

文章编号: 1004-4353(2017)04-0327-07

约束 Hamilton 系统 Mei 对称性的 摄动和绝热不变量

郑明亮

(浙江理工大学 理学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 基于一般力学系统的对称性与守恒量理论,研究了相空间中奇异系统 Mei 对称性的摄动与绝热不变量问题. 首先,给出了约束 Hamilton 系统的正则方程、系统 Mei 对称性确定方程、限制方程、附加限制方程以及结构方程和精确不变量的存在形式,在此基础上研究了系统正则方程受微扰后,系统无限小生成元的变化,得到了系统 Mei 对称性摄动确定方程以及导致的 Mei 绝热不变量的形式和条件;其次,讨论了系统 Mei 对称性摄动与 Noether 对称性摄动、Lie 对称性摄动之间的关系,并寻求了其他形式的高阶绝热不变量;最后,通过实例验证了本文结果的正确性.

关键词: 约束 Hamilton 系统; 正则方程; Mei 对称性; 摄动; Mei 绝热不变量

中图分类号: O316; O322; O175

文献标识码: A

Perturbation and adiabatic invariants of Mei symmetry for constrained Hamilton system

ZHENG Mingliang

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Based on the theory of symmetry and conservation in general mechanical systems, the perturbation and adiabatic invariants of Mei symmetry of singular system in phase space are studied. Firstly, we give the canonical equations of the constrained Hamilton system, the determining equations of Mei symmetry, the restricted equations and the additional constraint equations, as well as the structural equations and the form of exact invariant, meanwhile, we study the change of the infinitesimal generating elements when the canonical equations are perturbed, and we get the perturbation determining equations of Mei symmetry, the condition and the form of Mei type adiabatic invariants. Secondly, we discuss the relationship among the perturbation of Mei symmetry, Noether symmetry and Lie symmetry, and seek other forms of high-order adiabatic invariants. Finally, the correctness of the results of this paper are verified by an example.

Keywords: constrained Hamilton system; canonical equations; Mei symmetry; perturbation; Mei adiabatic invariants

0 引言

在 Legendre 变换下,奇异 Legendre 系统过渡到相空间用 Hamilton 正则变量描述时,其正则变量之间存在固有内在约束,称为约束 Hamilton 系统^[1]. 在数学物理和工程技术中,许多重要的动力学问题都符合约束 Hamilton 系统模型,例如:非树形多体机器人系统动力学模型、电力工程中柔性交流输电系统的非

线性控制方程、现代物理学中光的横移现象、量子电动力学行为和超弦理论等. 在分析力学中, 有关约束 Hamilton 系统对称性理论和守恒量的研究受到越来越多的重视, 并取得了一些进展, 例如: Dirac^[2-3] 和 Li^[4-7] 最早研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Noether 对称性与守恒量及其相关物理应用; 梅凤翔^[8] 和张毅等^[9] 分别在位形空间和相空间研究了奇异系统 Lie 对称性与守恒量; 罗绍凯^[10] 研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性与守恒量, 并说明了 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系; 李爱民等^[11] 研究了外在约束下约束 Hamilton 的正则对称性理论, 并与非奇异系统做了对比; 傅景礼等^[12] 用梯度理论研究了约束 Hamilton 系统的稳定性.

由于任何力学系统的某些参数在各种实际环境影响下都常会发生变化, 因此可将参数缓慢变化视为一个微小扰动(也称为摄动). 外界微扰会使系统原有的对称性和精确不变量发生变化, 而对称性和不变量又与系统的可积性以及某些动力学特性之间有着密切关系^[13], 因此有必要对对称性的摄动与绝热不变量进行研究. 目前, 力学系统的对称性摄动与绝热不变量的研究主要集中在非奇异力学系统^[14-20]、Noether 对称性摄动^[21] 和 Lie 对称性摄动^[22] 导致的绝热不变量存在条件和形式以及相关逆问题等方面, 而对 Mei 对称性研究得较少, 在相关文献中也未见到用 Mei 对称性摄动来研究约束 Hamilton 系统的新型绝热不变量. 由于在某些情况下, 力学系统的 Mei 对称性对系统的守恒量和积分曲线求解将会带来很大方便; 因此, 本文基于一般动力学对称性与不变量理论, 研究仅含第二类约束的约束 Hamilton 系统 Mei 对称性的摄动和绝热不变量问题, 并通过实例验证本文结果的正确性.

