

文章编号: 1004-4353(2017)04-0308-03

具有反馈控制的偏害模型边界平衡点的稳定性

杨英钟, 王宽程

(闽南理工学院, 福建 泉州 362700)

摘要: 研究具有反馈控制变量的两种群偏害模型边界平衡点的稳定性. 通过构造适当的 Lyapunov 绝灭函数获得了保证某个种群绝灭的充分性条件, 并证明了边界平衡点的稳定性. 最后, 通过数值模拟对所得结论进行了验证. 本文研究结果补充了文献[7]的相关结果.

关键词: 反馈控制; 绝灭; 偏害模型; Lyapunov 函数; 稳定性

中图分类号: O175.14

文献标识码: A

Stability of the boundary equilibrium of amensalism system with feedback controls

YANG Yingzhong, WANG Kuancheng

(Minnan University of Science and Technology, Quanzhou 362700, China)

Abstract: The stability of the boundary equilibrium of amensalism system with feedback controls is studied. By constructing a suitable extinction function and Lyapunov function, some sufficient conditions which ensure the attractivity of the boundary equilibrium are obtained. The stability of the boundary equilibrium is proved by constructing the Lyapunov function. Finally, the relevant conclusions are verified by numerical simulation. The research results supplement the related results of the literature [7].

Keywords: feedback controls; extinction; amensalism system; Lyapunov function; stability

0 引言

在现实生活中生态系统往往会受到不定因素的干扰, 为此具有反馈控制的生态系统的动力学行为受到学者们的高度重视. Niyaz 等^[1]研究了具有反馈控制和时滞合作系统的正周期解, 在文献[2-6]中, 学者们研究了反馈控制变量在多种生物系统中的应用. 2017 年, 黄宏韬等^[7]提出如下两种群偏害反馈控制模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \alpha_1 u_1), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(b_2 - a_{22}x_2 - \alpha_2 u_2), \\ \frac{du_1}{dt} = -\eta_1 u_1 + a_1 x_1, \\ \frac{du_2}{dt} = -\eta_2 u_2 + a_2 x_2. \end{cases} \quad (1)$$

其中参数 $a_i, b_i, a_{ij}, \alpha_i, \eta_i (i, j=1, 2)$ 均为正常数, $x_i (i=1, 2)$ 是种群在 t 时刻的生长密度, $u_i (i=1, 2)$ 是反馈控制变量. 在文献[7]中, 作者通过构造适当的 Lyapunov 函数, 得出当 $\frac{b_2}{b_1} < \frac{a_{22}\eta_2 + \alpha_2 a_2}{a_{12}\eta_2}$ 时, 系统(1)具有唯一的正平衡点, 但作者没有探讨上述系统边界平衡点的稳定性. 事实上, 随着人类活动的扩大, 很多物种濒临灭绝, 而稳定的边界平衡点的生态学含义恰恰表示某个物种最终灭绝, 因此研究系统(1)的边界平衡点的稳定性具有重要意义. 在文献[7]研究的基础上, 本文通过给定适当的控制变量, 使得系统(1)中的第1种群绝灭, 而第2种群保持稳定生长. 由于系统(1)的第2种群对第1种群的生长起不利作用, 而第1种群对第2种群的生长不起作用, 故本文只研究边界平衡点 $A(0, x_2^*, 0, u_2^*)$ 的稳定性.

1 主要结果及其证明

由 $\begin{cases} b_2 - a_{22}x_2 - \alpha_2 u_2 = 0 \\ -\eta_2 u_2 + a_2 x_2 = 0 \end{cases}$, 可得 $x_2^* = \frac{b_2 \eta_2}{a_{22} \eta_2 + \alpha_2 a_2}$, $u_2^* = \frac{b_2 a_2}{a_{22} \eta_2 + \alpha_2 a_2}$. 在给出边界平衡点 $A(0, x_2^*, 0, u_2^*)$ 的稳定性证明之前, 本文先给出如下引理:

引理 1 若 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_{22}\eta_2 + \alpha_2 a_2}{a_{12}\eta_2}$, 则对系统(1)的任一正解 $(x_1(t), x_2(t), u_1(t), u_2(t))^T$ 均有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$, $\int_0^{+\infty} x_1(t) dt < +\infty$.

