文章编号：1004-4353(2017)04-0291-11

一类定义域在半轴上的分数阶 q-差分系统边值问题多重正解的存在性

范成涛， 林爽， 葛琦*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要：研究了一类定义域在半轴上的分数阶 q-差分系统多重正解的存在性.首先分析了格林函数的一些性质，然后分别利用 Krasnoselskii 不动点定理、Leggett-Williams 不动点定理证明了该方程多重正解的存在性.

关键词：分数阶 q-差分系统；半轴；Krasnoselskii 不动点定理；Leggett-Williams 不动点定理；多重正解
中图分类号：O175.6 **文献标识码**：A

Existence of multiple positions solutions for boundary value problems with a coupled system of fractional q-differences on the half-line

FAN Chengtao， LIN Shuang， GE Qi*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study the existence of multiple positions solutions for boundary value problems with a coupled system of fractional q-differences on the half-line. Firstly, we analyze some properties of the Green function. Then, the existence of multiple positive solutions of the equation are proved by applying Krasnoselskii fixed point theorem, Leggett-Williams fixed point theorem.

Keywords: fractional q-differences system; half-line; Krasnoselskii fixed point theorem; Leggett-Williams fixed point theorem; multiple positions solutions

0 引言

近年来，q-差分微积分学理论被广泛应用在数学、量子物理和经济学等领域[1-2]，其相关研究也得到了进一步发展[3-5].分数阶 q-差分方程边值问题作为 q-差分微积分学理论研究的一个方向，近年来也得到了许多学者的关注，并取得了大量研究成果[6-9].但在多数文献中，讨论的都是定义域为 $t\in[0,1]$ 情况下的 q-差分方程解的存在性.文献[10]的作者研究了非线性分数阶微分系统：

$$\begin{cases} D^p u(t)+f(t,v(t))=0,\ 2<p<3;\\ D^q v(t)+g(t,u(t))=0,\ 2<q<3;\\ u(0)=u'(0)=0,\ D^{p-1}u(+\infty)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\, u(\xi_i);\\ v(0)=v'(0)=0,\ D^{q-1}v(+\infty)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\gamma_i\, v(\xi_i). \end{cases}$$

这里 $t\in J=[0,+\infty)$，$f,g\in C(J\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<+\infty$，$D^p$ 和 D^q 分别表示阶

收稿日期：2017－10－16 **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(11161049)
* **通信作者**：葛琦(1975—)，女，副教授，研究方向为微分方程理论及应用.

为 p 和 q 的 Riemann-Liouville 分数阶导数,且对 $\beta_i>0$, $\gamma_i>0$,使得 $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\xi_i^{p-1})<\Gamma(p)$, $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}\gamma_i v(\xi_i^{q-1})<\Gamma(q)$. 文献[10]的作者分别利用 Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映射原理得到了上述系统解的唯一性和存在性.

目前,关于定义域为半轴上的分数阶 q-差分方程解的存在性的研究较少.受文献[10]启发,本文讨论如下非线性分数阶 q-差分系统:

$$\begin{cases}D_q^{\alpha}u(t)+f(t,v(t))=0,\ t\in[0,+\infty);\\ D_q^{\beta}v(t)+g(t,u(t))=0,\ t\in[0,+\infty);\\ u(0)=D_qu(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}u(+\infty)=Au(\xi);\\ v(0)=D_qv(0)=0,\ D_q^{\beta-1}v(+\infty)=Bv(\eta)\end{cases}\tag{1}$$

的多重正解的存在性,其中 $2<\alpha,\ \beta\leqslant 3$, $0<q<1$, A 和 B 为实数, $\xi,\eta>0$ 满足 $0<A\xi^{\alpha-1}<\Gamma_q(\alpha)$, $0<B\eta^{\beta-1}<\Gamma_q(\beta)$, $f,g:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为连续函数.

1 预备知识

定义 1[6] $[a]_q=\dfrac{1-q^a}{1-q}$, $a\in\mathbf{R}$, $q\in(0,1)$.

