文章编号: 1004-4353(2017)04-0302-06

一类诱导广义有序加权对数的连续区间有序加权调和平均算子及其应用

张超[1], 袁宏俊[2]
(1.宁波大红鹰学院 金融贸易学院, 浙江 宁波 315175;
2.安徽财经大学 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 结合连续区间有序加权调和平均(C-OWHA)与诱导广义加权对数平均(IGOWLA)两类算子,提出了一类诱导广义有序加权对数的 C-OWHA(IGOWLC-OWHA)算子. 以改进的 Theil 不等系数为相关性准则,构造了一种基于 IGOWLC-OWHA 算子的区间组合预测模型. 算例分析表明,该模型能有效提高预测精度.

关键词: C-OWHA 算子; IGOWLC-OWHA 算子; 改进的 Theil 不等系数; 区间组合预测
中图分类号: O224　　**文献标识码:** A

A class of induced generalized ordered weighted logarithmic continuous ordered weighted harmonic averaging (IGOWLC-OWHA) operators and its applications

ZHANG Chao[1], YUAN Hongjun[2]
(1. *School of Finance and Trade*, *Ningbo Dahongying University*, *Ningbo* 315175, *China*; 2. *Institute of Statistics and Applied Mathematics*, *Anhui University of Finance and Economics*, *Bengbu* 233030, *China*)

Abstract: This paper proposed a induced generalized ordered weighted logarithmic C-OWHA (IGOWLC-OWHA) operator by combined IGOWLA operator and C-OWHA operator. We selected improved Theil unequal coefficient as a correlation index and built a new type of combination forecasting model based on IGOWLC-OWHA operator. The new model can effectively improve the prediction accuracy by an illustrative example.

Keywords: C-OWHA operator; IGOWLC-OWHA operator; improved Theil unequal coefficient; interval combination forecasting

组合预测方法由 Bates 等[1]首先提出,此后该方法受到诸多研究者的关注,并得到了许多研究成果[2-5];但在这些研究成果中,绝大部分都是局限于点序列,缺乏对区间数的研究. 从现实情况来看,数据以区间数形式存在更为普遍和合理,因而对区间组合预测方法进行探讨更有现实意义. 针对点序列组合预测方法的缺陷,学者们在区间组合预测方面做了诸多研究,例如:Yager 构建了一种能把离散的区间数集结成某一实数的态度参数,并提出了 C-OWA 算子[6];文献[7]基于 C-OWA 算子提出了 WC-OWA、OWC-OWA 及 CC-OWA 等几类算子,对某一连续区间中的所有数据进行集成;文献[8]将 C-OWA 与 OWHA 算子相结合提出了 C-OWHA 算子,该算子能对连续的区间数据进行集成;文献[9]根据同种预测方法在不同时刻其权系数取值未必相同的特点,将 GOWLA 算子拓展为 IGOWLA 算子;

收稿日期: 2017 - 11 - 26　　**基金项目:** 国家社会科学基金青年项目(13CTJ006)
作者简介: 张超(1991—),男,助教,研究方向为数理统计.

文献[10-12]把连续区间算子与相关性准则相联系，建构了不同类别组合预测模型. 综上，现有的关于区间组合预测的研究绝大多数集中于处理单一区间数的集成问题，而对两个或两个以上区间数据信息集成问题的研究较为匮乏. 基于此，本文以 C-OWHA 算子为切入点，以补缺 C-OWHA 算子仅能集结单一区间数的短板为目的，将 IGOWLA 及 C-OWHA 这两类算子相结合，拓展成一类诱导广义有序加权对数的 C-OWHA（IGOWLC-OWHA）算子，并以改进的 Theil 不等系数为相关性准则构造了一个新的组合预测模型，最后采用算例验证了此模型在提高预测精度方面的有效性和可行性.

1　基本定义

定义 1[3]　设 $f_w: R^n \to R$ 为 n 元函数，若

$$f_w(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1/\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{b_i}\right), \tag{1}$$

则称 f_w 是 n 维有序加权调和平均（OWHA）算子. 其中 b_i 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中第 i 大的数，$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是与 f_w 相关的权重向量，$w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$.