证明 将 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_{22}\eta_2 + \alpha_2 a_2}{a_{12}\eta_2}$ 改写为 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{a_2}{a_{12}} \frac{\alpha_2}{\eta_2}$, 由实数稠密性可知, 存在 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使得 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{a_2}{a_{12}} \frac{\alpha_2}{\eta_2}$. 再由实数稠密性得 $\delta > \frac{\alpha_2}{\eta_2}$, 使得 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \delta \frac{a_2}{a_{12}} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{a_2}{a_{12}} \frac{\alpha_2}{\eta_2}$. 令 $\delta = \frac{r}{\beta}$, 则有 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{r}{\beta} \frac{a_2}{a_{12}} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{a_2}{a_{12}} \frac{\alpha_2}{\eta_2}$. 由 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{\alpha}{\beta}$, 得

$$\beta b_2 - \alpha b_1 > 0. \quad (2)$$

由 $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{r}{\beta} \frac{a_2}{a_{12}}$, 得

$$\alpha a_{12} - \beta a_{22} - r a_2 > 0. \quad (3)$$

由 $\frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{r}{\beta} \frac{a_2}{a_{12}} > \frac{a_{22}}{a_{12}} + \frac{a_2}{a_{12}} \frac{\alpha_2}{\eta_2}$, 得

$$r \eta_2 - \beta \alpha_2 > 0. \quad (4)$$

构造 Lyapunov 绝灭函数 $V_1(t) = x_1^\alpha x_2^{-\beta} e^{ru_2}$, 则有

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \left(\frac{\alpha}{x_1} \frac{dx_1}{dt} - \frac{\beta}{x_2} \frac{dx_2}{dt} + r \frac{du_2}{dt} \right) V_1(t) =$$

$$[-(\beta b_2 - \alpha b_1) - \alpha a_{11} x_1 - (\alpha a_{12} - \beta a_{22} - r a_2) x_2 - \alpha \alpha_1 u_1 - (r \eta_2 - \beta \alpha_2) u_2] V_1(t).$$

由式(2)–(4)得 $\frac{dV_1(t)}{dt} \leq -(\beta b_2 - \alpha b_1) V_1(t)$, 记 $\Delta = \beta b_2 - \alpha b_1 > 0$, 在两边从 0 到 t 积分, 得 $V_1(t) \leq V_1(0) e^{-\Delta t}$, 将其代入绝灭函数 $V_1(t) = x_1^\alpha x_2^{-\beta} e^{ru_2}$ 得 $x_1^\alpha x_2^{-\beta} e^{ru_2} \leq V_1(0) e^{-\Delta t}$, 整理可得 $x_1 \leq x_2^{\beta/\alpha} e^{(-\frac{r}{\alpha} + \frac{\Delta}{\alpha}) u_2} \cdot V_1(0)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{\Delta}{\alpha} t}$. 因为系统(1)的解是恒正且有界的, 所以存在 $M > 0$, 使得 $0 < x_2 < M, 0 < u_2 < M$, 于是有 $x_1 \leq M^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{\frac{r}{\alpha} M} V_1(0)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{\Delta}{\alpha} t}$, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$, 且 $\int_0^{+\infty} x_1(t) dt < +\infty$. 证毕.

由引理 1 和 $\frac{du_1}{dt} = -\eta_1 u_1 + a_1 x_1$, 再利用微分方程比较原理, 易知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_1(t) = 0$. 由此可得以下边界平衡点 $A(0, x_2^*, 0, u_2^*)$ 的稳定性定理.

定理 1 若 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_{22}\eta_2 + \alpha_2 a_2}{a_{12}\eta_2}$, 则边界平衡点 $A(0, x_2^*, 0, u_2^*)$ 是全局渐近稳定的.

证明 构造 Lyapunov 函数 $V_2(t) = \delta_1(x_2 - x_2^* - x_2^* \ln \frac{x_2}{x_2^*}) + \delta_2(u_2 - u_2^*)^2$, 则 $\frac{dV_2(t)}{dt} = \delta_1(\frac{dx_2}{dt} -$

