,f(u)+\frac{\beta}{\alpha}u+g(x)-(-\alpha\Delta+\beta-1)z(\theta_{-t}\omega)\right)^{\mathrm{T}}\right\|_X\leqslant$$

$$(C_9(\|(u,\vartheta)^{\mathrm{T}}\|^{(1-\theta)q}_{\dot{H}^1_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)})+R_0(\theta_{-t}\omega))(1+\|(u,v)^{\mathrm{T}}\|^{\theta q}_X),$$

其中 θq 取值为 $\theta q<1$，并且 $R_0(\theta_{-t}\omega)=\|g\|_{\dot{L}^p_{lu}(\mathbf{R}^n)}+(-\alpha\Delta+\beta-1)\|z(\theta_{-t}\omega)\|_{\dot{L}^p_{lu}(\mathbf{R}^n)}$. 由于 $\alpha\beta\geqslant 1$，因此如下微分方程的线性部分在 X 中是一个扇形正算子：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -I\\ \dfrac{\beta}{\alpha}I-\Delta & \beta I-\alpha\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ f(u)+\dfrac{\beta}{\alpha}u+g(x)-(-\alpha\Delta+\beta-1)z(\omega)\end{pmatrix}. \tag{25}$$

方程(25)等价于方程(9)，因此可得到与方程(25)相应的积分方程. 根据文献[7]中的式(2.2)，可得到方程整体解的存在性，并且式(23)成立. 根据文献[3]中的注解 1 和文献[7]中的 4.1 中的结果，以及 Gronwall 引理得出

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{\|(u_0,v_0)\|_X\leqslant r}\|(u,v)^{\mathrm{T}}\|_X\leqslant C_2(\omega),$$

其中 $C_2(\omega)=\int_{-\infty}^{0}R_0(\xi,\omega)\mathrm{e}^{C_8\xi}\mathrm{d}\xi$. 根据引理 2 中的不等式，得到 $\int_{-\infty}^{0}R_0(\xi,\omega)\mathrm{e}^{C_8\xi}\mathrm{d}\xi$ 的收敛性.

需要说明的是，对 $n\geqslant 3$，当 $\alpha\beta<1$ 或 $q=(n+2)/(n-2)$，从局部解的存在性依然可推出整体解的存在性. 然而，由于线性半群可能不再是衰减，有可能是严格递增，按上述所用的方法将得不到式(23)和式(24)的结果.

当 $p>n/2$，$p\geqslant 2$ 时，在 $X=\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{L}^2_{lu}(\mathbf{R}^n)$ 中定义半群 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 为方程(9)的整体解形成的一个 C^0-半群. 根据式(24)定义的半群 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 在 X 中的一个吸收集记为 $\mathscr{B}_0$，由式(23)和(24)的结果可知，$\gamma^+(\mathscr{B}_0)$ 也是 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 吸收集，而且是有界的. 根据文献[7]中的引理 3.2.1 得出，集合 $\mathscr{B}_1:=\mathscr{S}(1,\omega)\gamma^+(\mathscr{B}_0)$ 在 $D(L)=\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)$ 中有界.

引理 5　假设条件(5)—(7)成立，而且 $\alpha>0$，$\alpha\beta\geqslant 1$，$p>n/2$，$p\geqslant 2$，则从 $\mathscr{B}_1$ 到 $cl_{H^1_\rho(\mathbf{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbf{R}^n)}(\mathscr{B}_1)$ 的半群 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 在相空间 $H^1_\rho(\mathbf{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbf{R}^n)$ 上可以连续扩充. 进而，

$$cl_{H^1_\rho(\mathbf{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbf{R}^n)}(\mathscr{B}_1)\subset\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)\times\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n).$$

证明　取 $(u_0^1,v_0^1),(u_0^2,v_0^2)\in\mathscr{B}_1$，并且记 $U=(u^1-u^2)$，则有：

$$\begin{cases}U_{tt}-\alpha\Delta U_t-\Delta U+\beta U_t=f(u^1)-f(u^2),\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^n;\\ U(0,x)=u_0^1(x)-u_0^2(x),\ U_t(0,x)=u_1^1(x)-u_1^2(x),\ x\in\mathbf{R}^n.\end{cases}$$

由于 $n\geqslant 3$，$\mathscr{B}_1$ 在 $D(L)$ 中有界，而且 $p>n/2$ 时，$\dot{W}^{2,p}_{lu}(\mathbf{R}^n)\subset L^\infty(\mathbf{R}^n)$，因而存在一个常数 $M=M(\mathscr{B}_1)>0$，有

$$\forall u^1,u^2\in\mathscr{B}_1,\ |f(u^1)-f(u^2)|\leqslant M|u^1-u^2|. \tag{26}$$

因而得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(U,V)^{\mathrm{T}}\|^2_{E_y}\leqslant-\frac{\mu\varepsilon}{2}\|\nabla U\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\mu\varepsilon^2\|U\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}\|V\|^2_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}+\langle f(u^1)-f(u^2),V\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}-(\varepsilon^2-\mu\varepsilon-\beta\varepsilon)\langle U,V\rangle_{L^2_{\tau_y\rho}(\mathbf{R}^n)}, \tag{27}$$

其中 $V=U_t+\varepsilon U$. 利用式(26)、(27)和 Gronwall 引理得

$$\|(U,V)^{\mathrm{T}}(t)\|^2_{E_y}\leqslant\|(U_0,V_0)^{\mathrm{T}}(t)\|^2_{E_y}\mathrm{e}^{C_{10}t},$$

其中 $C_{10}=\max\left\{\varepsilon+\dfrac{\varepsilon(\varepsilon-\beta-\mu)}{2\mu},\varepsilon+M,1+\dfrac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}\right\}$.