定义 2[8]　设 $[a,b]$ 为区间数，若

$$F_Q([a,b])=1/\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}Q(y)}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{b}-y\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right)\mathrm{d}y\right), \tag{2}$$

则称 F_Q 为连续区间有序加权调和平均（C-OWHA）算子. 其中 $Q(y):[0,1]\to[0,1]$ 是基本的单位区间单调（BUM）函数，且符合 $Q(0)=0$，$Q(1)=1$；当 $y_1>y_2$ 时，$Q(y_1)\geqslant Q(y_2)$.

定义 3[8]　称 $\theta=\int_0^1Q(y)\mathrm{d}y$ 为 BUM 函数 $Q(y)$ 的态度参数.

由定义 3 及式(2)可得 $F_Q([a,b])=1/\left(\frac{\theta}{b}+\frac{1-\theta}{a}\right)$.

定义 4[9]　设 $\langle v_1,a_1\rangle,\langle v_2,a_2\rangle,\cdots,\langle v_n,a_n\rangle$ 为 n 个二维数组，令

$$f_w(\langle v_1,a_1\rangle,\langle v_2,a_2\rangle,\cdots,\langle v_n,a_n\rangle)=\exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\ln a_{v\text{-index}(i)}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}, \tag{3}$$

则称函数 f_w 为 n 维诱导广义有序加权对数平均（IGOWLA）算子. 其中 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是诱导变量，且 v-index(i) 是 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 中第 i 大的数的下标，$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 IGOWLA 权重向量，$w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，$\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,-\infty)$.

2　IGOWLC-OWHA 算子

定义 5　假定$[a_i,b_i]$是一组区间数，$\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle v_2,[a_2,b_2]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle$ 是二维数组，设 $g:\Omega^+\to R^+$，若

$$g_w(\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle)=\exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\ln F_Q([a_{v\text{-index}(i)},b_{v\text{-index}(i)}])\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}=$$

$$\exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\left(\ln\left(\frac{1}{\frac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\frac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}}\right)\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right\}=\exp\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\left(-\ln\left(\frac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\frac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}\right)\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right\}, \tag{4}$$

则称函数 g 为诱导广义有序加权对数平均的 C-OWHA（IGOWLC-OWHA）算子. 其中 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$ 各自的诱导变量，且 v-index(i) 是 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 第 i 大的数的下标，$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为与 g 相关的权重向量，$w_i\in[0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$.

由以上不难发现,IGOWLC-OWHA 算子具备与 C-OWA 系列算子相似的性质.因篇幅有限,以下本文只列出单调性推导过程,其他性质可参照文献[8]得出.

性质 1(单调性) 假设存在任意的 $i=1,\cdots,n$,满足 $a_i \geqslant a_i'$, $b_i \geqslant b_i'$,且 $\lambda \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, $0<\dfrac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\dfrac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}<1$,则

$$g(\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle v_2,[a_2,b_2]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle) \geqslant g(\langle v_1,[a_1',b_1']\rangle,\langle v_2,[a_2',b_2']\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n',b_n']\rangle).$$

证明 首先将式(5)两侧取两次对数,得 $\ln\ln(g)=\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\left(-\ln\left(\dfrac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\dfrac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}\right)\right)^{\lambda}\right)$.然后将该式两侧分别对 $a_{v\text{-index}(i)}$ 求导,可得

$$\frac{\partial \ln\ln(g)}{\partial a_{v\text{-index}(i)}}=\frac{w_i\left(-\ln\left(\dfrac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\dfrac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}\right)\right)^{\lambda-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i\left(-\ln\left(\dfrac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\dfrac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}\right)\right)^{\lambda}}\left(\frac{1-\theta}{\dfrac{a^2_{v\text{-index}(i)}\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\dfrac{a^2_{v\text{-index}(i)}(1-\theta)}{a_{v\text{-index}(i)}}}\right).$$

因 $\theta=\int_0^1 Q(y)\mathrm{d}y \in (0,1)$, $0<a_{v\text{-index}(i)}<b_{v\text{-index}(i)}$, $w_i \in [0,1]$,故 $\dfrac{\partial \ln\ln(g)}{\partial a_{v\text{-index}(i)}} \geqslant 0$,这表明函数 g 关于 $a_{v\text{-index}(i)}$ 单调递增.同理可证,函数 g 关于 $b_{v\text{-index}(i)}$ 也是单调递增的.

