文章编号: 1004-4353(2018)01-0001-06

一类 1 维非线性 Schrödinger 方程组整体解的存在性及其时间衰减估计

林爽, 袁新桐, 李春花*
(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 考虑一类 1 维非线性 Schrödinger 方程组的初始值问题,采用因式分解法、能量法以及 Sobolev 不等式,证明了该方程整体解的存在性和解的时间衰减估计.

关键词: 1 维非线性 Schrödinger 方程组; 小初始值; 时间衰减估计
中图分类号: O175.29　　**文献标识码:** A

Global existence and time decay estimates of solutions for a system of 1D nonlinear Schrödinger equations

LIN Shuang, YUAN Xintong, LI Chunhua*
(*College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We consider a system of 1D nonlinear Schrödinger equations for arbitrarily small initial data. We prove the global existence of solutions and investigate the time decay estimates by using the factorization formula, energy method and Sobolev inequalities.

Keywords: a system of 1D nonlinear Schrödinger equations; small initial data; time decay estimates

0 引言

非线性系统理论在数学、量子力学和生命科学等领域中具有广泛的应用,其中非线性 Schrödinger 方程一直受到学者们的关注. 近年来,有关非线性 Schrödinger 方程组

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \dfrac{1}{2m_1}\partial_x^2 u_1 = \lambda_1 |u_1|^{p_1} u_1 + \mu_1 \bar{u}_1 u_2^2, \\ i\partial_t u_2 + \dfrac{1}{2m_2}\partial_x^2 u_2 = \lambda_2 |u_2|^{p_2} u_2 + \mu_2 \bar{u}_2 u_1^2, \\ u_j(0,x) = \phi_j(x) \end{cases} \tag{1}$$

的研究,已取得了不少的研究成果[1-3]. 1984 年, J. E. Barab[4] 证明了一类具有临界非线性项的 Schrödinger方程渐近自由解的非存在性. 2014 年, S. Katayama 等[2] 研究了一类具有临界非线性项的 2 维 Schrödinger 方程组解的整体存在性及其时间衰减估计. 2016 年, D. Kim[3] 研究了类似的具有临界非线性项的 1 维非线性 Schrödinger 方程组解的整体存在性及其时间衰减估计. 当 $p_1 > 2$, $p_2 = 2$ 时,方程组(1) 具有超临界和临界非线性项. 目前对具有临界和超临界非线性项的 Schrödinger 方程组解的长时

收稿日期: 2017－10－27　　**基金项目:** 延边大学自然科学基金资助项目(602014071)
* **通信作者:** 李春花(1977—),女,副教授,研究方向为偏微分方程.

间渐近行为的研究得较少.本文主要研究非线性 Schrödinger 方程组(1)的初始值问题,证明其整体解的存在性和解的时间衰减估计.这里 $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, m_j 是微观粒子的质量, u_j 是未知复值函数, $\lambda_j, \mu_j \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$, $j = 1, 2$, $p_1 > 2$, $p_2 = 2$.

1 预备知识

定义1 Lebesgue空间 $L^p(\mathbf{R})$,若 $1 \leqslant p < \infty$, $\|\phi\|_{L^p(\mathbf{R})} = (\int_{\mathbf{R}} |\phi(x)|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$;若 $p = \infty$, $\|\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = \operatorname{ess.sup}_{x \in \mathbf{R}} \phi|(x)|$.

定义2 若 $m, s \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant p < \infty$, Sobolev 空间

$$H_p^{m,s}(\mathbf{R}) = \{ f \in L^p(\mathbf{R});\ \|f\|_{H_p^{m,s}(\mathbf{R})} = \|(1 - \partial_x^2)^{\frac{m}{2}} (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p(\mathbf{R})} < \infty \}.$$

为了计算简便,记 $\|f\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|f\|$, $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = \|f\|_{L^\infty}$, $H_2^{m,s}(\mathbf{R}) = H^{m,s}$, $H^{m,0}(\mathbf{R}) = H^m$.

