文章编号: 1004-4353(2017)04-0344-06

一类离散捕食者-食饵-互惠模型的持久性

吴丽萍
(闽江学院 数学系, 福建 福州 350108)

摘要: 研究一类离散捕食者-食饵-互惠模型的持久性问题. 通过运用差分不等式的有关理论及一些引理,得到了保证该系统永久持续生存的充分性条件. 本文的所得结果补充了文献[1]的工作.

关键词: 离散; 捕食者-食饵-互惠模型; 持久性
中图分类号: O175.14 **文献标识码:** A

Permanence of the discrete predator-prey-mutualist system

WU Liping
(*Department of Mathematics*, *Minjiang University*, *Fuzhou* 350108, *China*)

Abstract: The permanence of the discrete predator-prey-mutualist system is studied in this paper. By applying the theory of difference inequality and some lemmas, sufficient conditions which guarantee the permanence of the system are obtained. The results supplement the results of literature [1].

Keywords: discrete; predator-prey-mutualist system; permanence

本文研究如下离散捕食者-食饵-互惠模型:

$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)\exp\{a_1(n)-b_1(n)x(n)-\dfrac{c_1(n)z(n)}{d_1(n)+d_2(n)y(n)}\}, \\ y(n+1)=y(n)\exp\{a_2(n)-\dfrac{y(n)}{d_3(n)+d_4(n)x(n)}\}, \\ z(n+1)=z(n)\exp\{-a_3(n)+\dfrac{c_2(n)x(n)}{d_1(n)+d_2(n)y(n)}\}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(n)$, $y(n)$ 和 $z(n)$ 分别是食饵种群、互惠种群及捕食者种群在第 n 代的种群密度; $a_i(n)(i=1,2,3)$, $d_j(n)(j=1,2,3,4)$ 和 $c_k(n)(k=1,2)$ 是有正的上、下界的序列.

本文中,对任一有界序列 $\{g(k)\}$, 记 $g^u=\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} g(k)$, $g^l=\inf\limits_{k\in\mathbf{N}} g(k)$, 其中 **N** 表示非负整数集合. 基于生态学意义,本文考虑系统(1)具有正初值 $x(0)>0$, $y(0)>0$, $z(0)>0$ 的解 $(x(n),y(n),z(n))$, 易知系统(1)具有正初值的解是正的. 系统(1)可视为连续模型

$$\begin{cases} \dot{x}=x[a_1(t)-b_1(t)x-\dfrac{c_1(t)z}{d_1(t)+d_2(t)y}], \\ \dot{y}=y[a_2(t)-\dfrac{y}{d_3(t)+d_4(t)x}], \\ \dot{z}=z[-a_3(t)+\dfrac{c_2(t)x}{d_1(t)+d_2(t)y(t)}] \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2017-08-03 **基金项目:** 福建省教育厅科技类项目(JAT160377)
作者简介: 吴丽萍(1972—),女,副教授,研究方向为生物数学.

对应的离散模型.文献[1]在假设系统(2)的所有系数是周期函数的情形下,研究了系统(2)的持久性及正周期解.然而,对于生命短、世代不重叠的种群,或者虽然是生命长、世代重叠的种群,其数量比较少时,通常表为差分方程[2].近年来,许多学者对各种离散生态系统的动力学行为进行了研究[3-8],但尚未有文献对系统(1)进行研究,基于此本文通过发展文献[3,6]的分析方法,得到了保证系统(1)持久的充分性条件.

1　系统的持久性

定义 1　如果存在常数 m_i 和 $M_i(i=1,2,3)$,使得对系统(1)的任一正解 $(x(n),y(n),z(n))$ 有:

$$m_1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} x(n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x(n) \leqslant M_1,$$
$$m_2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} y(n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} y(n) \leqslant M_2,$$
$$m_3 \leqslant \liminf_{n\to\infty} z(n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} z(n) \leqslant M_3,$$

则称系统(1)是持久的.