根据假设,由 $a_i \geqslant a_i'$, $b_i \geqslant b_i'$ 可得 $a_{v\text{-index}(i)} > a'_{v\text{-index}(i)}$, $b_{v\text{-index}(i)} > b'_{v\text{-index}(i)}$.依据单调性知,存在

$$g(\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle v_2,[a_2,b_2]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle) \geqslant g(\langle v_1,[a_1',b_1']\rangle,\langle v_2,[a_2',b_2']\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n',b_n']\rangle).$$

故性质 1 得证.

性质 2(幂等性) 假设存在任意的 $i=1,\cdots,n$,满足 $[a_i,b_i]=[a,b]$,则

$$g(\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle v_2,[a_2,b_2]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle)=F_Q([a,b]).$$

性质 3(介值性) 对满足 $0<a_i<b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的任意区间数 $[a_i,b_i]$,有

$$\min_i\{a_i\} \leqslant g(\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle v_2,[a_2,b_2]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle) \leqslant \max_i\{b_i\}.$$

性质 4(置换不变性) 设 $\pi=(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的任一置换,则有

$$g(\langle v_{\pi(1)},[a_{\pi(1)},b_{\pi(1)}]\rangle,\langle v_{\pi(2)},[a_{\pi(2)},b_{\pi(2)}]\rangle,\cdots,\langle v_{\pi(n)},[a_{\pi(n)},b_{\pi(n)}]\rangle)=g(\langle v_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle v_2,[a_2,b_2]\rangle,\cdots,\langle v_n,[a_n,b_n]\rangle).$$

3 基于 IGOWLC-OWHA 算子的组合预测模型

设某种社会经济现象的一组区间时间序列实际值为 $x_t=[a_t,b_t](t=1,2,\cdots,N)$, x_t 也可以表示成 $x_t=[c_t,r_t](t=1,2,\cdots,N)$,其中 $c_t=\dfrac{a_t+b_t}{2}$, $r_t=\dfrac{b_t-a_t}{2}$.将 c_t 定义成 x_t 的中心点,将 r_t 定义成 x_t 的半径.设定存在 m 种单项方法,并保证每个单项方法都能参与到组合预测,令 $\hat{x}_{it}=(\hat{a}_{it},\hat{b}_{it})$ 是 i 方法在时间点 t 的预测值,可表示成 $\hat{x}_{it}=(\hat{c}_{it},\hat{r}_{it})$, $i=1,2,\cdots,m$, $t=1,2,\cdots,N$.

定义 6 称 v_{it} 为第 i 种预测方法在时点 t 的预测精度,其中

$$v_{it}=\begin{cases}1-\left|\dfrac{c_t-\hat{c}_{it}}{r_t+\hat{r}_{it}}\right|, & 0<\left|\dfrac{c_t-\hat{c}_{it}}{r_t+\hat{r}_{it}}\right|<1;\\ \dfrac{|r_t-\hat{r}_{it}|}{r_t+\hat{r}_{it}}, & \left|\dfrac{c_t-\hat{c}_{it}}{r_t+\hat{r}_{it}}\right|=0;\\ 0, & \left|\dfrac{c_t-\hat{c}_{it}}{r_t+\hat{r}_{it}}\right| \geqslant 1.\end{cases} \tag{5}$$

显然, $v_{it} \in [0,1]$, $i=1,2,\cdots,m$, $t=1,2,\cdots,N$.将 v_{it} 视为预测值 $(\hat{a}_{it},\hat{b}_{it})$ 的诱导变量, $\langle v_{1t},[\hat{a}_{1t},$

$\hat{b}_{1t}]\rangle,\langle v_{2t},[\hat{a}_{2t},\hat{b}_{2t}]\rangle,\cdots,\langle v_{mt},[\hat{a}_{mt},\hat{b}_{mt}]\rangle$ 是由所有 v_{it} 及其相对应的 $\hat{x}_{it}$ 构建的二维数组. 此外，结合定义(3) 和定义(5) 可推出：

$$y_t = F_Q([a_t,b_t]) = 1/\left(\frac{\theta}{b_t}+\frac{1-\theta}{a_t}\right), \tag{6}$$

$$\hat{y}_{it} = F_Q([\hat{a}_{it},\hat{b}_{it}]) = 1/\left(\frac{\theta}{\hat{b}_{it}}+\frac{1-\theta}{\hat{a}_{it}}\right), \tag{7}$$

$$\hat{y}_t = \exp\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} w_i\left(-\ln\left(\frac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\frac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}\right)\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right\}. \tag{8}$$

上式中，y_t 为真实区间数由 C-OWHA 算子生成的时点 t 的真实集成数；$\hat{y}_{it}$ 为 i 方法由 C-OWHA 算子产生的预测集成数；$\hat{y}_t$ 为由 IGOWLC-OWHA 算子生成的 t 时点组合预测集成数，$\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 表示 m 个方法在组合模型中的权系数向量，$w_i \geqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$，$i=1,2,\cdots,m$，v-index(i) 表示 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 中排第 i 大数的下标.