1 约束 Hamilton 系统运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s=1, \cdots, n)$ 来确定, 系统的 Lagrange 函数为 $L(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, 广义动量为 $p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (s=1, \cdots, n)$, L 的 Hess 矩阵 $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right]$ 的秩为 $r < n$. 利用 Legendre 变换 $H = p_i \dot{q}_i - L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, 将 Lagrange 系统描述过渡到 Hamilton 系统描述时, 在相空间中正则变量之间存在约束:

$$\Phi_j(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0, \quad j = 1, \cdots, n - r.$$

(1)

对于非独立的 q_s 和 p_s 可恰当选取 λ_j , 则约束 Hamilton 系统的正则方程为^[1]:

$$\begin{cases} \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} + \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s} = g_s(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \\ \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} - \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s} + Q_s = h_s(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}). \end{cases}$$

(2)

其中 $s=1, 2, \cdots, n$, $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \tilde{Q}_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}))$ 为非势广义力, λ_j 为约束乘子.

现考虑约束式(1) 仅为第二类约束, 即 $\det \{ \Phi_i, \Phi_j \} |_{\Phi=0} \neq 0 (i \neq j; i, j=1, \cdots, n-r)$, 那么所有约束乘子 λ_j 可由约束的自洽稳定条件完全确定^[23], $\lambda_j = \lambda_j(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$.

这里需要注意的是, 在约束 Hamilton 方程的导出过程中, 由于正则变量之间存在的约束式(1) 必须适合相容性条件, 以使 Lagrange 描述与 Hamilton 描述的结果相同, 所以在推导式(2) 时, 有如下附加限制方程^[7]:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s} \delta p_s = 0.$$

(3)

2 约束 Hamilton 系统 Mei 对称性与守恒量

按照对称性理论, 首先需要引入时间、广义坐标和广义动量的单参连续群无限小变换:

$$t^* = t + \epsilon \xi_0(t, q_s, p_s), \quad q_s^* = q_s + \epsilon \xi_s(t, q_s, p_s), \quad p_s^* = p_s + \epsilon \eta_s(t, q_s, p_s),$$

(4)

其中 ϵ 为无限小参数, ξ_0, ξ_s, η_s 为无限小变换生成元. 取无限小生成元向量和其一次扩展为:

$$\begin{cases} X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s \frac{\partial}{\partial p_s}, \\ X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\eta}_s - \dot{p}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial p_s}. \end{cases} \quad (5)$$

定义 1 如果约束 Hamilton 系统的正则函数 H 、约束方程 $\Phi_j = 0$ 和非保守力 Q_s 在无限小变换(4)下使得系统微分运动方程(2)和代数限制方程(1)的形式保持不变,则称这种不变性为约束 Hamilton 系统正则方程的第一类 Mei 对称性(形式不变性).

根据 Mei 对称性理论^[24],约束 Hamilton 系统的强 Mei 对称性的判据方程可表示为:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_s}(X^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial p_s}(X^{(0)}(\Phi_j)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_s}(X^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial q_s}(X^{(0)}(\Phi_j)) - X^{(0)}(Q_s) = 0, \\ X^{(0)}(\Phi_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))|_{\Phi_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})=0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s}(\eta_s - \dot{p}_s \xi_0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

命题 1 如果无限小群变换(4)的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 是约束 Hamilton 系统(1)–(3)的强 Mei 对称性,即无限小生成元满足判据方程(6),且存在规范函数 $G_M = G_M(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ 满足如下结构方程:

$$p_s \dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t} \xi_0 - \frac{\partial H}{\partial q_s} \xi_s - H \dot{\xi}_0 + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = -\dot{G}_M, \quad (7)$$

则系统的 Mei 对称性导致的 Mei 精确不变量^[24]:

$$I = p_s \xi_s - H \xi_0 + G_M = \text{const}. \quad (8)$$

3 约束 Hamilton 系统 Mei 对称性摄动与 Mei 绝热不变量

首先就一般约束力学系统引入拓广意义下的绝热不变量概念.

定义 2 假设约束力学系统受到小干扰力 νW_s 的作用, ν 为一远小于 1 的参数,如果 $I_n(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \nu)$ 是力学系统中一个含有 ν 的最高次幂为 n 的物理量,且它对时间 t 的一阶导数正比于 ν^{n+1} ,则称 $I_n(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \nu)$ 是该力学系统的一个 n 阶绝热不变量.