引理 1[3]　假设 $\{x(n)\}$ 满足 $x(n)>0$ 且 $x(n+1)\leqslant x(n)\exp\{a(n)-b(n)x(n)\}$, $n\in\mathbf{N}$,其中 $\{a(n)\}$ 和 $\{b(n)\}$ 是有正的上下界的序列,则 $\limsup\limits_{n\to\infty} x(n)\leqslant \dfrac{1}{b^{l}}\exp(a^{u}-1)$.

引理 2[3]　假设 $\{x(n)\}$ 满足 $x(n)>0$ 且 $x(n+1)\geqslant x(n)\exp\{a(n)-b(n)x(n)\}$, $n\geqslant N_0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} x(n)\leqslant x^*$, $x(N_0)>0$,其中 $\{a(n)\}$ 和 $\{b(n)\}$ 是有正的上下界的序列, $N_0\in\mathbf{N}$,则

$$\liminf_{n\to\infty} x(n)\geqslant \min\{\frac{a^{l}}{b^{u}},\frac{a^{l}}{b^{u}}\exp(a^{l}-b^{u}x^*)\}.$$

引理 3　设 $(x(n),y(n),z(n))$ 为系统(1)的任一正解,则 $\limsup\limits_{n\to\infty} x(n)\leqslant M_1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} y(n)\leqslant M_2$,其中 $M_1=\dfrac{1}{b_1^{l}}\exp(a_1^{u}-1)$, $M_2=(d_3^{u}+d_4^{u}M_1)\exp(a_2^{u}-1)$.

证明　由系统(1)的第 1 个方程,有 $x(n+1)\leqslant x(n)\exp\{a_1(n)-b_1(n)x(n)\}$.由引理 1 得

$$\limsup_{n\to\infty} x(n)\leqslant \frac{1}{b_1^{l}}\exp(a_1^{u}-1)\triangleq M_1. \tag{3}$$

由式(3)知,对充分小的正数 $\varepsilon>0$,存在正整数 k_1,当 $n>k_1$ 时,有 $x(n)<M_1+\varepsilon$.从而由系统(1)的第 2 个方程得,当 $n>k_1$ 时, $y(n+1)\leqslant y(n)\exp\{a_2(n)-\dfrac{y(n)}{d_3(n)+d_4(n)(M_1+\varepsilon)}\}$.由引理 1 知,

$$\limsup_{n\to\infty} y(n)\leqslant [d_3^{u}+d_4^{u}(M_1+\varepsilon)]\exp(a_2^{u}-1).$$

令 $\varepsilon\to 0$,得

$$\limsup_{n\to\infty} y(n)\leqslant (d_3^{u}+d_4^{u}M_1)\exp(a_2^{u}-1)\triangleq M_2. \tag{4}$$

引理 4　设 $(x(n),y(n),z(n))$ 为系统(1)的任一正解,则

$$\liminf_{n\to\infty} y(n)\geqslant m_2, \tag{5}$$

其中 $m_2=\min\{a_2^{l}d_3^{l},a_2^{l}d_3^{l}\exp(a_2^{l}-\dfrac{1}{d_3^{l}}M_2)\}$.

证明　由系统(1)的第 2 个方程,有 $y(n+1)\geqslant y(n)\exp\{a_2(n)-\dfrac{1}{d_3(n)}y(n)\}$.再由引理 2,得 $\liminf\limits_{n\to\infty} y(n)\geqslant \min\{a_2^{l}d_3^{l},a_2^{l}d_3^{l}\exp(a_2^{l}-\dfrac{1}{d_3^{l}}M_2)\}\triangleq m_2$.

引理 5　假设(A1): $\dfrac{c_2^{u}M_1}{d_1^{l}}>a_3^{l}>\dfrac{c_2^{u}M_1}{d_1^{l}+d_2^{l}m_2}$ 成立,则存在正常数 M_3,对系统(1)的任一正解 $(x(n),y(n),z(n))$ 有

$$\limsup_{n\to\infty} z(n) \leqslant M_3. \tag{6}$$

证明 选择常数 $K>0$ 及充分小的正数 $\varepsilon\in(0,m_2)$,使得

$$a_1^{\mathrm{u}}-\frac{c_1^{\mathrm{l}}K}{d_1^{\mathrm{u}}+d_2^{\mathrm{u}}(M_2+\varepsilon)}<0,\ -a_3^{\mathrm{l}}+\frac{c_2^{\mathrm{u}}(M_1+\varepsilon)}{d_1^{\mathrm{l}}+d_2^{\mathrm{l}}(m_2-\varepsilon)}<0,\ -a_3^{\mathrm{l}}+\frac{c_2^{\mathrm{u}}\varepsilon}{d_1^{\mathrm{l}}+d_2^{\mathrm{l}}(m_2-\varepsilon)}<0. \tag{7}$$