定义 7[12]　称 $\tau(Y_t,\hat{Y}_t)$ 是真实数 $y_t(t=1,2,\cdots,N)$ 与组合预测数 $\hat{y}_t(t=1,2,\cdots,N)$ 之间改进的 Theil 不等系数. $\tau(Y_t,\hat{Y}_t)\in[0,\infty)$，$\tau(Y_t,\hat{Y}_t)$ 越低表明预测效果越好，其中

$$\tau(Y_t,\hat{Y}_t) = \sqrt{\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} y_t^2}.$$

若实际数 $y_t(t=1,2,\cdots,N)$ 等于组合预测数 $\hat{y}_t(t=1,2,\cdots,N)$，则 $\tau(Y_t,\hat{Y}_t)$ 最低，即 $\tau(Y_t,\hat{Y}_t)=0$. 另外，因 $\tau(Y_t,\hat{Y}_t)$ 为权重 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 的函数，因而 $\tau(Y_t,\hat{Y}_t)$ 也可表示成 $\tau(w_1,w_2,\cdots,w_m)$. 因此，本文构建的组合预测模型为：

$$\operatorname{Min}\tau(w_1,w_2,\cdots,w_m) = \sqrt{\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} y_t^2},$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} y_t = 1/\left(\dfrac{\theta}{b_t}+\dfrac{1-\theta}{a_t}\right), \\ \hat{y}_t = \exp\left\{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i\left(-\ln\left(\dfrac{\theta}{b_{v\text{-index}(i)}}+\dfrac{1-\theta}{a_{v\text{-index}(i)}}\right)\right)^{\lambda}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\right\}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} w_i = 1,\ w_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{9}$$

在实际应用中，可利用 Lingo 软件对该模型进行求解.

4　算例分析

为验证 IGOWLC-OWHA 算子区间组合预测模型的可行性和有效性，本文借助文献[13] 的算例对所提出的改进模型进行验证，表 1 列出其详细数据.

表 1　区间实际数和单项预测数

实际区间		方法 1		方法 2		方法 3	
$[a_t,b_t]$	(c_t,r_t)	$[\hat{a}_{1t},\hat{b}_{1t}]$	$(\hat{c}_{1t},\hat{r}_{1t})$	$[\hat{a}_{2t},\hat{b}_{2t}]$	$(\hat{c}_{2t},\hat{r}_{2t})$	$[\hat{a}_{3t},\hat{b}_{3t}]$	$(\hat{c}_{3t},\hat{r}_{3t})$
[3,4]	(3.5,0.5)	[2.4,5]	(3.7,1.3)	[3.6,5.4]	(4.5,0.9)	[3,3.6]	(3.3,0.3)
[5,5.6]	(5.3,0.3)	[2.2,6]	(4.1,1.9)	[5,6]	(5.5,0.5)	[4,5.2]	(4.6,0.6)
[4,6]	(5,1)	[3,8]	(5.5,2.5)	[5.2,7]	(6.1,0.9)	[4.3,5.1]	(4.7,0.4)
[6,10]	(8,2)	[4.6,11]	(7.8,3.2)	[6.8,11.6]	(9.2,2.4)	[6.1,7.3]	(6.7,0.6)
[6.6,8.8]	(7.7,1.1)	[6,12.4]	(9.2,3.2)	[8,9.6]	(8.8,0.8)	[7,8]	(7.5,0.5)
[9,11]	(10,1)	[7,15]	(11,4)	[9.6,12]	(10.8,1.2)	[9.1,9.9]	(9.5,0.4)

首先,按式(5)算出各单项方法在不同时刻的预测精度,结果如表2所示.其次,对应表2预测精度(从大到小排列)的预测区间数据排序结果如表3所示.由式(6)可算得真实区间数由C-OWHA算子产生的真实集成数 y_t.为了便于计算,文中取BUM函数为 $Q(y)=y^2$,则 $\theta=\int_0^1 Q(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$.真实区间集成数 y_t 如表4所示.

