文章编号：1004-4353(2017)04-0311-03

拟正交矩阵的若干性质

高小明
（闽南理工学院 信息管理学院，福建 泉州 362700）

摘要：基于正交矩阵概念，给出了 K-拟正交矩阵的概念，通过讨论拟正交矩阵的基本性质，研究了拟正交矩阵的行列式、逆矩阵、伴随矩阵、转置矩阵及其他矩阵的相关性质，并得到了拟正交矩阵的一些等价条件.
关键词：正交矩阵；拟正交矩阵；次正交矩阵
中图分类号：O151.21　　**文献标识码**：A

Some properties of the generalized orthogonal matrix

GAO Xiaoming
(*Department of Information Management*, *Minnan University of Science and Technology*, *Quanzhou* 362700, *China*)

Abstract: Based on the concept of orthogonal matrix, the concept of k-generalized orthogonal matrixhis is defined, and through the discussion of the basic properties of generalized orthogonal matrix, some relevant properties of its determinant, inverse matrix, adjoint matrix, transpose matrix, and other matrices are analyzed, and some equivalent conditions are obtained.
Keywords: orthogonal matrix; k-generalized orthogonal matrix; sub-orthogonal matrix

正交矩阵是一种特殊的矩阵，在优化理论、计算数学、信号分析等领域中具有很重要的地位，因此很多学者对正交矩阵进行了研究，并取得了很多的成果，例如：文献[1]研究了正交矩阵的性质；文献[2]推广了正交矩阵的概念，给出了行正交矩阵的概念；文献[3-6]分别给出了亚正交矩阵、强亚正交矩阵、次强亚正交矩阵以及准次强亚正交矩阵的概念，并得到了一些相关结果；文献[7]给出了次正交矩阵的概念，讨论了它的一些性质；文献[8-11]分别给出 J-次正交矩阵、K-次正交矩阵、K-拟次正交矩阵及亚次正交矩阵的概念，并研究了它们的性质. 基于上述研究，本文在正交矩阵概念的基础上，给出了拟正交矩阵的概念，得到了拟正交矩阵的逆矩阵、伴随矩阵、转置矩阵、拟正交矩阵的乘积仍是拟正交矩阵等相关性质.

1　预备知识

本文用 $\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵集，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{J}$ 表示次对角线元素全为 1，其余元素全为 0 的 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵、转置矩阵与行列式，易知 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{I}$.

定义 1　设 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$

收稿日期：2017－08－07
作者简介：高小明(1983—)，男，讲师，研究方向为矩阵理论.

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

引理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$.

2 主要结果及其证明

定义 2 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 若 $\exists 0<k\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{I}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 k-拟正交矩阵, 简称拟正交矩阵.

由定义 2 可知, 拟正交矩阵有以下等价定义:

1) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 若 $\exists 0<k\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 k-拟正交矩阵.

2) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 若 $\exists 0<k\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{I}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 k-拟正交矩阵.

3) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 若 $\exists 0<k\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 k-拟正交矩阵.

定义 3 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, 若 $\exists 0<k\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}^{2}=k\boldsymbol{I}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 k-拟对合矩阵, 简称拟对合矩阵.

性质 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 k-拟正交矩阵, 则:

1) $|\boldsymbol{A}|=\pm k^{\frac{n}{2}}$;

2) $\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{A}^{*}$、$c\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{AJ}$、$\boldsymbol{JA}$ 也是拟正交矩阵;

3) 若 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶拟正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}$ 也是拟正交矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{I}$, 则:

1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\,|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{2}=|k\boldsymbol{I}|=k^{n}$, 即 $|\boldsymbol{A}|=\pm k^{\frac{n}{2}}$.

2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(k\boldsymbol{I})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{I}$, $(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=k^{n}(k\boldsymbol{I})^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{I}$, $(\boldsymbol{AJ})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AJ}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(k\boldsymbol{I})\boldsymbol{J}=k\boldsymbol{J}^{2}=k\boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{A}^{*}$、$\boldsymbol{AJ}$ 是拟正交矩阵, 同理可证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$c\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{JA}$ 也是拟正交矩阵.

3) $\exists 0<m\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=m\boldsymbol{I}$, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{BA}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(m\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=\dfrac{m}{k}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}$ 是拟正交矩阵, 同理可证 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}$ 也是拟正交矩阵.