先证明 $\liminf\limits_{n\to\infty} z(n)\leqslant K$.假设该式不成立,则存在正整数 k_2,使得当 $n>k_2$ 时,$z(n)>K$.对上述 ε,由式(4)和(5)知,存在正整数 $k_3>k_2$,当 $n>k_3$ 时,有 $m_2-\varepsilon<y(n)<M_2+\varepsilon$.从而由系统(1)的第1个方程知,当 $n>k_3$ 时,有 $x(n+1)\leqslant x(n)\exp\{a_1^{\mathrm{u}}-\dfrac{c_1^{\mathrm{l}}K}{d_1^{\mathrm{u}}+d_2^{\mathrm{u}}(M_2+\varepsilon)}\}$.由式(7)知,$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=0$,故存在正整数 $k_4>k_3$,当 $n>k_4$ 时,有 $x(n)<\varepsilon$.于是由系统(1)的第3个方程,得 $z(n+1)\leqslant z(n)\exp\{-a_3^{\mathrm{l}}+\dfrac{c_2^{\mathrm{u}}\varepsilon}{d_1^{\mathrm{l}}+d_2^{\mathrm{l}}(m_2-\varepsilon)}\}$.再由式(7)知,$\lim\limits_{n\to\infty}z(n)=0$,这与 $z(n)>K$ 矛盾,故 $\liminf\limits_{n\to\infty}z(n)\leqslant K$ 成立.

对上述 $K>0$,可选取正常数 $M_3>K+1$,使得

$$\frac{1}{-a_3^{\mathrm{l}}+\dfrac{c_2^{\mathrm{u}}M_1}{d_1^{\mathrm{l}}}}\ln\frac{M_3}{K+1}>2. \tag{8}$$

假设式(6)不成立,则存在系统(1)的一个正解 $(x^*(n),y^*(n),z^*(n))$,使得

$$\limsup_{n\to\infty} z^*(n)>M_3. \tag{9}$$

由式(8)知,可选取充分小的正数 $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$,使得 $\dfrac{1}{-a_3^{\mathrm{l}}+\dfrac{c_2^{\mathrm{u}}(M_1+\varepsilon_1)}{d_1^{\mathrm{l}}}}\ln\dfrac{M_3}{K+1}>2$.由式(3)和(5)知,存在正整数 k_5,当 $n>k_5$ 时,有

$$x^*(n)<M_1+\varepsilon_1,\ y^*(n)>m_2-\varepsilon_1. \tag{10}$$

由 $\liminf\limits_{n\to\infty}(z)\leqslant K$ 知,存在正整数 $\bar{n}_1>k_5$,使得 $z^*(\bar{n}_1)<K+1$.由式(9)知,存在正整数 $\bar{n}_2>\bar{n}_1$,使得 $z^*(\bar{n}_2)>M_3$.记 $n_1=\max\{n\mid \bar{n}_1\leqslant n\leqslant\bar{n}_2,z^*(n)\leqslant K+1\}$,则 $z^*(n_1)\leqslant K+1$,且当 $n\in(n_1,\bar{n}_2]$ 时 $z^*(n)>K+1$.记 $n_2=\min\{n\mid n_1\leqslant n\leqslant\bar{n}_2,z^*(n)\geqslant M_3\}$,则 $z^*(n_2)\geqslant M_3$,且当 $n\in(n_1,n_2)$ 时 $z^*(n)<M_3$.于是有