表2 预测精度数序列

时刻	v_{1t}	v_{2t}	v_{3t}
1	0.889	0.286	0.750
2	0.455	0.750	0.125
3	0.857	0.421	0.786
4	0.962	0.727	0.500
5	0.651	0.421	0.875
6	0.800	0.636	0.643

表3 预测区间数据排序

时刻	$[a_{v-\mathrm{index}(1)}, b_{v-\mathrm{index}(1)}]$	$[a_{v-\mathrm{index}(2)}, b_{v-\mathrm{index}(2)}]$	$[a_{v-\mathrm{index}(3)}, b_{v-\mathrm{index}(3)}]$
1	[2.4,5]	[3,3.6]	[3.6,5.4]
2	[5,6]	[2.2,6]	[4,5.2]
3	[3,8]	[4.3,5.1]	[5.2,7]
4	[4.6,11]	[6.8,11.6]	[6.1,7.3]
5	[7,8]	[6,12.4]	[8,9.6]
6	[7,15]	[9.1,9.9]	[9.6,12]

表4 实际区间集成数

真实区间数	[3,4]	[5,5.6]	[4,6]	[6,10]	[6.6,8.8]	[9,11]
真实集成数	3.273	5.185	4.500	6.923	7.200	9.581

利用式(8)计算出IGOWLC-OWHA算子产生的组合预测集成数 $\hat{y}_t$.为了便于比较,本文选取 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, $\lambda_4=10$, $\lambda_3=15$, $\lambda_3=20$ 等6个参数进行探讨,因所涉及的公式及数字较为繁杂,故在此只给出 $\lambda_2=2$ 的计算过程.

$$\hat{y}_1=\exp\left\{\left(\left(-\ln\frac{37.2}{108}\right)^2 w_1+\left(-\ln\frac{30.6}{97.2}\right)^2 w_2+\left(-\ln\frac{43.2}{174.96}\right)^2 w_3\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\hat{y}_2=\exp\left\{\left(\left(-\ln\frac{51}{270}\right)^2 w_1+\left(-\ln\frac{21.3}{59.4}\right)^2 w_2+\left(-\ln\frac{21.6}{93.6}\right)^2 w_3\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\hat{y}_3=\exp\left\{\left(\left(-\ln\frac{57}{216}\right)^2 w_1+\left(-\ln\frac{43.5}{197.37}\right)^2 w_2+\left(-\ln\frac{28.8}{163.8}\right)^2 w_3\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\hat{y}_4=\exp\left\{\left(\left(-\ln\frac{39.9}{227.7}\right)^2 w_1+\left(-\ln\frac{45}{354.96}\right)^2 w_2+\left(-\ln\frac{62.1}{400.77}\right)^2 w_3\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\hat{y}_5=\exp\left\{\left(\left(-\ln\frac{69}{504}\right)^2 w_1+\left(-\ln\frac{46.2}{334.8}\right)^2 w_2+\left(-\ln\frac{40.8}{345.6}\right)^2 w_3\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\hat{y}_6=\exp\left\{\left(\left(-\ln\frac{37.2}{108}\right)^2 w_1+\left(-\ln\frac{30.6}{97.2}\right)^2 w_2+\left(-\ln\frac{43.2}{174.96}\right)^2 w_3\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

将以上得到的 $\hat{y}_t$ 值与表4中真实区间集成数 y_t 值统一代入组合预测模型(9)中,然后利用Lingo15软件算出模型最优权系数向量,结果如表5所示.

表5 最优权系数向量

权重系数	最优权系数向量					
	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=10$	$\lambda=15$	$\lambda=20$
权重 w_1	0.518 081	0.514 129	0.510 477	0.515 897	0.559 388	0.614 295
权重 w_2	0.112 967	0.170 074	0.219 093	0.354 773	0.351 931	0.329 219
权重 w_3	0.368 952	0.315 796	0.270 43	0.129 33	0.088 681	0.056 486

为验证本文的组合预测效率，引入如下评价指标体系：① 平均区间位置误差平方和，其计算公式为 $MSEP=\sum_{t=1}^{n}\frac{(c_t-\hat{c}_t)^2}{n}$；② 平均区间长度误差平方和，其计算公式为 $MSEL=\sum_{t=1}^{n}\frac{(r_t-\hat{r}_t)^2}{n}$；③ 平均区间误差平方和，其计算公式为 $MSEI=MSEP+MSEL=\sum_{t=1}^{n}\frac{(c_t-\hat{c}_t)^2}{n}+\sum_{t=1}^{n}\frac{(r_t-\hat{r}_t)^2}{n}$；④ 平均相对区间误差和，其计算公式为 $MRIE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|c_t-\hat{c}_t|}{r_t+\hat{r}_t}$.

