

文章编号: 1004-4353(2017)04-0339-05

具常数投放率的捕食者-食饵模型的定性分析

王清娟

(阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015)

摘要: 讨论一类食饵具常数投放率的捕食者-食饵模型的平衡点性态问题,得到了正平衡点周围极限环的不存在性、存在性与唯一性的充分条件. 利用数值模拟验证了所得结论的正确性,并给出了相应结论的生态意义.

关键词: 投放率; 捕食者-食饵模型; 平衡点; 极限环

中图分类号: O175

文献标识码: A

Qualitative analysis of predator-prey system with constant rate stocking

WANG Qingjuan

(*Department of Basic Teaching and Research, Yango University, Fuzhou 350015, China*)

Abstract: The quality of the equilibrium point for a class of predator-prey system with constant rate stocking on prey is discussed. The sufficient conditions for the nonexistence, existence and uniqueness of the limit cycle around the positive equilibrium point are obtained. The results are proved by the technology of numerical simulation. At the same time, the meaning of the ecology is given.

Keywords: constant rate stocking; predator-prey system; equilibrium point; limit cycle

0 引言

文献[1-4]研究了食饵具常投放率且功能反应函数为 $c\sqrt{x}$ 或 cx 的捕食者-食饵模型的定性行为,并取得了较好的成果. 文献[5-7]研究了食饵具常投放率或常收获率且具有 Holling 类功能反应的捕食者-食饵模型,得到了相应的定性理论. 2011 年,王学蕾等^[8] 研究了一类具功能反应函数的系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx^{\frac{1}{n}}) - ycx^{\frac{1}{n}}, \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + ecx^{\frac{1}{n}}), \end{cases}$$

并讨论了该系统的平衡点性态以及极限环不存在性、存在性与唯一性的相关条件. 本文在文献[1-8] 的基础上研究具常数投放率且功能反应函数为 $cx^{\frac{1}{n}}$ 的捕食者-食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx^{\frac{1}{n}}) - ycx^{\frac{1}{n}} + h, \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + ecx^{\frac{1}{n}}), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a, b, c, d, e, h > 0$, $n \geq 2$ 且为正整数, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为食饵和捕食者种群的密度, $a - bx^{\frac{1}{n}}$ 为食饵种群的相对增长率, $cx^{\frac{1}{n}}$ 为捕食者的功能反应函数, h 为食饵种群的常数投放率. 基于生态意义,本

文仅在 $G = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0\}$ 中考虑系统(1) 的定性行为.

做变换 $\bar{x} = x^{\frac{1}{n}}, \bar{y} = \frac{c}{a}y, dt = \frac{n}{a}(\bar{x})^{n-2}d\tau$, 变换后仍用 x, y, t 表示 \bar{x}, \bar{y}, τ , 则系统(1) 转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^{n-1}(1 - A_0x) - y + \frac{A_1}{x} \triangleq P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = B_0x^{n-2}y(-1 + B_1x) \triangleq Q(x, y), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $A_0 = \frac{b}{a} > 0, A_1 = \frac{h}{a} > 0, B_0 = \frac{nd}{a} > 0, B_1 = \frac{ec}{d} > 0$. 系统(2) 的平衡点对应的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n-1)x^{n-2} - nA_0x^{n-1} - \frac{A_1}{x^2} & -1 \\ B_0x^{n-3}y[-(n-2) + (n-1)B_1x] & B_0x^{n-2}(-1 + B_1x) \end{bmatrix}.$$

1 平衡点的性态分析

令 $m(x) = x^n(1 - A_0x) + A_1$, 则 $m(0) = A_1 > 0, m'(x) = x^{n-1}[n - (n+1)A_0x]$, 由此易得 $m(x)$ 在 $x = \frac{n}{(n+1)A_0}$ 处有最大值且 $m(x)|_{\max} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}A_0^n} + A_1 > 0$. 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = -\infty$, 所以存在唯一 $x_1 \in (0, +\infty)$ 使 $m(x_1) = 0$, 即 $M(x_1, 0)$ 是系统的平衡点. 当 $m(B_1^{-1}) = B_1^{-n} - A_0B_1^{-(n+1)} + A_1 > 0$ 时, 系统有唯一的正平衡点 $R(B_1^{-1}, B_1m(B_1^{-1}))$.