这确保了对任意的 $\tau<0$，在 $H^1_\rho(\mathbf{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbf{R}^n)$ 中的任何柯西序列构成的初始条件 $\{(u_{n0},v_{n0})^{\mathrm{T}}\}\subset\mathbf{R}^n$ 导出 $C([\tau,0],H^1_\rho(\mathbf{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbf{R}^n))$ 中的柯西序列 $\{\mathscr{S}(t,\omega),(u_{n0},v_{n0})\}$，因此半群 $\mathscr{S}(t,\omega)$ 从 $\mathscr{B}_1$ 可以扩充到其闭包 $cl_{H^1_\rho(\mathbf{R}^n)\times L^2_\rho(\mathbf{R}^n)}(\mathscr{B}_1)$ 上.

根据文献[2]中的引理 4.8，$\mathscr{B}_1$ 在 $W^{1,p}_\rho(\mathbf{R}^n)\times W^{1,p}_\rho(\mathbf{R}^n)$ 中是预紧的，可知 $\mathscr{B}_1$ 中的任何序列在

(下转第 18 页)

从而有 $\int_0^{\omega} u_0(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\eta}\int_0^{\omega} h_0(t)\,\mathrm{d}t$. 由上式和式(8)可证 u_0 满足式(12). 取 $R > \max\{\bar{R}, r\}$,则式(15)成立. 由引理 6 知,$i(Q, K \cap \Omega_R, K) = 1$,再结合式(14)有 $i(Q, K \cap (\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r), K) = i(Q, K \cap \Omega_R, K) - i(Q, K \cap \Omega_r, K) = 1$. 由可解性知 Q 在 $K \cap (\Omega_R \setminus \bar{\Omega}_r)$ 中至少存在一个不动点,该不动点即为方程(1)的正 ω-周期解.

参考文献:

[1] 郭大钧,孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南:山东科学技术出版社,1989:188-222.
[2] 孙经先. Banach 空间常微分方程的解[J]. 数学学报,1990,33(3):374-380.
[3] 宋福民. Banach 空间中微分方程的弱 Caratheodory 解[J]. 数学学报,1998,41(6):1265-1272.
[4] 李永祥. 抽象一阶周期边值问题解的存在性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版),1998,34(4):1-5.
[5] 李永祥. 有序 Banach 空间常微分方程的正周期解[J]. 西北师范大学学报(自然科学版),2002,38(1):1-5.
[6] Li Yongxiang. Positive periodic solutions of first and second order ordinary differential equations[J]. Chin Ann Math, 2004,25B(3):413-420.
[7] 李小龙. 有序 Banach 空间常微分方程正周期解的存在性[J]. 系统科学与数学,2012,35(2):190-196.
[8] 朱雯雯. 带参数的一阶周期边值问题正解的存在性及多解性[J]. 山东大学学报(理学版),2016,51(12):36-41.
[9] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]. 数学学报,2005,48(6):1103-1108.
[10] Heinz H R. On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differention and integration of vector-valued functions[J]. Nonlinear Anal, 1983,7(12):1351-1371.
[11] 余庆余. 半序 Banach 空间中凝聚映射及其正不动点[J]. 兰州大学学报(自然科学版),1979,15(3):1-5.
[12] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,1985:234-353.

(上接第 13 页)

$W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \times W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 中收敛,且其极限一定属于 $W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \times W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \subseteq \dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \times \dot{W}_{lu}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$.

运用紧嵌入 $\dot{W}_{\rho}^{2,p} \times \dot{W}_{\rho}^{2,p} \subset W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \times W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ 可得到定理 1 的证明. 吸引子 $\mathscr{A}$ 为:

$$\mathscr{A} = \{(u, \vartheta)^{\mathrm{T}} \in W_{\rho}^{1,p} \times W_{\rho}^{1,p}:\text{存在 } \mathscr{B}_1 \text{ 中的序列} \{(u_n, \vartheta_n)^{\mathrm{T}}\},\ t_n \to \infty,\text{使}$$
$$\mathscr{S}(t_n, \theta_{-t_n}(\omega))(u_n, \vartheta_n) \xrightarrow{W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n) \times W_{\rho}^{1,p}(\mathbf{R}^n)} (u, \vartheta)^{\mathrm{T}}\}.$$

参考文献:

[1] Babin A V, Vishik M I. Attractors of partial differential evolution equations in an unbounded domain[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1990,116(3/4):221-243.
[2] Arrieta J M, Rodríguez-Bemal A, Cholewa J W, et al. Linear parabolic equations in locally uniform spaces[J]. Math Models Method Appl Sci, 2004,14(2):253-293.
[3] Cholewa J W, Dlotko T. Strongly damped wave equation in uniform spaces[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2006,64(1):174-187.
[4] Shen Z, Zhou S, Shen W. One-dimensional random attractor and rotation number of the stochastic damped sine-Gordon equation[J]. Journal of Differential Equations, 2014,248(6):1432-1457.
[5] Feireisl E. Bounded, locally compact global attractors for semilinear damped wave equations on R^N[J]. Diff Inter Eqns, 1996,9(5):1147-1156.
[6] Wang Zhaojuan, Zhou Shengfan, Gu Anhui. Random attractor of the stochastic strongly damped wave equation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2002,17(4):1649-1658.
[7] Cholewa J W, Dlotko T. Global Attractors in Abstract Parabolic Problems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000,10(1):54-69.