性质 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 k-拟正交矩阵, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BA})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

证明 由引理 1 可得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(k\boldsymbol{IB})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(k\boldsymbol{IB})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

性质 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 k-拟正交矩阵, 那么:

1) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda\neq 0$;

2) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $k\lambda^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值;

3) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值, 则 $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\cdots\cdot\lambda_m=\pm k^{\frac{n}{2}}$.

证明 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 k-拟正交矩阵, 则 $\exists 0<k\in\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{I}$.

1) λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\exists 0\neq\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n\times 1}$, 有 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$. 若 $\lambda=0$, 则 $\boldsymbol{Ax}=0$, 又 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 得 $\boldsymbol{x}=0$, 矛盾, 所以 $\lambda\neq 0$.

2) $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$, 两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=k\boldsymbol{x}$, 从而 $\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=k\lambda^{-1}\boldsymbol{x}$, 故 $k\lambda^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值.

3) $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\cdots\cdot\lambda_m=|\boldsymbol{A}|=\pm k^{\frac{n}{2}}$.

性质 4　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶 k-拟正交矩阵，则：

1）若 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

2）若 $|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|=0$，且 n 为奇数，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$.

3）若 n 为奇数，则 $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|=0$.

证明　$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶 k-拟正交矩阵，由性质 1 中的 1）知 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{B}|^2=k^n$.

1）由 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$，知 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|k^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})|=|k^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}|=k^{-n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=-k^{-n}|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$，即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

2）由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 且 n 为奇数，知 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|k^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}|=k^{-n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=(-1)^n k^{-n}\cdot|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$，即 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$.

3）根据 1）和 2）的证明过程可知，$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=(-1)^n k^{-2n}|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$，又 n 为奇数，则 $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|=-|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|$，得 $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|=0$.

性质 5　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，则：

1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\,(k>0)\Leftrightarrow$ 存在 n 阶拟正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}$；

2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,(k>0)\Leftrightarrow$ 存在 n 阶拟正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$.

证明　因 1）和 2）的证明类似，故这里仅证明 1）.

充分性的证明. 由 $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶拟正交矩阵，知 $\exists\, 0<k\in\boldsymbol{R}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{I}$，又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

必要性的证明. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$. 令 $\boldsymbol{Q}=k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}$，而 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=[k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}k(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=k^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=k^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=k^2\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=k^2\boldsymbol{B}\dfrac{1}{k}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶拟正交矩阵.

性质 6　若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足以下条件中的任意 2 个，则必满足第 3 个：

1）$\boldsymbol{A}$ 为拟正交矩阵；

2）$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵；

3）$\boldsymbol{A}$ 为拟对合矩阵.

证明　1）、2）$\Rightarrow$ 3）：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}\,(k>0)$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，于是 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{I}$；

2）、3）$\Rightarrow$ 1）：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{I}$，于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{I}$；

1）、3）$\Rightarrow$ 2）：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}\,(k>0)$，于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$，又 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

参考文献：

[1]　戴立辉，王泽文，刘龙章. 正交矩阵的若干性质[J]. 华东地质学院学报，2002，25(3)：267-269.

[2]　贾书伟，何承源. 行正交矩阵的一些性质[J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2011，37(1)：71-74.

[3]　袁晖坪. 亚正交矩阵与亚对称矩阵[J]. 高等数学研究，2001，4(4)：32-36.

[4]　秦应兵. 强亚正交矩阵及其性质[J]. 大学数学，2007，23(2)：171-173.

[5]　陈桂章，刘玉. 次强亚正交矩阵及其性质[J]. 高师理科学刊，2008，28(3)：25-29.

[6]　刘玉，许滋燕. 准次强亚正交矩阵及其性质[J]. 聊城大学学报(自然科学版)，2009，22(1)：25-27.

[7]　王文惠. 关于次正交矩阵[J]. 渝州大学学报(自然科学版)，1998，15(2)：11-15.

[8]　刘玉，黄风华. J-次正交矩阵及其性质[J]. 高师理科学刊，2009，29(1)：37-40.

[9]　刘玉，蔡乌芳. K-次正交矩阵及其性质[J]. 南通大学学报(自然科学版)，2009，8(1)：72-75.

[10]　张君敏，吴捷云. K-拟次正交矩阵[J]. 惠州学院学报(自然科学版)，2003，23(6)：7-11.

[11]　陈琳. 亚次正交矩阵及性质[J]. 周口师范学院学报，2004，21(5)：28-30.