$\frac{x_2^*}{x_2} \frac{dx_2}{dt}) + 2\delta_2(u_2 - u_2^*) \frac{du_2}{dt} = \delta_1(x_2 - x_2^*)(b_2 - a_{22}x_2 - \alpha_2 u_2) + 2\delta_2(u_2 - u_2^*)(-\eta_2 u_2 + a_2 x_2)$. 将 $\begin{cases} b_2 - a_{22}x_2^* - \alpha_2 u_2^* = 0 \\ -\eta_2 u_2^* + a_2 x_2^* = 0 \end{cases}$ 代入, 可得 $\frac{dV_2(t)}{dt} = \delta_1(x_2 - x_2^*)(-a_{22}(x_2 - x_2^*) - \alpha_2(u_2 - u_2^*)) + 2\delta_2(u_2 - u_2^*)(-\eta_2(u_2 - u_2^*) + a_2(x_2 - x_2^*)) = -\delta_1 a_{22}(x_2 - x_2^*)^2 - 2\delta_2 \eta_2(u_2 - u_2^*)^2 - (\delta_1 \alpha_2 - 2\delta_2 a_2)(x_2 - x_2^*) \cdot (u_2 - u_2^*)$. 令 $\delta_1 \alpha_2 - 2\delta_2 a_2 = 0$, 即 $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2a_2}{\alpha_2}$, 则有 $\frac{dV_2(t)}{dt} = -\delta_1 a_{22}(x_2 - x_2^*)^2 - 2\delta_2 \eta_2(u_2 - u_2^*)^2 \leq 0$,

当且仅当 $x_2 = x_2^*, u_2 = u_2^*$ 时取等号, 由此可知 $A(0, x_2^*, 0, u_2^*)$ 是全局渐近稳定的.

由定理 1 可得, 当 $\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_{22}\eta_2 + \alpha_2 a_2}{a_{12}\eta_2}$ 成立时, 无论系统解的初值如何选择, 取适当的控制变量均可以使第 1 个种群绝灭, 而第 2 个种群得以稳定生存.

2 数值模拟

考虑如下方程:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - 2x_1 - x_2 - 0.3u_1), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(3 - x_2 - 0.5u_2), \\ \frac{du_1}{dt} = -0.4u_1 + x_1, \\ \frac{du_2}{dt} = -0.5u_2 + x_2. \end{cases}$$

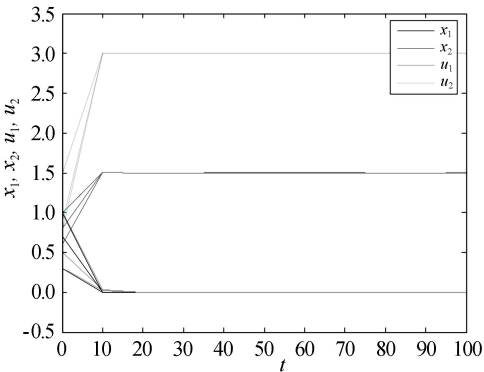


图 1 系统(1) 的数值模拟图

此时定理 1 的条件 $\frac{b_2}{b_1} = 3 > \frac{a_{22}\eta_2 + \alpha_2 a_2}{a_{12}\eta_2} = \frac{1 \times 0.5 + 0.5 \times 1}{1 \times 0.5} = 2$ 成立, 且系统(1) 的边界平衡点 $A(0, x_2^*, 0, u_2^*) = (0, 1.5, 0, 3)$ 是全局渐近稳定的. 图 1 是系统(1) 初值 $(x_1(0), x_2(0), u_1(0), u_2(0))$ 分别为 $(1, 0.6, 0.5, 0.8)$ 、 $(0.7, 1, 0.3, 0.9)$ 、 $(0.3, 0.8, 1, 1.5)$ 的解的数值模拟图.

参考文献:

[1] Niyaz T, Muhammadhaji A. Positive periodic solution of cooperative systems with delays and feedback controls[J]. International Journal of Differential Equations, 2013,2013(24):93-101.
[2] Li Z, Han M, Chen F. Influence of feedback controls on an autonomous Lotka-Volterra competitive system with infinite delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013,14(1):402-413.
[3] 赵亮,陈风德. 具有反馈控制的竞争系统边界平衡点的稳定性[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2013,14(5):516-519.
[4] 陈风德,谢向东. 合作种群模型动力学研究[M]. 北京:科学出版社,2014.
[5] 杨坤,王海娜,陈风德. 反馈控制 Lotka-Volterra 合作系统稳定性研究[J]. 应用数学, 2014(2):243-247.
[6] 陈风德,龚晓杰,普丽琼,等. 具有反馈控制的 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统研究[J]. 生物数学学报, 2015,30(2):328-332.
[7] 黄宏韬,林锦贤. 具有反馈控制变量的偏害模型稳定性研究[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2017,45(1):69-73.