定义3 $(D_\delta \phi)(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{i}\delta)^{\frac{1}{2}}} \phi(\dfrac{x}{\delta})$, $\delta \neq 0$. $E = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}|\zeta|^2}$, $M = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2t}|x|^2}$, $t \neq 0$. $U_{\frac{1}{m}}(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2m}\mathrm{i}t\Delta}$,其中 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $m \neq 0$.

经计算可知,因式分解公式[1] $U_\delta(t)\phi = M^{-\frac{1}{\delta}} D_{\delta t} \mathscr{F} M^{-\frac{1}{\delta}} \phi$, $U_\delta(-t)\phi = \mathrm{i} M^{\frac{1}{\delta}} \mathscr{F}^{-1} \mathrm{E}^\delta D_{\frac{1}{\delta t}} \phi$,其中 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 分别表示Fourier变换和Fourier逆变换, $\mathscr{F}\varphi = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\zeta} \varphi(x) \mathrm{d}x$, $\mathscr{F}^{-1}\psi = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\zeta} \psi(\zeta) \mathrm{d}\zeta$. 并且伽利略变换算子 $J_{\frac{1}{m}}(t) = U_{\frac{1}{m}}(t) x U_{\frac{1}{m}}(-t) = x + \mathrm{i}\dfrac{t}{m}\partial_x$, $m \neq 0$ 与 $L_{\frac{1}{m}} = \mathrm{i}\partial_t + \dfrac{1}{2m}\partial_x^2$ 有交换关系,即 $[L_{\frac{1}{m}}, J_{\frac{1}{m}}] = 0$[1].

2 主要结果及其证明

在陈述主要定理之前,首先给出以下假设条件:

(H1) $m_1 = m_2$;

(H2) 存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{R}^+$,使得 $k_1\mu_1 = k_2\bar{\mu}_2$;

(H3) $\operatorname{Im}\lambda_j \leqslant 0$, $j = 1, 2$.

假设(H2)、(H3)成立,对于方程组(1),运用能量法[1]可得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{2} k_j \|u_j\|^2 \leqslant 0$.

定理1 假设(H1)—(H3)成立,则存在 $\varepsilon > 0$,当 $\sum_{j=1}^{2} \|\phi_j\|_{H^{0,1} \cap H^1} < \varepsilon$ 时,方程组(1)存在唯一的整体解 $u = (u_1, u_2) \in C([0, \infty); H^{0,1} \cap H^1)$,并且解的时间衰减估计为

$$\sum_{j=1}^{2} \|u_j(t)\|_{L^\infty} \leqslant C(1 + t)^{-\frac{1}{2}},\ t \geqslant 0.$$

注1[1] 假设 $\operatorname{Im}\lambda_j = 0$, (H1)、(H2)成立,且 $p_j = 2$, $j = 1, 2$. 则存在 $\varepsilon > 0$,当 $\sum_{j=1}^{2} \|\phi_j\|_{H^{0,1} \cap H^1} < \varepsilon$ 时,方程组(1)存在整体解,且时间衰减估计为 $\sum_{j=1}^{2} \|u_j(t)\|_{L^\infty} \leqslant C(1 + t)^{-\frac{1}{2}}$, $t \geqslant 0$.

注2[2-3] 假设 $\operatorname{Im}\lambda_j < 0$, (H1)、(H2)成立,且 $p_j = 2$, $j = 1, 2$. 则存在 $\varepsilon > 0$,当 $\sum_{j=1}^{2} \|\phi_j\|_{H^{0,1} \cap H^1} < \varepsilon$ 时,方程组(1)存在整体解,且时间衰减估计为 $\sum_{j=1}^{2} \|u_j(t)\|_{L^\infty} \leqslant C(1 + t)^{-\frac{1}{2}} (\log(t + 2))^{-\frac{1}{2}}$, $t \geqslant 0$.