在外扰动 $\nu W_s(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 的作用下,约束 Hamilton 系统原有微分运动方程以及对称性与不变量均会发生相应的改变,则运动正轨满足的新 Hamilton 正则方程为:

$$\begin{cases} \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} + \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s}, \\ \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} - \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s} + Q_s + \nu W_s. \end{cases} \quad (9)$$

假设新的 Mei 对称无限小生成函数是在未扰时 Mei 对称变换生成函数基础上的摄动,则:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_0(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu) &= \xi_0 + \nu \xi_0^1 + \nu^2 \xi_0^2 + \nu^3 \xi_0^3 + \cdots, \\ \bar{\xi}_s(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu) &= \xi_s + \nu \xi_s^1 + \nu^2 \xi_s^2 + \nu^3 \xi_s^3 + \cdots, \\ \bar{\eta}_s(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu) &= \eta_s + \nu \eta_s^1 + \nu^2 \eta_s^2 + \nu^3 \eta_s^3 + \cdots. \end{aligned} \quad (10)$$

受扰后的无限小生成元向量变为:

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(0)} &= \bar{\xi}_0 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\xi}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \bar{\eta}_s \frac{\partial}{\partial p_s} = X^{(0)} + \nu X_1^{(0)} + \nu^2 X_2^{(0)} + \cdots, \\ X_m^{(0)} &= \xi_0^m \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s^m \frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s^m \frac{\partial}{\partial p_s}. \end{aligned} \quad (11)$$

根据相空间中约束力学系统的 Mei 对称性理论,若新无限小生成元 $\xi_0, \xi_0^m, \xi_s, \xi_s^m, \eta_s, \eta_s^m$ 满足如下判据方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_s}(\bar{X}^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial p_s}(\bar{X}^{(0)}(\Phi_j)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_s}(\bar{X}^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial q_s}(\bar{X}^{(0)}(\Phi_j)) - \bar{X}^{(0)}(Q_s) - \nu \bar{X}^{(0)}(W_s) = 0, \\ \bar{X}^{(0)}(\Phi_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))|_{\Phi_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})=0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s}(\bar{\xi}_s - \dot{q}_s \bar{\xi}_0) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s}(\eta_s - \dot{p}_s \bar{\xi}_0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

则相应对称性为受扰动后的相空间中约束 Hamilton 系统(1)、(3) 和(9) 的强 Mei 对称性. 将式(10) 和(11) 代入式(12), 并结合未扰动判据方程(6) 比较等号两边 ν^m 的系数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_s}(X_m^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial p_s}(X_m^{(0)}(\Phi_j)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_s}(X_m^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial q_s}(X_m^{(0)}(\Phi_j)) - X_m^{(0)}(Q_s) - X_{m-1}^{(0)}(W_s) = 0, \\ X_m^{(0)}(\Phi_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))|_{\Phi_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})=0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s}(\xi_s^m - \dot{q}_s \xi_0^m) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s}(\eta_s^m - \dot{p}_s \xi_0^m) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

式(13) 即为相空间中约束 Hamilton 系统(1)、(3) 和(2) 的强 Mei 对称性摄动确定方程, 由此易知规范函数 G 也发生了小摄动, 即:

$$\bar{G}_M = G_M + \nu G_M^1 + \nu^2 G_M^2 + \nu^3 G_M^3 + \cdots. \quad (14)$$

命题 2 对于受到小干扰力 νW_s 作用的相空间中约束 Hamilton 系统(1)、(3) 和(9), 系统如果存在无限小生成元函数 $\xi_0, \xi_0^m, \xi_s, \xi_s^m, \eta_s, \eta_s^m$ 满足强 Mei 对称性摄动确定方程(13), 且存在新规范函数 $G^k(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 满足如下结构方程:

$$\begin{cases} X_m^{(0)}(p_s) \frac{\bar{d}}{dt}(\xi_s) + X_{m-1}^{(0)} W_k \frac{\partial \xi_s}{\partial p_k} + \frac{\bar{d}}{dt}[X_m^{(0)}(p_s)] \xi_s + W_k \frac{\partial}{\partial p_k}[X_m^{(0)}(p_s)] \xi_s - \\ X_0^{(0)}[X_m^{(0)}(H)] - X_m^{(0)}(H) \frac{\bar{d}}{dt}(\xi_0) - X_{m-1}^{(0)}(H) W_k \frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} + X_m^{(0)}(Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \\ X_{m-1}^{(0)}(W_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt}(G_M^m) + W_k \frac{\partial G_M^{m-1}}{\partial p_k} = 0, \\ \frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + g_s \frac{\partial}{\partial q_s} + h_s \frac{\partial}{\partial p_s}, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $m=0$ 时, 约定 $\xi_0^{-1} = \xi_s^{-1} = \eta^{-1} = G^{-1} = 0$, 则系统的强 Mei 对称性摄动导致的 n 阶 Mei 绝热不变量:

$$I_n = \nu^m [X_m^{(0)}(p_s) \xi_s - X_m^{(0)} H \xi_0 + G_M^m], \quad m=0, 1, 2, \cdots, n. \quad (16)$$