$$z^*(n_1)\leqslant K+1,\ z^*(n_2)\geqslant M_3, \tag{11}$$

$$K+1<z^*(n)<M_3,\ n\in(n_1,n_2). \tag{12}$$

由式(1)和(10),当 $n>k_5$ 时,$z^*(n+1)\leqslant z^*(n)\exp\{-a_3^{\mathrm{l}}+\dfrac{c_2^{\mathrm{u}}(M_1+\varepsilon_1)}{d_1^{\mathrm{l}}}\}$.再由式(11)可知 $n_2-n_1\geqslant\dfrac{1}{-a_3^{\mathrm{l}}+\dfrac{c_2^{\mathrm{u}}(M_1+\varepsilon_1)}{d_1^{\mathrm{l}}}}\ln\dfrac{M_3}{K+1}>2$,所以 (n_1,n_2) 非空.于是由式(7)、(10)及(12)有

$$\begin{aligned}z^*(n_2)&=z^*(n_2-1)\exp\{-a_3(n_2-1)+\frac{c_2(n_2-1)x^*(n_2-1)}{d_1(n_2-1)+d_2(n_2-1)y^*(n_2-1)}\}\leqslant\\&\quad z^*(n_2-1)\exp\{-a_3^{\mathrm{l}}+\frac{c_2^{\mathrm{u}}(M_1+\varepsilon_1)}{d_1^{\mathrm{l}}+d_2^{\mathrm{l}}(m_2-\varepsilon_1)}\}<z^*(n_2-1)<M_3,\end{aligned}$$

这与式(11)矛盾,故式(6)成立.

引理6 假设(A2):$a_1^{\mathrm{l}}-\dfrac{c_1^{\mathrm{u}}}{d_1^{\mathrm{l}}}>0$,$\dfrac{c_2^{\mathrm{l}}\beta}{d_1^{\mathrm{u}}+d_2^{\mathrm{u}}M_2}>a_3^{\mathrm{u}}$,其中 $\beta=\dfrac{a_1^{\mathrm{l}}}{b_1^{\mathrm{u}}}\exp(a_1^{\mathrm{l}}-b_1^{\mathrm{u}}M_1)$ 成立,则存在正常数 m_3,对系统(1)的任一正解 $(x(n),y(n),z(n))$ 有

$$\liminf_{n\to\infty} z(n)>m_3. \tag{13}$$

证明　由条件(A2)，可选取充分小的正数 ε，使得

$$a_1^l - \frac{c_1^u \varepsilon}{d_1^l} > 0,\ -a_3^u + \frac{c_2^l(\beta - \varepsilon)}{d_1^u + d_2^u(M_2 + \varepsilon)} > 0. \tag{14}$$

先证明存在常数 η_0 使得 $\limsup\limits_{n\to\infty} z(n) \geqslant \eta_0$. 假设该式不成立，则存在正整数 k_6，当 $n > k_6$ 时，$z(n) < \varepsilon$. 从而由系统(1)的第 1 个方程得 $x(n+1) \geqslant x(n)\exp\{a_1^l - \frac{c_1^u \varepsilon}{d_1^l} - b_1^u x(n)\}$. 再由引理 2 有 $\liminf\limits_{n\to\infty} x(n) \geqslant \left\{\dfrac{a_1^l - \frac{c_1^u\varepsilon}{d_1^l}}{b_1^u}, \dfrac{a_1^l - \frac{c_1^u\varepsilon}{d_1^l}}{b_1^u}\exp(a_1^l - \frac{c_1^u\varepsilon}{d_1^l} - b_1^u M_1)\right\}$. 令 $\varepsilon \to 0$，注意到 $a_1^l - b_1^u M_1 < 0$，于是得

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \geqslant \min\left\{\frac{a_1^l}{b_1^u}, \frac{a_1^l}{b_1^u}\exp(a_1^l - b_1^u M_1)\right\} = \frac{a_1^l}{b_1^u}\exp(a_1^l - b_1^u M_1) \triangleq \beta. \tag{15}$$

由式(4)和(15)知，存在正整数 $k_7 > k_6$，当 $n > k_7$ 时，$y(n) < M_2 + \varepsilon$，$x(n) > \beta - \varepsilon$. 从而由系统(1)的第 3 个方程，当 $n > k_7$ 时，$z(n+1) \geqslant z(n)\exp\left\{-a_3^u + \dfrac{c_2^l(\beta-\varepsilon)}{d_1^u + d_2^u(M_2+\varepsilon)}\right\}$. 由式(14)得 $\lim\limits_{n\to\infty} z(n) = +\infty$，矛盾，故 $\limsup\limits_{n\to\infty} z(n) \geqslant \eta_0$ 成立.