令 $\|u\|_{X_T}=\sup_{t\in[0,T]}\sum_{j=1}^{2}((1+t)^{-\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}+(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u_j\|_{L^\infty})$,$T>0$. 这里 T 待定,$0<\varepsilon\ll 1$. 为证明定理 1,首先考虑下面引理:

引理 1　假设(H1)—(H3) 成立. 若 $\varepsilon>0$ 充分小,且 $\sum_{j=1}^{2}\|\phi_j\|_{H^{0,1}\cap H^1}<\varepsilon$,则存在 $T>1$ 及方程组(1) 唯一的解 $u=(u_1,u_2)\in X_T$,使得 $\|u\|_{X_T}\leqslant 2\varepsilon$.

对于方程组(1) 的局部解的存在性,可以用不动点定理证明[1]. 下面主要讨论整体解的存在性及其时间衰减估计. 令

$$F_1:=F_1(u_1,u_2)=\mu_1\bar{u}_1u_2^2,$$

$$F_2:=F_2(u_1,u_2)=\mu_2\bar{u}_2u_1^2.$$

在方程组(1) 等式两边同时运用算子 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)$,得到

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)(\mathrm{i}\partial_t u_j+\frac{1}{2m_j}\partial_x^2u_j)=\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)(\lambda_j|u_j|^{p_j}u_j+F_j).$$

首先,考虑 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)(\lambda_j|u_j|^{p_j}u_j)$. 由于 $D^{-1}_{\frac{t}{m_j}}D_{\frac{t}{m_j}}\phi=\phi$,$(D_{\frac{t}{m_j}}\phi)(x)=\frac{1}{(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{\frac{1}{2}}}\phi(\frac{m_j}{t}x)$,可得 $D^{-1}_{\frac{t}{m_j}}=(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{\frac{1}{2}}\phi(\frac{t}{m_j}x)$. 因此

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)(\lambda_j|u_j|^{p_j}u_j)=\mathscr{F}M^{m_j}\mathscr{F}^{-1}D^{-1}_{\frac{t}{m_j}}M^{m_j}(\lambda_j|u_j|^{p_j}u_j)=$$

$$\lambda_j(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{-\frac{p_j}{2}}\mathscr{F}M^{m_j}\mathscr{F}^{-1}|D^{-1}_{\frac{t}{m_j}}M^{m_j}u_j|^{p_j}D^{-1}_{\frac{t}{m_j}}M^{m_j}u_j=$$

$$\lambda_j(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{-\frac{p_j}{2}}|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j|^{p_j}\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j+\sum_{s=1}^{2}R_{s,j},$$

其中 $R_{1,j}=\lambda_j(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{-\frac{p_j}{2}}(|\mathscr{F}M^{-m_j}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j|^{p_j}\mathscr{F}M^{-m_j}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j-|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j|^{p_j}\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j)$,

$R_{2,j}=\lambda_j(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{-\frac{p_j}{2}}\mathscr{F}(M^{m_j}-1)\mathscr{F}^{-1}|\mathscr{F}M^{-m_j}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j|^{p_j}\mathscr{F}M^{-m_j}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j$.

其次,考虑 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)F_j$. 由因式分解公式 $(U_\delta(t)\phi)(x)=M^{-\frac{1}{\delta}}(x)D_{\delta t}((\mathscr{F}(M^{-\frac{1}{\delta}}(y)\phi(y)))(\zeta))(x)$,有 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)=\mathrm{i}\mathscr{M}_{m_j}E^{\frac{1}{m_j}}D_{\frac{m_j}{t}}$,其中 $\mathscr{M}_{m_j}=\mathscr{F}M^{m_j}\mathscr{F}^{-1}$,由此可得 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)F_j=\mathrm{i}\mathscr{M}_{m_j}E^{\frac{1}{m_j}}D_{\frac{m_j}{t}}F_j$. 应用恒等算子 $I=\mathrm{i}D_{\frac{t}{m_j}}D_{\frac{m_j}{t}}$ 及其质量共振条件(H1),可得