定义 2[6] 幂指函数 $(a-b)^n$ 的 q-类似定义为: $(a-b)^{(0)}=1$, $(a-b)^{(n)}=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a-bq^k)$, $n\in\mathbf{N}$, $a,b\in\mathbf{R}$. $(a-b)^{(\alpha)}=a^{\alpha}\prod\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-\frac{b}{a}q^n}{1-\frac{b}{a}q^{\alpha+n}}$, $\alpha\in\mathbf{R}$,特别地, $b=0$ 时 $a^{(\alpha)}=a^{\alpha}$.

定义 3[6] q-Γ 函数定义为 $\Gamma_q(x)=\dfrac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}}$, $x\in\mathbf{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$,易知 $\Gamma_q(x+1)=[x]_q\Gamma_q(x)$.

定义 4[6] 函数 $f(x)$ 的 q-导数定义为: $(D_qf)(x)=\dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$, $(D_qf)(0)=\lim\limits_{x\to 0}(D_qf)(x)$. 函数 f 的高阶 q-导数定义为: $(D_q^0f)(x)=f(x)$, $(D_q^nf)(x)=D_q(D_q^{n-1}f)(x)$, $n\in\mathbf{N}$.

定义 5[6] Riemann-Liouville 型分数阶 q-积分定义为:

$$I_q^0[f](x)=f(x),\ I_q^{\alpha}[f](x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qt)^{(\alpha-1)}f(t)\mathrm{d}_qt,\ \alpha>0,\ x\in[0,1].$$

Riemann-Liouville 型分数阶 q-导数定义为: $(D_q^{\alpha}f)(x)=(D_q^mI_q^{m-\alpha}f)(x)$, $\alpha>0$, $x\in[0,1]$. 其中 $f(x)$ 是定义在$[0,1]$上的函数, m 是不小于 α 的最小整数.

性质 1[6] 若 $\alpha>0$, $a\leqslant b\leqslant t$,则 $(t-a)^{(\alpha)}\geqslant(t-b)^{(\alpha)}$.

性质 2[6] $[a(t-s)]^{(\alpha)}=a^{\alpha}(t-s)^{(\alpha)}$, ${}_tD_q(t-s)^{(\alpha)}=[\alpha]_q(t-s)^{(\alpha-1)}$, $\left({}_xD_q\int_0^xf(x,t)\mathrm{d}_qt\right)(x)=\int_0^x{}_xD_qf(x,t)\mathrm{d}_qt+f(qx,x)$,其中 ${}_iD_q$ 表示与变量 i 有关的 q-导数.

性质 3[6] 设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$, $\lambda\in(-1,\infty)$,则 $I_q^{\alpha}((t-\alpha)^{(\lambda)})=\dfrac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)}(t-a)^{(\alpha+\lambda)}$, $0<a<t<b$.

引理 1[6] 设 $\alpha>0$, p 是正整数,则 $(I_q^{\alpha}D_q^pf)(x)=(D_q^pI_q^{\alpha}f)(x)-\sum\limits_{k=0}^{p-1}\dfrac{x^{\alpha-p+k}}{\Gamma_q(\alpha+k-p+1)}(D_q^kf)(0)$.

引理 2[6] 设 $\alpha,\beta\geqslant 0$, $f(x)$ 是定义在$[0,1]$上的函数,则: (i) $(I_q^{\beta}I_q^{\alpha}f)(x)=(I_q^{\alpha+\beta}f)(x)$; (ii) $(D_q^{\alpha}I_q^{\alpha}f)(x)=f(x)$.

引理 3[11]　设空间 $C_\infty([0,\infty),\mathbf{R})=\{u\in C([0,\infty),\mathbf{R})\mid \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 存在$\}$,赋范数 $\|u\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\left|\dfrac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|$,则 C_∞ 是一个 Banach 空间.

引理 4[11]　设 $V=\{u\in C_\infty:\|u\|<l\}(l>0)$, $V_1=\{\dfrac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\mid u\in V\}$. 若 V_1 在$[0,+\infty)$的任意紧区间上等度连续,并且在无穷远处等度收敛,那么 V 在 C_∞ 上是相对紧的.