证明 将 I_n 对时间 t 求导数, 有:

$$\frac{\bar{d}I_n}{dt} = \nu^m \left\{ X_m^{(0)}(p_s) \frac{\bar{d}\xi_s}{dt} + \frac{\bar{d}[X_m^{(0)}(p_s)]}{dt} \xi_s - X_m^{(0)}(H) \frac{\bar{d}\xi_0}{dt} - \frac{\bar{d}[X_m^{(0)}(H)]}{dt} \xi_0 + \frac{\bar{d}G_M^m}{dt} \right\}.$$

因为 $\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k}$, 利用摄动确定方程(13) 和结构方程(15) 得:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}I_n}{dt} &= \nu^m \left\{ X_m^{(0)}(p_s) \left(\frac{\bar{d}}{dt} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \xi_s + \left(\frac{\bar{d}}{dt} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) [X_m^{(0)}(p_s)] \xi_s - X_m^{(0)}(H) \left(\frac{\bar{d}}{dt} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \xi_0 - \right. \\ &\quad \left[\frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial t} + g_k \frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial q_k} + (h_k + \nu W_k) \frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial p_k} \right] \xi_0 + \frac{\bar{d}G_M^m}{dt} + \nu W_k \frac{\partial G_M^m}{\partial p_k} \Big\} = \\ &\nu^m \left\{ X_m^{(0)}(p_s) \left(\frac{\bar{d}}{dt} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \xi_s + \left(\frac{\bar{d}}{dt} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) [X_m^{(0)}(p_s)] \xi_s - X_m^{(0)}(H) \left(\frac{\bar{d}}{dt} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \xi_0 - \right. \\ &\quad \left[\frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial q_k} \xi_s^k + \frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial p_k} \eta_s^k \right] + \frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial q_k} (\xi_s^k - g_k \xi_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial X_m^{(0)}(H)}{\partial p_k} [\eta_s^k - (h_k + \nu W_k) \xi_0] + \frac{\bar{d}G_M^m}{dt} + \nu W_k \frac{\partial G_M^m}{\partial p_k} \Big\} = \\ & \nu^m \left\{ X_m^{(0)}(p_s) W_k \frac{\partial \xi_s}{\partial p_k} - X_{m-1}^{(0)}(p_s) W_k \frac{\partial \xi_s}{\partial p_k} + \nu W_k \frac{\partial}{\partial p_k} [X_m^{(0)}(p_s)] \xi_s - W_k \frac{\partial}{\partial p_k} [X_{m-1}^{(0)}(p_s)] \xi_s - \right. \\ & \left. \nu X_m^{(0)}(H) W_k \frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} + X_{m-1}^{(0)}(H) W_k \frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} + \nu W_k \frac{\partial G_M^m}{\partial p_k} - W_k \frac{\partial G_M^{m-1}}{\partial p_k} \right\} = \\ & \nu^{m+1} \left\{ X_m^{(0)}(p_s) W_k \frac{\partial \xi_s}{\partial p_k} + W_k \frac{\partial}{\partial p_k} [X_m^{(0)}(p_s)] \xi_s - X_m^{(0)}(H) W_k \frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} + X_{m-1}^{(0)}(H) W_k \frac{\partial \xi_0}{\partial p_k} + W_k \frac{\partial G_M^m}{\partial p_k} \right\}. \end{aligned}$$

上式表明 $\frac{\bar{d}I_n}{dt}$ 正比于 ν^{n+1} , 由此可知 I_n 是约束 Hamilton 系统的一个 n 阶绝热不变量. 从上面的证明还可以看出, 当 $W_s = 0$ 时, $\frac{\bar{d}I_n}{dt} = 0$, 此时的 I_n 是一个精确不变量, 因而力学系统的精确不变量是一个特殊的绝热不变量, 反之不然.