取 $K_0 > 1$，使 $\dfrac{1}{K_0} < \eta_0$ 及 $\dfrac{\ln K_0}{a_3^u} > 2$. 假设式(13)不成立，则对任意正整数 $k > K_0$，存在系统(1)的一个正解 $(\tilde{x}(n), \tilde{y}(n), \tilde{z}(n))$，使得 $\liminf\limits_{n\to\infty} \tilde{z}(n) < \dfrac{1}{k^2}$. 注意到 $\eta_0 > \dfrac{1}{k}$，再由 $\limsup\limits_{n\to\infty} z(n) \geqslant \eta_0$ 知，存在正整数序列 $n_1^{(k)} < m_1^{(k)} < n_2^{(k)} < m_2^{(k)} < \cdots < n_j^{(k)} < m_j^{(k)} < \cdots$ 使得 $\lim\limits_{j\to+\infty} n_j^{(k)} = +\infty$，及

$$\tilde{z}(n_j^{(k)}) \geqslant \frac{1}{k},\ \tilde{z}(m_j^{(k)}) \leqslant \frac{1}{k^2}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{k^2} < \tilde{z}(n) < \frac{1}{k},\ n \in (n_j^{(k)}, m_j^{(k)}). \tag{17}$$

由系统(1)的第 3 个方程，得 $\tilde{z}(n+1) > \tilde{z}(n)\exp\{-a_3^u\}$. 从而 $k > K_0$ 时，得

$$\tilde{z}(m_j^{(k)}) > \tilde{z}(n_j^{(k)})\exp\{-(m_j^{(k)} - n_j^{(k)})a_3^u\}. \tag{18}$$

由式(16)和(18)知，当 $k > K_0$ 时，$m_j^{(k)} - n_j^{(k)} > \dfrac{\ln k}{a_3^u} > \dfrac{\ln K_0}{a_3^u} > 2$，故 $(n_j^{(k)}, m_j^{(k)})$ 非空. 由系统(1)的第 1 个方程及式(17)知，当 $n \in (n_j^{(k)}, m_j^{(k)})$ 时，$\tilde{x}(n+1) \geqslant \tilde{x}(n)\exp\{a_1^l - \dfrac{c_1^u}{d_1^l k} - b_1^u \tilde{x}(n)\}$. 再由引理 2 有

$$\liminf_{n\to\infty} \tilde{x}(n) \geqslant \left\{\frac{a_1^l - \frac{c_1^u}{d_1^l k}}{b_1^u}, \frac{a_1^l - \frac{c_1^u}{d_1^l k}}{b_1^u}\exp(a_1^l - \frac{c_1^u}{d_1^l k} - b_1^u M_1)\right\}.$$

令 $k \to +\infty$，得 $\liminf\limits_{n\to\infty} \tilde{x}(n) \geqslant \beta$. 由该式和式(4)知，存在正整数 N_0，当 $n > N_0$ 时，$\tilde{x}(n) > \beta - \varepsilon$，$\tilde{y}(n) < M_2 + \varepsilon$. 由 $\lim\limits_{j\to+\infty} m_j^{(k)} = +\infty$ 知，存在正整数 J，当 $j > J$ 时，$m_j^{(k)} > N_0 + 1$. 从而当 $j > J$ 时，

$$\tilde{x}(m_j^{(k)} - 1) > \beta - \varepsilon,\ \tilde{y}(m_j^{(k)} - 1) < M_2 + \varepsilon. \tag{19}$$

由系统(1)的第 3 个方程及式(14)、(16)、(17)、(19)，当 $j > J$ 时，得

$$\frac{1}{k^2} \geqslant \tilde{z}(m_j^{(k)}) \geqslant \tilde{z}(m_j^{(k)} - 1)\exp\left\{-a_3^u + \frac{c_2^l(\beta-\varepsilon)}{d_1^u + d_2^u(M_2+\varepsilon)}\right\} > \tilde{z}(m_j^{(k)} - 1) > \frac{1}{k^2}.$$

矛盾，故式(13)成立.