$$D_{\frac{m_j}{t}}F_j(u_1,u_2)=D_{\frac{m_j}{t}}F_j(\mathrm{i}D_{\frac{t}{m_1}}D_{\frac{m_1}{t}}u_1,\mathrm{i}D_{\frac{t}{m_2}}D_{\frac{m_2}{t}}u_2)=$$

$$\mathrm{i}(\frac{t}{m_j})^{\frac{1}{2}}F_j((\frac{m_j}{t})^{\frac{1}{2}}D_{\frac{m_j}{t}}D_{\frac{t}{m_1}}D_{\frac{m_1}{t}}u_1,(\frac{m_j}{t})^{\frac{1}{2}}D_{\frac{m_j}{t}}D_{\frac{t}{m_2}}D_{\frac{m_2}{t}}u_2).$$

进一步计算得

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}F_j(u_1,u_2)=-\mathscr{M}_{m_j}E^{\frac{1}{m_j}}(\frac{t}{m_j})^{\frac{1}{2}}F_j((\frac{m_j}{\mathrm{i}t})^{\frac{1}{2}}D_{\frac{m_j}{m_1}}D_{\frac{m_1}{t}}u_1,(\frac{m_j}{\mathrm{i}t})^{\frac{1}{2}}D_{\frac{m_j}{m_2}}D_{\frac{m_2}{t}}u_2).$$

由等式 $D_aE^{-b}=E^{-\frac{b}{a^2}}D_a$,其中 $a\neq 0$,可得 $D_{\frac{m_j}{m_k}}D_{\frac{m_k}{t}}u_k=D_{\frac{m_j}{m_k}}E^{-\frac{1}{m_k}}E^{\frac{1}{m_k}}D_{\frac{m_k}{t}}u_k=E^{-\frac{m_k}{m_j^2}}D_{\frac{m_j}{m_k}}E^{\frac{1}{m_k}}D_{\frac{m_k}{t}}u_k$. 令 $\theta_j=-\frac{1}{2m_j^2}t|\zeta|^2$,则 $E^{-\frac{m_k}{m_j^2}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}t\frac{m_k}{m_j^2}|\zeta|^2}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_k\theta_j}$,再根据(H1) 即得

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)F_j(u_1,u_2)=-\mathrm{i}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{M}_{m_j}E^{\frac{1}{m_j}}(\frac{t}{m_j})^{\frac{1}{2}}F_j((\frac{m_j}{t})^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_1\theta_j}D_{\frac{m_j}{m_1}}\tilde{u}_1,(\frac{m_j}{t})^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_2\theta_j}D_{\frac{m_j}{m_2}}\tilde{u}_2),$$

其中 $\tilde{u}_j=E^{\frac{1}{m_j}}D_{\frac{m_j}{t}}u_j$,$j=1,2$. 因为 F_j 是三次非线性项,因此可得

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)F_j(u_1,u_2)=-\mathrm{i}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{M}_{m_j}\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\tilde{u}_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\tilde{u}_2).$$

在上式右端运用 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)=\mathrm{i}\mathscr{M}_{m_j}E^{\frac{1}{m_j}}D_{\frac{m_j}{t}}$,可得

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)F_j(u_1,u_2)=-\mathrm{i}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{M}_{m_j}\frac{m_j}{t}F_j(-\mathrm{i}D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_1}}(-t)u_1,-\mathrm{i}D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_2}}(-t)u_2),$$

其中 $\mathscr{M}_{m_j}^{-1}=\mathscr{F}M^{-m_j}\mathscr{F}^{-1}$. 令 $\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j=D_{\frac{1}{m_j}}^{-1}v_j$,则有

$$\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)F_j(u_1,u_2)=\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\mathscr{M}_{m_j}\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2).$$

所以方程组(1)可以写成

$$\mathrm{i}\partial_tD_{\frac{1}{m_j}}^{-1}v_j=\lambda_j(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{-\frac{p_j}{2}}|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j|^{p_j}\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j+$$

$$\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\mathscr{M}_{m_j}\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2)+\sum_{s=1}^{2}R_{s,j}.$$