4 Mei 对称性摄动与 Noether 对称性摄动和 Lie 对称性摄动的关系

利用 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性之间的关系^[10], 本文给出如下命题:

命题 3(Mei-Noether 联合对称性摄动定理) 对于给定的约束 Hamilton 系统(1)–(3), 如果新无限小变换(10)的系列生成元 $\xi_0, \xi_0^m, \xi_s, \xi_s^m, \eta_s, \eta_s^m$ 满足强 Mei 对称性摄动确定方程(13), 而且存在另一新的系列规范函数 $G_N(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}), G_N^1(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \dots, G_N^k(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 满足广义 Noether 等式:

$$\begin{aligned} & p_s \frac{\bar{d}\xi_s^m}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \xi_0^m - \frac{\partial H}{\partial q_s} \xi_s^m - \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s} \eta_s^m - H \frac{\bar{d}\xi_0^m}{dt} + Q_s(\xi_s^m - \dot{q}_s \xi_0^m) + \\ & W_s(\xi_s^{m-1} - \dot{q}_s \xi_0^{m-1}) + \frac{\bar{d}G_N^m}{dt} + W_k p_s \frac{\partial \xi_s^{m-1}}{\partial p_k} - W_k H \frac{\partial \xi_0^{m-1}}{\partial p_k} + W_k \frac{\partial G_N^{m-1}}{\partial p_k} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

则约束 Hamilton 系统(1)–(3)的强 Mei 对称性摄动同时可导致 Noether 对称性摄动, 反之, 亦然; 且系统 Mei-Noether 联合对称摄动存在如下 Noether 型 n 阶绝热不变量:

$$I_n(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu) = \nu^m [p_s \xi_s^m - H \xi_s^m + G_N^m]. \quad (18)$$

命题 4(Mei-Lie 联合对称性摄动定理) 对于给定的约束 Hamilton 系统(1)–(3), 如果新无限小变换(10)的系列生成元 $\xi_0, \xi_0^m, \xi_s, \xi_s^m, \eta_s, \eta_s^m$ 满足强 Mei 对称性摄动确定方程(13), 且有以下 Lie 对称性摄动方程成立:

$$\begin{cases} \frac{\bar{d}\xi_s^m}{dt} - g_s \frac{\bar{d}\xi_0^m}{dt} + W_k \frac{\partial \xi_s^{m-1}}{\partial p_k} - g_s W_k \frac{\partial \xi_0^{m-1}}{\partial p_k} = X_m^{(0)}(g_s), \\ \frac{\bar{d}\eta_s^m}{dt} - h_s \frac{\bar{d}\xi_0^m}{dt} - W_s \frac{\bar{d}\xi_s^{m-1}}{dt} + W_k \frac{\partial \eta_s^{m-1}}{\partial p_k} - h_s W_k \frac{\partial \xi_0^{m-1}}{\partial p_k} - W_s W_k \frac{\partial \xi_0^{m-2}}{\partial p_k} = X_m^{(0)}(h_s) + X_{m-1}^{(0)}(W_s), \end{cases} \quad (19)$$

则约束 Hamilton 系统(1)–(3)的强 Mei 对称性摄动同时可导致 Lie 对称性摄动; 反之, 亦然. 而且, 如果存在另一个规范函数 $\mu(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 满足以下结构方程:

$$\frac{\partial g_s}{\partial q_s} + \frac{\partial(h_s + \nu W_s)}{\partial p_s} + \frac{\bar{d} \ln \mu}{dt} = 0, \quad (20)$$

则系统的 Mei-Lie 对称性摄动可以导致 n 阶广义 Hojman 绝热不变量:

$$I_n = \nu^m \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial(\mu \xi_s^m)}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial(\mu \xi_s^m)}{\partial q_s} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial(\mu \eta_s^m)}{\partial p_s} - \frac{\bar{d}\xi_0^m}{dt} - W_s \frac{\partial \xi_0^{m-1}}{\partial p_s} \right]. \quad (21)$$

命题 5(Mei-Noether-Lie 统一对称性摄动定理) 对于给定的约束 Hamilton 系统(1)–(3), 如果新无限小变换(10)的系列生成元 $\xi_0, \xi_0^m, \xi_s, \xi_s^m, \eta_s, \eta_s^m$ 以及存在新的系列规范函数 $G_N(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}), G_N^1(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \dots, G_N^k(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 满足以下的确定方程和限制方程:

$$\begin{aligned} & [p_s \frac{\overline{d}\xi_s^m}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \xi_0^m - \frac{\partial H}{\partial q_s} \xi_s^m - \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s} \eta_s^m - H \frac{\overline{d}\xi_0^m}{dt} + Q_s(\xi_s^m - \dot{q}_s \xi_0^m) + W_s(\xi_s^{m-1} - \dot{q}_s \xi_0^{m-1}) + \frac{\overline{d}G_N^m}{dt} + \\ & W_k p_s \frac{\partial \xi_s^{m-1}}{\partial p_k} - W_k H \frac{\partial \xi_0^{m-1}}{\partial p_k} + W_k \frac{\partial G_N^{m-1}}{\partial p_k}]^2 + [\frac{\overline{d}\xi_s^m}{dt} - g_s \frac{\overline{d}\xi_0^m}{dt} + W_k \frac{\partial \xi_s^{m-1}}{\partial p_k} - g_s W_k \frac{\partial \xi_s^{m-1}}{\partial p_k} - \\ & X_m^{(0)}(g_s)]^2 + [\frac{\overline{d}\eta_s^m}{dt} - h_s \frac{\overline{d}\xi_0^m}{dt} - W_s \frac{\overline{d}\xi_s^{m-1}}{dt} + W_k \frac{\partial \eta_s^{m-1}}{\partial p_k} - h_s W_k \frac{\partial \xi_0^{m-1}}{\partial p_k} - \\ & W_s W_k \frac{\partial \xi_0^{m-2}}{\partial p_k} - X_m^{(0)}(h_s) - X_{m-1}^{(0)}(W_s)]^2 + [\frac{\partial}{\partial p_s}(X_m^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial p_s}(X_m^{(0)}(\Phi_j))]^2 + \\ & [\frac{\partial}{\partial q_s}(X_m^{(0)}(H)) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial q_s}(X_m^{(0)}(\Phi_j)) - X_m^{(0)}(Q_s) - X_{m-1}^{(0)}(W_s)]^2 = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{cases} X_m^{(0)}(\Phi_j(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}))|_{\Phi_j(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})=0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_s}(\xi_s^m - \dot{q}_s \xi_0^m) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_s}(\eta_s^m - \dot{p}_s \xi_0^m) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

则对应对称性的改变称之为约束 Hamilton 系统(1)–(3)的强 Mei-Noether-Lie 统一对称性摄动。

由以上易知,统一对称性摄动一定是 Noether 对称性摄动、Lie 对称性摄动和 Mei 对称性摄动,同时统一对称性摄动在一定条件下可以同时导致 Noether 绝热不变量(18)、广义 Hojman 绝热不变量(21)和 Mei 绝热不变量(16)。

5 算例

例 1 设某力学系统的 Lagrange 函数和非势广义力分别为： $L = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2} (q_1 - q_2)^2$, $Q_1 = -\dot{q}_2$, $Q_2 = \dot{q}_1$, 试研究系统 Mei 对称性的精确不变量与绝热不变量。

系统的广义动量和哈密顿函数为 $p_1 = \dot{q}_1 + q_2$, $p_2 = 0$, $H = \frac{1}{2} p_1^2 - p_1 q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 + q_1 q_2$. 系统 Lagrange 函数的 Hess 矩阵的秩 $r = 1$, 由此知系统正则变量之间存在一个约束 $\Phi(t, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = p_2 = 0$. 由约束的相容性条件容易得 $\lambda = \frac{1}{3} (2q_1 - q_2 - p_1)$. 由方程(2) 得系统的运动正则方程为：

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 - q_2, \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{3} (2q_1 - q_2 - p_1), \\ \dot{p}_1 = q_1 - q_2 - \frac{1}{3} (2q_1 - q_2 - p_1), \\ \dot{p}_2 = 2p_1 - q_1 - q_2. \end{cases}$$

由方程(6) 得强 Mei 对称性确定方程为：

$$\begin{cases} q_1 \frac{\partial(\xi_2 - \xi_1)}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial(\xi_1 - \eta_1)}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial(\eta_1 - \xi_2)}{\partial p_1} + (\eta_1 - \xi_2) + \lambda \frac{\partial \eta_2}{\partial p_1} = 0, \\ q_1 \frac{\partial(\xi_2 - \xi_1)}{\partial p_2} + q_2 \frac{\partial(\xi_1 - \eta_1)}{\partial p_2} + p_1 \frac{\partial(\eta_1 - \xi_2)}{\partial p_2} + \lambda \frac{\partial \eta_2}{\partial p_2} = 0, \\ q_1 \frac{\partial(\xi_2 - \xi_1)}{\partial q_1} + \xi_2 - \xi_1 + q_2 \frac{\partial(\xi_1 - \eta_1)}{\partial q_1} + p_1 \frac{\partial(\eta_1 - \xi_2)}{\partial q_1} + \lambda \frac{\partial \eta_2}{\partial q_1} - \frac{1}{3} (2\xi_1 - \xi_2 - \eta_1) = 0, \\ q_1 \frac{\partial(\xi_2 - \xi_1)}{\partial q_2} + q_2 \frac{\partial(\xi_1 - \eta_1)}{\partial q_2} + \xi_1 - \eta_1 + p_1 \frac{\partial(\eta_1 - \xi_2)}{\partial q_2} + \lambda \frac{\partial \eta_2}{\partial q_2} - (\eta_1 - \xi_2) = 0, \\ \eta_2 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