注 1[11]　V_1 在无穷远处等度收敛当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $\exists v=v(\varepsilon)>0$,使得对 $u\in V_1$, $t_1,t_2\geqslant v$ 有 $\left|\dfrac{u(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\dfrac{u(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon$.

引理 5[12]　设 E 是一个 Banach 空间,$\mathscr{P}$是 E 上的一个锥,Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的开子集,并且 $0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 设 $A:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$是一个完全连续算子,$A$ 在 $\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$上至少存在一个不动点,如果下列条件之一成立:

(A_1) $\|Ax\|\leqslant\|x\|$, $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_1$; $\|Ax\|\geqslant\|x\|$, $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_2$;

(A_2) $\|Ax\|\geqslant\|x\|$, $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_1$; $\|Ax\|\leqslant\|x\|$, $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_2$.

引理 6[13]　设 P 是实 Banach 空间 E 上的一个锥,$P_c=\{x\in P:\|x\|\leqslant c\}$,$\theta$ 是 P 上的一个非负连续凹泛函,且满足 $\theta(x)\leqslant\|x\|$ $(x\in\overline{P}_c)$. 设 $P(\theta,b,d)=\{x\in P:b\leqslant\theta(x),\|x\|\leqslant d\}$. 如果 $A:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$ 是一个全连续算子,并且存在常数 a,b,d,c 满足 $0<a<b<d\leqslant c$,使得下列条件成立:

(B_1) $\{x\in P(\theta,b,d)\mid\theta(x)>b\}\neq\varnothing$,且 $\theta(Ax)>b$, $x\in P(\theta,b,d)$;

(B_2) 对于 $\|x\|\leqslant a$,有 $\|Ax\|<a$;

(B_3) 对于 $x\in P(\theta,b,c)$ 且 $\|Ax\|>d$,有 $\theta(Ax)>b$.

那么 A 至少有 3 个不动点 x_1,x_2,x_3 满足 $\|x_1\|\leqslant a$, $b<\theta(x_2)$, $a<\|x_3\|$ 和 $\theta(x_3)<b$.

注 2[13]　如果引理 6 中 $d=c$ 成立,那么条件(B_1)包含条件(B_3).

2　Green 函数及其性质

定理 1　设 $h\in C[0,\infty)$, $0<A\xi^{\alpha-1}<\Gamma_q(\alpha)$,则分数阶 q-差分方程

$$\begin{cases}D_q^\alpha u(t)+h(t)=0,\ t\in[0,+\infty);\\ u(0)=D_qu(0)=0,\ D_q^{\alpha-1}u(+\infty)=Au(\xi)\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}G(\xi,qs)h(s)\mathrm{d}_qs,\tag{3}$$

其中 $G(t,qs)=\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty;\\ t^{\alpha-1},\ 0\leqslant t\leqslant s<+\infty.\end{cases}$

证明　设 $u(t)$ 是式(1)的解,由引理 1 可得 $u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_3t^{\alpha-3}+I_q^\alpha h(t)$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$. 由边值条件 $u(0)=D_qu(0)=0$,解得 $c_2=c_3=0$. 因此有

$$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+I_q^\alpha h(t).\tag{4}$$

对式(4)两边做 $D_q^{\alpha-1}$ 运算,根据性质 3、引理 2 有 $(D_q^{\alpha-1}u)(t)=D_q^{\alpha-1}t^{\alpha-1}c_1-D_q^{\alpha-1}I_q^\alpha h(t)=c_1\Gamma_q(\alpha)+I_qh(t)$. 再根据边值条件 $D_q^{\alpha-1}u(+\infty)=Au(\xi)$ 得

$$c_1=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\left(\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}_qs-A\int_0^\xi\frac{(\xi-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_qs\right),$$

因此有

$$u(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\left(\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}_qs-A\int_0^{\xi}\frac{(\xi-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_qs\right)-\int_0^t\frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_qs=$$

$$\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{A\xi^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\right)\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}_qs-\int_0^t\frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_qs-$$

$$\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi}(\xi-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_qs=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}_qs-\int_0^t\frac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{A\xi^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\int_0^{+\infty}h(s)\mathrm{d}_qs-\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\int_0^{\xi}(\xi-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_qs=$$

$$\int_0^{+\infty}G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}G(\xi,qs)h(s)\mathrm{d}_qs.$$