将上式右端的第 2 项分解,则有

$$\mathrm{i}\partial_tv_j=\lambda_jD_{\frac{1}{m_j}}(\mathrm{i}\frac{t}{m_j})^{-\frac{p_j}{2}}|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j|^{p_j}\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j+$$

$$\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}(\frac{m_j}{i})^{\frac{1}{2}}\frac{m_j}{t}F_j(\frac{1}{m_j^{1/2}}v_1,\frac{1}{m_j^{1/2}}v_2)+D_{\frac{1}{m_j}}\sum_{s=1}^{4}R_{s,j}.$$

其中:

$$R_{3,j}=\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}(\mathscr{M}_{m_j}-I)\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2),$$

$$R_{4,j}=\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2)-\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2).$$

经过以上的变换,就可以把方程组(1)改写成常微分方程组,形如

$$\mathrm{i}\partial_tv_j=\lambda_jt^{-\frac{p_j}{2}}|v_j|^{p_j}v_j+\frac{1}{t}F_j(v_1,v_2)+D_{\frac{1}{m_j}}\sum_{s=1}^{4}R_{s,j},\ j=1,2. \tag{2}$$

下面只考虑 $t\geqslant1$ 的情况. 在等式(2)的两端同时乘 $k_j\bar{v}_j$,并取虚部,再结合假设条件(H2),可得

$$\partial_t(\sum_{j=1}^{2}k_j|v_j|^2)=2\sum_{j=1}^{2}k_j\mathrm{Im}\lambda_jt^{-\frac{p_j}{2}}|v_j|^{p_j+2}+2\mathrm{Im}(\sum_{j=1}^{2}k_j(D_{\frac{1}{m_j}}\sum_{s=1}^{4}R_{s,j})\bar{v}_j),\ k_j>0,\ j=1,2.$$

引理 2 $\displaystyle\sum_{s=1}^{4}\|R_{s,j}\|_{L^\infty}\leqslant C(t^{-\frac{p_j}{2}-\frac{1}{4}}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}^{p_j+1}+t^{-\frac{5}{4}}\sum_{j=1}^{2}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}^{3}),\ t\geqslant1,\ j=1,2.$

证明 应用文献[5]中引理 1 的方法,易得

$$\sum_{s=1}^{2}\|R_{s,j}\|_{L^\infty}\leqslant Ct^{-\frac{p_j}{2}-\frac{1}{4}}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}^{p_j+1},\ t\geqslant1. \tag{3}$$

考虑 $\displaystyle\sum_{s=3}^{4}\|R_{s,j}\|_{L^\infty}$. 由于

$$\|R_{3,j}\|_{L^\infty}=\left\|\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}(\mathscr{M}_{m_j}-I)\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2)\right\|_{L^\infty}\leqslant$$

$$C\left\|(M^{m_j}-I)\mathscr{F}^{-1}\frac{m_j}{t}F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2)\right\|_{L^1}\leqslant$$

$$Ct^{-\frac{5}{4}}\|F_j(D_{\frac{m_j}{m_1}}\mathscr{M}_{m_1}^{-1}D_{\frac{1}{m_1}}^{-1}v_1,D_{\frac{m_j}{m_2}}\mathscr{M}_{m_2}^{-1}D_{\frac{1}{m_2}}^{-1}v_2)\|_{H^1},$$

其中 F_j 是满足假设条件(H1)的三次非线性项,因此有

$$\|R_{3,j}\|_{L^\infty}\leqslant Ct^{-\frac{5}{4}}\sum_{j=1}^{2}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}^{3},\ t\geqslant1. \tag{4}$$

用类似的方法估计$\|R_{4,j}\|_{L^\infty}$，同样可得

$$\|R_{4,j}\|_{L^\infty} \leqslant Ct^{-\frac{5}{4}}\sum_{j=1}^{2}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}^3,\ t \geqslant 1. \tag{5}$$

综上不等式(3)—(5)，引理 2 得证.