引理 7　存在正常数 m_1，对系统(1)的任一正解 $(x(n), y(n), z(n))$ 有

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) > m_1. \tag{20}$$

证明　选取充分小的正常数 η 和 $\varepsilon \in (0, m_2)$，使得

$$-a_3^{\rm l}+\frac{c_2^{\rm u}\cdot 2\eta}{d_1^{\rm l}+d_2^{\rm l}(m_2-\varepsilon)}<0. \tag{21}$$

先证明$\limsup\limits_{n\to\infty}x(n)\geqslant\eta$. 假设该式不成立,则存在正整数$n_0$,当$n>n_0$时,$x(n)<2\eta$. 由式(5)知,存在正整数$n_1>n_0$,当$n>n_1$时,$y(n)>m_2-\varepsilon$. 从而由系统(1)的第3个方程,得

$$z(n+1)\leqslant z(n)\exp\left\{-a_3^{\rm l}+\frac{c_2^{\rm u}\cdot 2\eta}{d_1^{\rm l}+d_2^{\rm l}(m_2-\varepsilon)}\right\}.$$

由式(21)知,$\lim\limits_{n\to\infty}z(n)=0$. 矛盾,故$\limsup\limits_{n\to\infty}x(n)\geqslant\eta$成立.

取$M_0>1$,使$\dfrac{1}{M_0}<\eta$, $a_1^{\rm l}-\dfrac{b_1^{\rm u}}{M_0}-\dfrac{c_1^{\rm u}M_3}{d_1^{\rm l}}>0$和$\dfrac{\ln M_0}{-a_1^{\rm l}+b_1^{\rm u}M_1+\dfrac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}M_3}>2$. 选取充分小的正常数$\varepsilon_1$,使得

$$a_1^{\rm l}-\frac{b_1^{\rm u}}{M_0}-\frac{c_1^{\rm u}(M_3+\varepsilon_1)}{d_1^{\rm l}}>0,\ \frac{\ln M_0}{-a_1^{\rm l}+b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)+\dfrac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)}>2. \tag{22}$$

假设式(20)不成立,则对任意正整数$l>M_0$,存在系统(1)的一个正解$(\bar{x}(n),\bar{y}(n),\bar{z}(n))$,使得$\liminf\limits_{n\to\infty}\bar{x}(n)<\dfrac{1}{l^2}$. 再由$\limsup\limits_{n\to\infty}x(n)\geqslant\eta$知,存在正整数序列$s_1^{(l)}<t_1^{(l)}<s_2^{(l)}<t_2^{(l)}<\cdots<s_j^{(l)}<t_j^{(l)}<\cdots$使得$\lim\limits_{j\to+\infty}s_j^{(l)}=+\infty$,及

$$\bar{x}(s_j^{(l)})\geqslant\frac{1}{l},\ \bar{x}(t_j^{(l)})\leqslant\frac{1}{l^2}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{l^2}<\bar{x}(n)<\frac{1}{l},\ n\in(s_j^{(l)},t_j^{(l)}). \tag{24}$$

由式(3)和(6)知,存在正整数n_2,当$n>n_2$时,$\bar{x}(n)<M_1+\varepsilon_1$, $\bar{z}(n)<M_3+\varepsilon_1$. 由系统(1)的第1个方程知,当$n>n_2$时,有$\bar{x}(n+1)\geqslant\bar{x}(n)\exp\{a_1^{\rm l}-b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)-\dfrac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)\}$. 由$\lim\limits_{j\to+\infty}t_j^{(l)}=+\infty$知,存在正整数$T$,当$j>T$时,$t_j^{(l)}>n_2+1$. 由系统(1)的第1个方程和式(23)知,当$j>T$时,有

$$\frac{1}{l^2}\geqslant\bar{x}(t_j^{(l)})\geqslant\bar{x}(s_j^{(l)})\exp\{[a_1^{\rm l}-b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)-\frac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)](t_j^{(l)}-s_j^{(l)})\}>$$
$$\frac{1}{l}\exp\{[a_1^{\rm l}-b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)-\frac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)](t_j^{(l)}-s_j^{(l)})\},$$