式(24) 有一组解,为 $\xi_0 = \eta_2 = 0$, $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = 1$. 由结构方程(7) 给出与生成元对应的规范函数为 $G_M = -2q_1 + q_2$. 由命题 1 知,系统有精确不变量： $I = p_1 + p_2 - 2q_1 + q_2 = \text{const.}$

为简便起见, 本文只研究系统 Mei 对称性的摄动与一阶绝热不变量. 假设系统受到的小扰动为 $\nu W_1 = \nu \dot{q}_1$, $\nu W_2 = \nu \dot{q}_2$, 则 Mei 对称性摄动确定方程(13) 有解, 为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \xi_0^1 = -1, \xi_1^1 = \xi_2^1 = \eta_1^1 = \eta_2^1 = 0. \quad (25)$$

由系统的结构方程(15) 给出:

$$G_M = -2q_1 + q_2, G_M^1 = -q_1 - q_2. \quad (26)$$

由命题 2, 将式(25) 和(26) 代入式(16), 可得到一阶绝热不变量:

$$I_1 = I + \nu \left[\frac{1}{2} p_1^2 - p_1 q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 + q_1 q_2 - q_1 - q_2 \right] = \\ p_1 + p_2 - 2q_1 + q_2 + \nu \left[\frac{1}{2} p_1^2 - p_1 q_2 - \frac{1}{2} q_1^2 + q_1 q_2 - q_1 - q_2 \right]. \quad (27)$$

进一步, 若按式(13) 求出高阶的摄动生成元 $\xi_0^m, \xi_s^m, \eta_s^m (m > 1)$ 以及对应式(15) 中的摄动规范函数 G_M^m , 则可求得系统的更高阶绝热不变量. 由于篇幅限制, 本文在此故省略.

易验证, 例 1 中的无限小生成元与规范函数以及其一阶摄动生成元与一阶摄动规范函数既是 Mei 对称性摄动和 Lie 对称性摄动, 也是 Noether 对称性摄动; 例 1 求得的一阶绝热不变量既是系统的 Mei 绝热不变量, 也是 Noether 绝热不变量.

6 结语

本文提出了由约束 Hamilton 系统 Mei 对称性摄动导致的一类新型 Mei 绝热不变量, 并建立了绝热不变量与对称变换之间的对应关系; 同时, 本文还研究了约束 Hamilton 系统 Mei、Lie 和 Noether 对称性摄动之间的关系, 发现这 3 种对称性摄动之间既可以相互独立, 也可以两两相“交”或三三相“交”. 值得注意的是, 本文在推导 Mei 绝热不变量过程中, 充分考虑了 Mei 对称性结构方程中所有无限小群变换生成元发生的摄动, 并利用了 $\frac{\tilde{d}}{dt}$ 显含无限小参数 ν , 因此本文结论更具一般性. 本文在研究中仅考虑了约束的第二类约束情况, 对于非第二类约束(含外在非完整约束)的约束 Hamilton 系统的绝热不变量研究, 完全可按照本文的方法进行研究.

参考文献:

- [1] 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1999.
- [2] Dirac P A M. Lecture on Quantum Mechanics[M]. New York: Yeshiva University Press, 1964.
- [3] Dirac P A M. Quantization of Singular systems[J]. Can J Math, 1950, 2: 122-199.
- [4] Li Z P, Jiang J H. Symmetries in Constrained Canonical System[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [5] 李子平. 非完整奇异系统正则形式的广义 Noether 定理及其逆定理[J]. 黄淮学刊, 1992, 3(1): 8-16.
- [6] 李子平. 正则形式的 Noether 定理及其应用[J]. 科学通报, 1991, 36(12): 954-958.
- [7] 李子平. 约束系统的经典和量子对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.
- [8] 梅凤翔, 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [9] 张毅, 薛耘. 仅含第二类约束的约束 Hamilton 系统的 Lie 对称性[J]. 物理学报, 2001, 50(5): 816-819.
- [10] 罗绍凯. 奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性[J]. 物理学报, 2004, 53(1): 5-11.
- [11] 李爱民, 江金环. 非完整约束系统的正则对称性[J]. 武汉交通职业学院学报, 2013, 15(3): 1-3.
- [12] 郑明亮, 傅景礼. 约束 Hamilton 系统的稳定性研究[J]. 商丘师范学院学报, 2017, 33(9): 14-17.
- [13] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991.
- [14] Kruskal M. Asymptotic theory of Hamiltonian and other system with all solutions nearly periodic[J]. J Math Phy, 1962, 3(4): 806-828.
- [15] Djukic D S. Adiabatic invariants for dynamical systems with one degree of freedom[J]. Int J Nonlinear Mech, 1981, 16: 489-498.