引理 3　令 $u \in X_T$ 是方程组(1) 的一个解，则对任意的 $t \in [1,T]$，都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) \leqslant C(\sum_{j=1}^{2}t^{-\frac{p_j}{2}-\frac{1}{4}}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}^{p_j+1} + t^{-\frac{5}{4}}H(t)^3),$$

其中 $G(t) = \sum_{j=1}^{2}k_j\|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{L^\infty}$，$H(t) = \sum_{j=1}^{2}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}$，$k_j > 0$，$j = 1,2$.

证明　由条件(2)、(H2) 和(H3)，可得 $\partial_t(\sum_{j=1}^{2}k_j|v_j|^2) \leqslant 2\,\mathrm{Im}(\sum_{j=1}^{2}k_j(D_{\frac{1}{m_j}}\sum_{s=1}^{4}R_{s,j})\bar{v}_j)$，其中 $k_j > 0$，$j = 1,2$. 再应用引理 2，即得引理 3.

引理 4　对任意的 $t \in [1,T]$，都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t) \leqslant C(\sum_{j=1}^{2}(t^{-\frac{1}{2}}G(t) + t^{-\frac{3}{4}}H(t))^{p_j} + (t^{-\frac{1}{2}}G(t) + t^{-\frac{3}{4}}H(t))^2)H(t).$$

证明　令 $N_1 := N_1(u_1,u_2) = \lambda_1|u_1|^{p_j}u_1 + F_1$，$N_2 := N_2(u_1,u_2) = \lambda_2|u_2|^{p_j}u_2 + F_2$. 因为 $J_{\frac{1}{m_j}}$ 与 $L_{\frac{1}{m_j}}$ 有交换关系，即$[L_{\frac{1}{m_j}}, J_{\frac{1}{m_j}}] = 0$，于是可得

$$J_{\frac{1}{m_j}}(\mathrm{i}\partial_t + \frac{1}{2m_j}\partial_x^2)u_j = J_{\frac{1}{m_j}}N_j. \tag{6}$$

等式(6) 两端同时乘$\overline{J_{\frac{1}{m_j}}u_j}$，然后在 $\mathbf{R}$ 上积分，并取虚部，得 $\partial_t\|J_{\frac{1}{m_j}}u_j\|^2 = 2\,\mathrm{Im}\int_{\mathbf{R}}J_{\frac{1}{m_j}}N_j \cdot \overline{J_{\frac{1}{m_j}}u_j}\mathrm{d}x$. 由文献[6] 中的引理 X4 可得 $\partial_t\|J_{\frac{1}{m_j}}u_j\| \leqslant C(\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|_{L^\infty}^{p_j} + \sum_{j=1}^{2}\|u_j\|_{L^\infty}^2)\sum_{j=1}^{2}\|J_{\frac{1}{m_j}}u_j\|$. 应用因式分解公式，可得 $\|u_j\|_{L^\infty} \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{L^\infty} + Ct^{-\frac{3}{4}}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}$. 综合上述两个不等式，引理 4 得证.

引理 5　对任意的 $t \in [1,T]$，都存在一个较小的 $\varepsilon > 0$，使得 $H(t)(1+t)^{-\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + G(t) < \varepsilon^{\frac{2}{3}}$，$\sum_{j=1}^{2}(\|\phi_j\|_{H^{0,1}} + \|\phi\|_{H^1}) < \varepsilon$.

证明　令 $\widetilde{H}(t) = H(t)(1+t)^{-\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{H}(t) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))(1+t)^{-\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\varepsilon^{\frac{1}{2}}-1}H(t)$. 应用引理 4，可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{H}(t) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-1}\widetilde{H}(t) \leqslant$$
$$C(\sum_{j=1}^{2}(t^{-\frac{1}{2}}G(t) + t^{-\frac{3}{4}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\widetilde{H}(t))^{p_j} + (t^{-\frac{1}{2}}G(t) + t^{-\frac{3}{4}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\widetilde{H}(t))^2)\widetilde{H}(t). \tag{7}$$

因此，存在一个较小的 $\varepsilon > 0$，使得

$$\widetilde{H}(t) + G(t) < \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \tag{8}$$