引理 1 1) 当 $x_1 > B_1^{-1}$ 时, M 为鞍点; 当 $0 < x_1 < B_1^{-1}$ 时, M 为稳定点.
2) 当 $B_1^{-n} - A_0B_1^{-(n+1)} + A_1 > 0$ 且 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{n+1} > 0$ 时, R 是不稳定点; 当 $B_1^{-n} - A_0B_1^{-(n+1)} + A_1 > 0$ 且 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{n+1} < 0$ 时, R 是稳定点.

证明 1) 系统在 $M(x_1, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J_M = \begin{bmatrix} -(x_1^{n-2} + \frac{(n+1)A_1}{x_1^2}) & -1 \\ 0 & B_0x_1^{n-2}(-1 + B_1x_1) \end{bmatrix},$$

$\det J_M = -B_0x_1^{n-2}(-1 + B_1x_1)(x_1^{n-2} + \frac{(n+1)A_1}{x_1^2}),$

$\text{Tr} J_M = B_0x_1^{n-2}(-1 + B_1x_1) - (x_1^{n-2} + \frac{(n+1)A_1}{x_1^2}).$

当 $x_1 > B_1^{-1}$ 时, $\det J_M < 0, M$ 为鞍点; 当 $0 < x_1 < B_1^{-1}$ 时, $\det J_M > 0, \text{Tr} J_M < 0, M$ 为稳定点.

2) 当 $B_1^{-n} - A_0B_1^{-(n+1)} + A_1 > 0$ 时, 系统在 $R(B_1^{-1}, B_1m(B_1^{-1}))$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J_R = \begin{bmatrix} nB_1^{1-n}[(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{n+1}] & -1 \\ B_0B_1^{4-n}m(B_1^{-1}) & 0 \end{bmatrix},$$

$\det J_R = B_0B_1^{4-n}m(B_1^{-1}) > 0, \text{Tr} J_R = nB_1^{1-n}[(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{n+1}].$

当 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{n+1} > 0$ 时, $\text{Tr} J_R > 0, R$ 是不稳定点; 当 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{n+1} < 0$ 时, $\text{Tr} J_R < 0, R$ 是稳定点. 证毕.

2 极限环的不存在性

定理 1 当 $B_1^{-n} - A_0B_1^{-(n+1)} + A_1 > 0$ 且 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 < 0$ 时, 系统在 G 内无极限环, 正平衡点

$R(B_1^{-1}, B_1 m(B_1^{-1}))$ 为全局渐进稳定的平衡点.

证明 取 Dulac 函数 $B(x, y) = y^\beta$, 其中 $\beta = \frac{nA_0}{B_0 B_1} - 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} &= y^\beta [((n-1) - (\beta+1)B_0)x^{n-2} + ((\beta+1)B_0 B_1 - nA_0)x^{n-1} - \frac{A_1}{x^2}] = \\ &= y^\beta [\frac{n}{B_1}((1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0)x^{n-2} - \frac{A_1}{x^2}]. \end{aligned}$$

当 $B_1^{-n} - A_0 B_1^{-(n+1)} + A_1 > 0$ 且 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 < 0$ 时, $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$, 故系统无极限环. 此时 $R(B_1^{-1}, B_1 m(B_1^{-1}))$ 是稳定点, 故 $R(B_1^{-1}, B_1 m(B_1^{-1}))$ 是全局渐进稳定的. 证毕.

3 极限环的存在性与唯一性

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 系统(1)可改写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx^{\frac{1}{n}} [\frac{x(a - bx^{\frac{1}{n}}) + h}{cx^{\frac{1}{n}}} - y] = \phi(x)[\varphi(x) - y], \\ \frac{dy}{dt} = ey(-\frac{d}{e} + cx^{\frac{1}{n}}) = ey[\psi(x) - w]. \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\phi(x) = cx^{\frac{1}{n}}$, $\varphi(x) = \frac{x(a - bx^{\frac{1}{n}}) + h}{cx^{\frac{1}{n}}}$, $w = \frac{d}{e}$, 且有正平衡点 (x_2, y_2) , 其中: $x_2 = (\frac{d}{ce})^n = B_1^{-n}$, $y_2 = \varphi(x_2)$, $\varphi'(x) = \frac{a}{c}(1 - \frac{1}{n})x^{-\frac{1}{n}} - \frac{b}{c} - \frac{h}{nc}x^{-\frac{1}{n}-1}$, $\varphi'(x_2) = \frac{a}{c}(1 - \frac{1}{n})B_1 - \frac{b}{c} - \frac{h}{nc}B_1^{1+n} = \frac{a}{c}[(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{1+n}]$.