表 6 为各评价指标计算结果. 由表 6 可知，本文提出的组合预测模型的 $MSEP$、$MSEI$ 以及 $MRIE$ 的各评价指标值均低于各单项方法所对应的值，其中 $MSEP$ 值显著低于各单项方法所对应的值；组合预测模型的 $MSEL$ 指标值显著低于单项方法 1 的值，但与其他 2 中单项方法的值相比并不是最低，这可能是由于区间数半径预测效果不佳导致的.

表 6　评价指标计算结果

评价方法	$MSEP$	$MSEL$	$MSEI$	$MRIE$
单项方法 1	0.836 7	3.383 3	4.220 1	0.231 1
单项方法 2	0.923 3	0.083 3	1.006 6	0.459 8
单项方法 3	0.433 3	0.528 3	0.961 6	0.386 9
组合方法($\lambda=1$)	0.280 1	0.565 0	0.845 1	0.229 1
组合方法($\lambda=2$)	0.228 0	0.533 7	0.761 7	0.211 1
组合方法($\lambda=3$)	0.193 3	0.516 7	0.710 0	0.195 4
组合方法($\lambda=10$)	0.138 1	0.550 7	0.688 7	0.155 3
组合方法($\lambda=15$)	0.123 0	0.644 2	0.767 2	0.142 2
组合方法($\lambda=20$)	0.109 2	0.770 5	0.879 7	0.129 0

5　结束语

本文将 C-OWHA 算子与 IGOWLA 算子相结合，提出了一类诱导广义有序加权对数连续区间有序加权调和平均(IGOWLC-OWHA)算子，并通过引入改进的 Theil 不等系数作为相关性准则，建立了一种新的区间组合预测模型. 算例分析表明，基于 IGOWLC-OWHA 算子的区间组合预测模型能较好地提高预测精度. 本文在研究中，有关参数以及相关性准则考虑得并不十分充分，使得预测效果可能并非最佳，因此有关是否存在某一参数 θ 和 λ 值以及其他相关性准则可使模型预测效果变得更佳有待于进一步研究.

参考文献：

[1] Bates J M, Granger C W J. The combination of forecasts[J]. Operational Research Society, 1969,20(4):451-468.
[2] 王应明. 基于相关性的组合预测方法研究[J]. 预测，2002,21(2):58-62.
[3] 陈华友，刘春林，盛昭瀚. IOWHA 算子及其在组合预测中的应用[J]. 中国管理科学，2004,12(5):35-40.
[4] 袁宏俊，陈华友，胡凌云. 基于指数支撑度的最优组合预测模型及其性质研究[J]. 应用概率统计，2012,28(2):150-160.
[5] 杨蕾，陈华友，王宇. 基于贴近度的诱导广义 OWA 算子最优组合预测模型[J]. 统计与决策，2013(5):24-26.
[6] Yager R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, 2004,34(5):1952-1963.
[7] 徐泽水. 拓展的 C-OWA 算子及其在不确定多属性决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践，2005,25(11):7-13.
[8] 陈华友，刘金培，王慧. 一类连续区间数据的有序加权调和(C-OWH)平均算子及其应用[J]. 系统工程理论与实践，2008,28(7):86-92.
[9] 江立辉，陈华友，丁芳清，等. 基于 IGOWLA 算子的最优组合预测模型及应用[J]. 统计与决策，2015(4):82-85.
[10] 陈华友，李翔，金磊，等. 基于相关系数及 IOWA 算子的区间组合预测方法[J]. 统计与决策，2012(6):83-86.
[11] 陈启明，陈华友. 基于 IOWA 算子的两类准则下的最优组合预测模型及其应用[J]. 数理统计与管理，2013,32(5):847-853.
[12] 张超，袁宏俊. 基于改进的 Theil 不等系数及 IGOWC-OWHA 算子的区间型组合预测模型[J]. 江南大学学报(自然科学版)，2015,14(5):645-651.
[13] 徐惠莉，吴柏林，江韶珊. 区间时间序列预测准确度探讨[J]. 数量经济技术经济研究，2008,25(1):133-140.