故

$$[-a_1^{\rm l}+b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)+\frac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)](t_j^{(l)}-s_j^{(l)})>\ln l. \tag{25}$$

注意到$a_1^{\rm l}-b_1^{\rm u}M_1<0$,则$-a_1^{\rm l}+b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)+\dfrac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)>0$. 于是由式(25)得

$$t_j^{(l)}-s_j^{(l)}\geqslant\frac{\ln l}{-a_1^{\rm l}+b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)+\dfrac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)}>\frac{\ln M_0}{-a_1^{\rm l}+b_1^{\rm u}(M_1+\varepsilon_1)+\dfrac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)}>2,$$

故$(s_j^{(l)},t_j^{(l)})$非空. 由系统(1)的第1个方程、式(22)—(24)知,当$j>T$时,有

$$\frac{1}{l^2}\geqslant\bar{x}(t_j^{(l)})\geqslant\bar{x}(t_j^{(l)}-1)\exp\left\{a_1^{\rm l}-\frac{b_1^{\rm u}}{M_0}-\frac{c_1^{\rm u}}{d_1^{\rm l}}(M_3+\varepsilon_1)\right\}>\bar{x}(t_j^{(l)}-1)>\frac{1}{l^2}.$$

矛盾,故式(20)成立.

由引理3至引理7可得如下定理:

定理1 假设条件(A1)和(A2)成立,则系统(1)是持久的.

参考文献：

[1] Yang L Y, Xie X D, Chen F D, et al. Permanence of the periodic predator-prey-mutualist system[J]. Adv Differ Equ, 2015,2015:331. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0654-9.
[2] 陈兰荪,宋新宇,陆征一.数学生态学模型与研究方法[M].成都:四川科学技术出版社,2003:1.
[3] Chen F D. Permanence for the discrete mutualism model with time delays[J]. Math Comput Model, 2008,47(3/4):431-435.
[4] 余胜斌.一类离散非自治竞争系统的绝灭性和稳定性[J].延边大学学报(自然科学版),2015,41(4):279-284.
[5] Li Y K, Zhang T W. Permanence and almost periodic sequence solution for a discrete delay logistic equation with feedback control[J]. Nonlinear Anal RWA, 2011,12(3):1850-1864.
[6] Yang X T, Liu Y Q, Chen J. Uniform persistence for a discrete predator-prey system with delays[J]. Appl Math Comput, 2011,218(4):1174-1179.
[7] Han R Y, Xie X D, Chen F D. Permanence and global attractivity of a discrete pollination mutualism in plant-pollinator system with feedback controls[J]. Adv Differ Equ, 2016,2016:199. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0889-0.
[8] Yang W S, Li X P. Permanence of a discrete nonlinear n species cooperation system with time delays and feedback controls[J]. Appl Math Compu, 2011,218(7):3581-3586.

(上接第 320 页)

[7] Chun C B. Some third-order families of iterative methods for solving nonlinear equations[J]. Appl Math Comput, 2007,188(1):924-933.
[8] Liu X L, Wang X R. Modifications of higher-order convergence for solving nonlinear equations [J]. J Comput Appl Math, 2011,235(17):5105-5111.
[9] Liu X L, Wang X R. A convergence improvement factor and higher-order methods for solving nonlinear equations [J]. Appl Math Comput, 2012,218(15):7871-7875.
[10] Weerakoon S, Fernando G I. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence[J]. Appl Math Lett, 2000,13(8):87-93.
[11] Chun C B. Iterative methods improving Newton's method by the decomposition method[J]. Comput Math Appl, 2005,50(10/12):1559-1568.
[12] Chun C B. A new iterative method for solving nonlinear equations[J]. Appl Math Comput, 2006,178(2):415-422.
[13] Noor M A, Noor K I. Modified iterative methods with cubic convergence for solving nonlinear equations[J]. Appl Math Comput, 2007,184(2):322-325.