定理 2 当 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{1+n} > 0$, $y_2 > 0$ 时, 系统(3)在 $G = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0\}$ 围绕 (x_2, y_2) 至少存在一个稳定的极限环.

证明 当 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{1+n} > 0$ 时, 有 $\varphi'(x_2) > 0$. 结合 $\varphi'(x)$ 的连续性, 知存在 (x_2, y_2) 的邻域 $U \subset G$, 使得对任意的 $(x, y) \in U$ 有 $\varphi'(x) > 0$. 取 Lyapunov 函数

$$V(x, y) = e \int_{x_2}^x \frac{\phi(x) - \phi(x_2)}{\phi(x)} dx + \int_{y_2}^y \frac{y - y_2}{y} dy, \quad (x, y) \in U,$$

易知 $\int_{y_2}^y \frac{y - y_2}{y} dy > 0$; $\psi'(x) = \frac{1}{n}cx^{\frac{1}{n}-1} > 0$, 于是 $(x - x_2)(\phi(x) - \phi(x_2)) > 0 (x \neq x_2)$, 故 $V(x, y) > 0$, $(x, y) \in U \setminus (x_2, y_2)$. 对 V 沿系统(3)求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} &= e \frac{\phi(x) - \phi(x_2)}{\phi(x)} \cdot \phi(x)[\varphi(x) - y] + \frac{y - y_2}{y} \cdot ey[\psi(x) - w] = \\ &= e[\phi(x) - \phi(x_2)][\varphi(x) - \varphi(x_2)] = e\psi'(\xi)\varphi'(\eta)(x - x_2)^2, \quad (x, y) \in U. \end{aligned}$$

由于式中 ξ 和 η 落在以 (x_2, y_2) 为中心的某一去心邻域内, 故 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} \geq 0$, 且 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} = 0$ 的集合上除了 (x_2, y_2) 外无整条轨线. 又已知 $(1 - \frac{1}{n})B_1 - A_0 - \frac{A_1}{n}B_1^{1+n} > 0$, 故 (x_2, y_2) 为不稳定点, 因此 (x_2, y_2) 可作作为环域的内境界线.

现构造环域的外境界线 L . $L_1: x = 0$, 则 $\frac{dL_1}{dt} \Big|_{(3)} = \frac{dx}{dt} \Big|_{x=0} = h > 0$, 系统(3)穿过 L_1 的轨线从左到右; $L_2: y = 0$ 为系统(3)的轨线; $L_3: x - x_1 = 0$, $0 < y < M$, 其中 $M = \max_{x \in [x_2, x_1]} \varphi(x)$, 则 $\frac{dL_3}{dt} \Big|_{(3)} = \frac{dx}{dt} \Big|_{x=x_1} =$

$-cx_1^{1/n}y < 0$, 所以 $L_3:x-x_1=0$ 为系统(3) 的无切线段, 且穿过 L_3 的轨线从右到左; L_4 是系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi(x)[M-y], \\ \frac{dy}{dt} = ey[\phi(x)-w] \end{cases}$$

(4)

以 (x_1,M) 为起点的轨线. 系统(4) 有唯一的正平衡点 (x_2,M) , 当 $x > x_2, y > M$ 时, $\frac{dy}{dx}\Big|_{(4)} < 0$, 系统

(4) 通过 (x_1,M) 的轨线单调递减且与 $x=x_2$ 相交于点 (x_2,N) , 该段轨线记为 L_4 , 且 $N > M$. 在 L_4 上,

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{(3)} = \phi(x)[\varphi(x)-y] < \phi(x)[M-y] = \frac{dx}{dt}\Big|_{(4)} < 0, \quad \frac{dy}{dt}\Big|_{(3)} = \frac{dy}{dt}\Big|_{(4)} = ey[\phi(x)-w] > 0,$$

即系

统(3) 穿过 L_4 的轨线从右斜上向左. 过 (x_2,N) 做水平线段 $L_5:y-N=0$, 因为 $\psi'(x) > 0 (x > 0)$, 所

$$\text{以当 } x < x_2 \text{ 时, } \phi(x) < \phi(x_2) = w, \text{ 于是 } \frac{dL_5}{dt}\Big|_{(3)} = \frac{dy}{dt}\Big|_{y=N} = eN[\phi(x)-w] < 0,$$

即系统(3) 穿过 L_5

的轨线从上到下. 由以上知, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 构成了系统的环境的外境界线, 且穿过边界的轨线均从外到内, 所以在 (x_2, y_2) 的周围至少存在一个稳定的极限环.