定理 2 Green 函数 $G(t,s)$ 具有下面的性质:

(i) $G(t,s)$ 是连续函数,且 $G(t,qs)\geqslant 0$, 对一切 $t,s\in[0,+\infty)$;

(ii) $G(t,qs)$ 关于 t 单调递增,对一切 $s\in[0,+\infty)$;

(iii) 设 $m>1$, 则 $\min\limits_{t\in[\frac{1}{m},m]}\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\dfrac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})}\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}$, 对一切 $t,s\in[0,+\infty)$.

证明 设 $h_1(t,qs)=t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)}$, $0\leqslant qs\leqslant t<+\infty$; $h_2(t,qs)=t^{\alpha-1}$, $0\leqslant t\leqslant qs<+\infty$.

i) 由 $G(t,s)$ 的表达式知其连续, $G(t,qs)\geqslant 0$ 显然成立.

ii) 对固定的 $s\in[0,+\infty)$, ${}_tD_qh_1(t,qs)=[\alpha-1]_q[t^{\alpha-2}-(t-qs)^{(\alpha-2)}]\geqslant 0$, 则 $h_1(t,qs)$ 在区间 $0\leqslant qs\leqslant t<+\infty$ 上关于 t 为增函数,显然 $h_2(t,qs)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant qs<+\infty$ 上关于 t 为增函数. 因此对于固定的 $s\in[0,+\infty)$, $G(t,qs)$ 关于 t 为增函数.

iii) 对于固定的 $s\in[0,+\infty)$, 由 $G(t,qs)$ 知,函数 $\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}$ 在 $\tau\in[0,+\infty)$ 上可以取得最大值. 设 $\delta=\inf\left\{\tau\in[0,+\infty):\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}=\dfrac{G(\tau,qs)}{1+\tau^{\alpha-1}}\right\}$. 以下分 3 个步骤进行讨论:

步骤 1 若 $\delta\leqslant\dfrac{1}{m}$, 由 ii) 有 $\min\limits_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m}\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\dfrac{G(\frac{1}{m},qs)}{1+m^{\alpha-1}}\geqslant\dfrac{G(\delta,qs)}{1+m^{\alpha-1}}=\dfrac{1+\delta^{\alpha-1}}{1+m^{\alpha-1}}\dfrac{G(\delta,qs)}{1+\delta^{\alpha-1}}\geqslant$ $\dfrac{1}{1+m^{\alpha-1}}\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\dfrac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})}\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\dfrac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}$.

步骤 2 若 $\dfrac{1}{m}\leqslant\delta\leqslant m$, 当 $0\leqslant qs<q^{\alpha-2}s\leqslant\dfrac{1}{2m}$ 时,由于 ${}_tD_q^2h_1(t,qs)=[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q[t^{\alpha-3}-(t-qs)^{(\alpha-3)}]\leqslant 0$, 则对一切 $0<qs<q^{\alpha-2}s<t<+\infty$, $G(t,qs)$ 是关于 t 的凸函数,因此有

$$\frac{G(\frac{1}{m},qs)-G(\frac{1}{2m},qs)}{\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}}\geqslant\frac{G(\delta,qs)-G(\frac{1}{2m},qs)}{\delta-\frac{1}{2m}},$$

即 $(\delta-\frac{1}{2m})G(\frac{1}{m},qs)\geqslant(\delta-\frac{1}{m})G(\frac{1}{2m},qs)+\frac{1}{2m}G(\delta,qs)\geqslant\frac{1}{2m}G(\delta,qs)$. 由此可得

$$G(\frac{1}{m},qs)\geqslant\frac{1}{2\delta m}G(\delta,qs).\tag{5}$$

由式(5) 可得

$$\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\geqslant\frac{G(\frac{1}{m},qs)}{1+m^{\alpha-1}}\geqslant\frac{G(\delta,qs)}{2m\delta(1+m^{\alpha-1})}=\frac{1+\delta^{\alpha-1}}{2m^2(1+m^{\alpha-1})}\frac{G(\delta,qs)}{1+\delta^{\alpha-1}}\geqslant$$

$$\frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})}\max_{t\in[0,+\infty)}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