下面应用反证法对上述命题(8) 进行证明. 假设存在时间 $t_1 \in [1,T]$，使得 $\widetilde{H}(t_1) + G(t_1) \leqslant \varepsilon^{\frac{2}{3}}$. 运用引理 3，可得

$$G(t_1) \leqslant C(\varepsilon + \int_1^{t_1}\sum_{j=1}^{2}\tau^{-\frac{p_j}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}(p_j+1)}\varepsilon^{\frac{2(p_j+1)}{3}} + \tau^{-\frac{5}{4}+3\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\varepsilon^2\mathrm{d}\tau) \leqslant C(\varepsilon + \sum_{j=1}^{2}\varepsilon^{\frac{2(p_j+1)}{3}} + \varepsilon^2) \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon^2),$$

其中 $p_1 > 2$，$p_2 = 2$，ε 充分小. 在区间 $[1,t_1]$ 上对式(7) 积分，有

$$\widetilde{H}(t_1) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\int_1^{t_1}(1+\tau)^{-1}\widetilde{H}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant C(\varepsilon + \int_1^{t_1}\sum_{j=1}^{2}(\tau^{-\frac{1}{2}}G(\tau) + \tau^{-\frac{3}{4}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\widetilde{H}(\tau))^{p_j}\widetilde{H}(\tau)\mathrm{d}\tau) +$$

$$\int_1^{t_1}(\tau^{-\frac{1}{2}}G(\tau)+\tau^{-\frac{3}{4}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\widetilde{H}(\tau))^2\widetilde{H}(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant C(\varepsilon+\varepsilon^2)+C\varepsilon^2\int_1^{t_1}(1+\tau)^{-1}\widetilde{H}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $p_1>2$，$p_2=2$，ε 充分小. 从而知 $\widetilde{H}(t_1)\leqslant C(\varepsilon+\varepsilon^2)$，故得到 $\widetilde{H}(t_1)+G(t_1)\leqslant C(\varepsilon+\varepsilon^2)<\varepsilon^{\frac{2}{3}}$. 这与假设矛盾，由此引理5得证.

通过以上证明发现，方程组(1)有整体解，满足：

$$H(t)=\sum_{j=1}^{2}\|U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{H^{0,1}}<\varepsilon^{\frac{2}{3}}(1+t)^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}},\ t\geqslant 0;$$

$$G(t)=\sum_{j=1}^{2}k_j\|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m_j}}(-t)u_j\|_{L^\infty}<\varepsilon^{\frac{2}{3}},\ t\geqslant 0.$$

其中 $k_j>0$，$j=1,2$.

下面证明方程组(1)解的时间衰减估计. 因为

$$\|u\|_{L^\infty}\leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|\mathscr{F}U_{\frac{1}{m}}(-t)u\|_{L^\infty}+Ct^{-\frac{3}{4}}\|U_{\frac{1}{m}}(-t)u\|_{H^{0,1}},\ t>0,$$

所以根据引理5，可得当 $t\geqslant 0$，ε 充分小时，有 $\|u\|_{L^\infty}\leqslant C\varepsilon^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{2}}+Ct^{-\frac{3}{4}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}(1+t)^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$；因此，定理1得证.

参考文献：

[1] Hayashi N, Li C, Naumkin P I. On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2D[J]. Differential Integral Equations, 2011,24:417-434.

[2] Katayama S, Li C, Sunagawa H. A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D[J]. Differential Integral Equations, 2014,27:301-312.

[3] Kim D. A note on decay rates of solutions to a system of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension[J]. Asymptotic Analysis, 2016,98:79-90.

[4] Barab J E. Nonexistence of asymptotically free solutions for nonlinear Schrödinger equations[J]. J Math Phys, 1984,25:3270-3273.

[5] Jin G, Jin Y, Li C. The initial value problem for nonlinear Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity in one space dimension[J]. Journal of Evolution Equations, 2016,16:983-995.

[6] Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1998,41:891-907.