因为 $y_2 > 0$ 与 $B_1m(B_1^{-1}) > 0$ 等价, 因此得到以下结论:

定理 3 当 $(1-\frac{1}{n})B_1-A_0-\frac{A_1}{n}B_1^{1+n} > 0$ 时, 系统(2) 在 G 内围绕点 $R(B_1^{-1}, B_1m(B_1^{-1}))$ 周围存在

唯一稳定的极限环.

证明 平衡点 $R(B_1^{-1}, B_1m(B_1^{-1}))$ 记为 $R(x_0, y_0)$, 做变换 $\bar{x} = x - x_0, \bar{y} = y - y_0$, 仍用 x, y 代替 \bar{x} 和 \bar{y} , 则系统(2) 转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x+x_0)^{n-1}[1-A_0(x+x_0)] - (y+y_0) + \frac{A_1}{x+x_0}, \\ \frac{dy}{dt} = B_0(x+x_0)^{n-2}(y+y_0)[-1+B_1(x+x_0)]. \end{cases}$$

(5)

再令 $x = u, y + y_0 = y_0e^v$, 则

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (u+x_0)^{n-1}[1-A_0(u+x_0)] - y_0e^v + \frac{A_1}{u+x_0} \triangleq -F(u) - \tau(v), \\ \frac{dv}{dt} = B_0(u+x_0)^{n-2}[-1+B_1(u+x_0)] \triangleq g(u), \end{cases}$$

(6)

其中 $F(u) = -(u+x_0)^{n-1} + A_0(u+x_0)^n - \frac{A_1}{u+x_0} + y_0, \tau(v) = y_0(e^v-1), g(u) = B_0(u+x_0)^{n-2}[-1+B_1(u+x_0)] = B_0(u+x_0)^{n-2}[-1+B_1(u+B_1^{-1})] = B_0B_1u(u+x_0)^{n-2}, f(u) = F'(u) = -(n-1) \cdot (u+x_0)^{n-2} + A_0n(u+x_0)^{n-1} + \frac{A_1}{(u+x_0)^2}$. 下面验证系统(6) 满足张芷芬唯一性定理^[9] 的条件:

$$1) \quad ug(u) = B_0B_1u^2(u+x_0)^{n-2} > 0 (u \neq 0), \quad G(u) = \int_0^u g(u)du = \int_0^u B_0B_1u(u+x_0)^{n-2}du = \frac{B_0B_1}{n-1} \cdot$$

$$(u+x_0)^n \left[\frac{u}{u+x_0} - \frac{1}{n} \right] + \frac{B_0B_1x_0^n}{n(n-1)}, \text{ 所以 } G(+\infty) = +\infty, \quad G(-x_0+0) = \frac{B_0B_1x_0^n}{n(n-1)} > 0;$$

$$2) \quad \tau(0) = 0, \quad v\tau(v) = y_0v(e^v-1) > 0 (v \neq 0), \quad \tau(+\infty) = +\infty, \quad \tau(-\infty) = -y_0, \quad \tau'(v) = y_0e^v > 0;$$

$$3) \quad F(0) = -x_0^{n-1} + A_0x_0^n - \frac{A_1}{x_0} + y_0 = 0, \quad f(0) = -(n-1)x_0^{n-2} + A_0nx_0^{n-1} + \frac{A_1}{x_0^2} = -nB_1^{1-n}[(1-$$

$$\frac{1}{n})B_1-A_0-\frac{A_1}{n}B_1^{1+n}] < 0, \quad \frac{f(u)}{g(u)} = \frac{1}{B_0B_1} \left[-\frac{n-1}{u} + \frac{A_0n(u+x_0)}{u} + \frac{A_1}{u(u+x_0)^n} \right], \quad \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right)' =$$

$$\frac{1}{B_0B_1u^2} \left[\frac{n}{B_1} \left[(1-\frac{1}{n})B_1-A_0-\frac{A_1}{n}B_1^{1+n} \right] + A_1B_1^n - \frac{A_1(u+B_1^{-1}+un)}{(u+B_1^{-1})^{n+1}} \right]. \text{ 当 } u > -B_1^{-1} \text{ 时, 记 } T(u) = A_1B_1^n -$$

$\frac{A_1(u+B_1^{-1}+un)}{(u+B_1^{-1})^{n+1}}$, 则 $T'(u)=\frac{n(n+1)A_1u}{(u+B_1^{-1})^{n+2}}$, 易得 $T(u)u=0$ 处有最小值 0. 故当 $u>-B_1^{-1}$ 且 $u\neq 0$ 时, $T(u)>0$, 于是 $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)'\gt 0$.