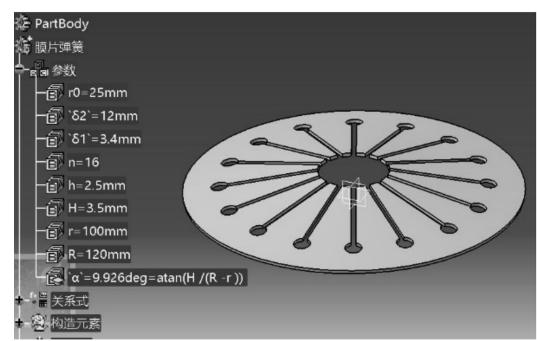


图 7 新生成的膜片弹簧模型

4 结束语

本文设计了一个膜片弹簧建模系统,实验结果表明该系统可创建符合参数选取原则的膜片弹簧模型,设计人员可重复使用,因此提高了膜片弹簧建模系统的使用效率.在本文研究中,膜片弹簧分离指根部窗口形状只选取了圆形,并未选取其他形状进行研究,因此在以后的研究中将选取其他形状进行设计,以完善本文方法.

参考文献:

[1] 赵韩,冯关华,黄康,等.干式双离合器的发展动态[J].机械传动,2012,36(12):121-125.
[2] 吴真远.汽车离合器膜片弹簧的优化设计[D].苏州:苏州大学,2011:15-23.
[3] 战东红.干式双离合器的参数化设计与分析[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2011:31-33.
[4] 李斌.基于 CATIA 二次开发的注塑模具智能设计系统的研究[D].长春:吉林大学,2016:10-11.
[5] 胡挺,吴立军. CATIA 二次开发技术基础[M].北京:电子工业出版社,2006:7-13.
[6] 王望予.汽车设计[M].北京:机械工业出版社,2008:58-61.
[7] Kulfan B M. Universal parametric geometry representation method[J]. Journal of Aircraft, 2008,45(1):142-158.
[8] 刘天慧. Visual Basic 程序设计教程[M].北京:清华大学出版社,2006:61-103.
[9] 孙斌,刘素梅,孔晓玲,等.基于 CATIA 的轴类零件特征造型库的设计[J].机械设计,2016,33(10):62-65.

.....
(上接第 333 页)

[16] 赵跃宇.力学系统对称性的摄动与绝热不变量[J].湖南大学学报(自然科学版),1996,23(1):45-50.
[17] Chen X W, Zhang R C, Mei F X. Perturbation to the symmetries of Birkhoff system and adiabatic invariants[J]. Acta Mechanica Sinica, 2000,16(3):282-288.
[18] Chen X W, Li Y M. Perturbation to symmetries and adiabatic invariants of a type of nonholonomic Singular system [J]. Chinese Physics, 2003,12(12):1349-1353.
[19] 张毅.相空间中离散力学系统对称性的摄动与 Hojman 型绝热不变量[J].物理学报,2007,56(4):1855-1859.
[20] 傅景礼,陈立群,谢凤萍.相对论 Birkhoff 系统的对称性摄动及其逆问题[J].物理学报,2003,52(11):2664-2670.
[21] 张毅.非保守动力学系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量[J].物理学报,2013,62(16):4501-4506.
[22] Luo S K, Chen X W, Guo Y X. Lie Symmetrical perturbation and adiabatic invariants of generalized Hojman type for lagrange systems[J]. Chinese Physics, 2007,16(11):3176-3181.
[23] 李元成,张毅,梁景辉.一类非完整奇异系统的 Lie 对称性与守恒量[J].物理学报,2002,51(10):2186-2190.
[24] 梅凤翔.分析力学:下卷[M].北京:北京理工大学出版社,2013.