综上, 由张芷芬唯一性定理知, 系统(2)在 G 内围绕点 $R(B_1^{-1}, B_1m(B_1^{-1}))$ 周围存在唯一稳定的极限环.

4 数值模拟与生态意义

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x^2(1-x)-y+\frac{1}{x}, \\ \frac{dy}{dt}=xy(-1+x). \end{cases}$$

(模型 1)

模型 1 在第一象限有唯一正平衡点 $R(1,1)$, 且各参数满足定理 1 的条件. 利用 Matlab 绘图程序, 得到第一象限出发的轨线均无限趋于正平衡点 $R(1,1)$ 的相图, 如图 1 所示.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x^3(1-0.25x)-y+\frac{1}{x}, \\ \frac{dy}{dt}=x^2y(-1+x). \end{cases}$$

(模型 2)

模型 2 在第一象限有唯一正平衡点 $R(1,1.75)$, 且各参数满足定理 3 的条件. 利用 Matlab 绘图程序, 得到第一象限的正平衡点 $R(1,1.75)$ 周围存在唯一稳定的极限环的相图, 如图 2 所示.

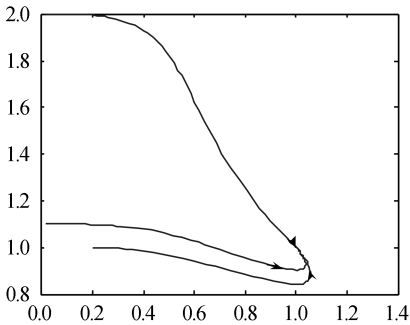


图 1 模型 1 的相图

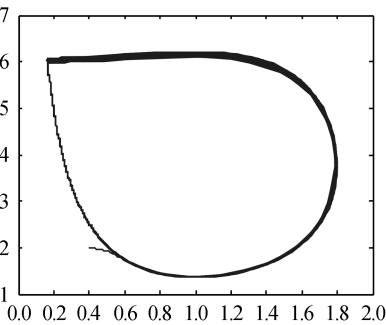


图 2 模型 2 的相图

生态意义: 定理 1 的结论表明, 在相应的参数条件下, 两种群共生存, 最终保持在平衡位置; 定理 2 的结论表明, 两种群均不会灭绝, 它们的数量在正平衡点 R 邻近且呈现为稳定的周期振荡.

参考文献：

[1] 沈伯骞, 沈聪. 食饵具有常投放的一类稀疏效应捕食系统[J]. 数学杂志, 2000, 20(2): 173-179.
[2] 陈柳娟. 稀疏效应下具常数投放率的食饵-捕食系统的极限环[J]. 数学研究, 2006, 39(3): 293-298.
[3] 匡奕群, 邱梅清. 具常数存放的非线性功能反应函数捕食模型的定性分析[J]. 数学的实践与认识, 2007, 35(15): 104-109.
[4] 杨春霞, 王辉, 胡志兴. 具常数投放率功能反应为 \sqrt{x} 的食饵-捕食系统的定性分析[J]. 生物数学学报, 2010, 25(1): 97-103.
[5] 傅仙发. 具有恒定收获率的 Holling-II 型捕食者-食饵模型的平衡点及稳定性分析[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版), 2017, 33(1): 85-88.
[6] 韦煜明, 覃艳婷. 一类食饵具有常数收获率和 Holling III 型功能性反应的捕食者-食饵模型的定性分析[J]. 生物数学学报, 2015, 30(4): 673-681.
[7] 张敬, 高文杰, 周莉. 两种群分别有常投放率和常收获率的 Holling-IV 类捕食系统[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(1): 11-15.
[8] 王学蕾, 孟新柱. 一类具功能反应的食饵-捕食系统模型的定性分析[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(1): 166-170.
[9] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 208-212.