当 $\frac{1}{2m} \leqslant qs < q^{\alpha-2}s \leqslant \frac{1}{m}$ 时，由 ii) 可得

$$\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{G(\frac{1}{m},qs)}{1+m^{\alpha-1}} \geqslant \frac{G(\frac{1}{2m},qs)}{1+m^{\alpha-1}} = \frac{1+\delta^{\alpha-1}}{1+m^{\alpha-1}} \frac{G(\frac{1}{2m},qs)}{G(\delta,qs)} \frac{G(\delta,qs)}{1+\delta^{\alpha-1}} \geqslant$$

$$\frac{1+\delta^{\alpha-1}}{(2m)^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

当 $\frac{1}{m} \leqslant qs < q^{\alpha-2}s \leqslant \delta$ 时，由 ii) 可得

$$\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{G(\frac{1}{m},qs)}{1+m^{\alpha-1}} = \frac{1+\delta^{\alpha-1}}{1+m^{\alpha-1}} \frac{G(\frac{1}{m},qs)}{G(\delta,qs)} \frac{G(\delta,qs)}{1+\delta^{\alpha-1}} \geqslant$$

$$\frac{1+\delta^{\alpha-1}}{m^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

当 $\delta \leqslant qs < q^{\alpha-2}s$ 时，由 ii) 可得

$$\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{G(\frac{1}{m},qs)}{1+m^{\alpha-1}} = \frac{1+\delta^{\alpha-1}}{1+m^{\alpha-1}} \frac{G(\frac{1}{m},qs)}{G(\delta,qs)} \frac{G(\delta,qs)}{1+\delta^{\alpha-1}} =$$

$$\frac{1+\delta^{\alpha-1}}{m^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

步骤 3　若 $m \leqslant \delta$，类似于步骤 2 的讨论，可得 $\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}$.

推论 1　设 $m > 1$，$\theta(t,qs) = \frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1}} G(\xi,qs)$，那么

$$\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{\theta(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{m^{2\alpha-2}(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{\theta(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

证明　设 $m > 1$，对一切 $t,s \in [0,+\infty)$ 有

$$\min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{\theta(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} = \min_{\frac{1}{m}\leqslant t\leqslant m} \frac{At^{\alpha-1}}{(\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})} G(\xi,qs) \geqslant \frac{\frac{1}{m^{\alpha-1}}}{1+m^{\alpha-1}} \frac{A}{\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1}} G(\xi,qs) \geqslant$$

$$\frac{\frac{1}{m^{\alpha-1}}}{1+m^{\alpha-1}} \frac{1+\frac{1}{m^{\alpha-1}}}{m^{\alpha-1}} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{At^{\alpha-1}}{(\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})} G(\xi,qs) \geqslant$$

$$\frac{1}{m^{2\alpha-2}(1+m^{\alpha-1})} \max_{t\in[0,+\infty)} \frac{\theta(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}.$$

注 3　如果定理 1 中 $h(t) \geqslant 0$，$t \in [0,\infty)$，那么问题(2) 的解 $u(t) \geqslant 0$.

注 4　求问题(1) 的解，等价于求如下方程组的解：

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^{+\infty} G(t,qs) f(s,v(s)) \mathrm{d}_q s + \frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} G(\xi,qs) f(s,v(s)) \mathrm{d}_q s, \\ v(t) = \int_0^{+\infty} H(t,qs) g(s,u(s)) \mathrm{d}_q s + \frac{Bt^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta) - B\eta^{\beta-1}} \int_0^{+\infty} H(\eta,qs) g(s,u(s)) \mathrm{d}_q s. \end{cases}$$

注 5　$\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}$，$\frac{At^{\alpha-1}G(\xi,qs)}{(\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})} \leqslant \frac{A\xi^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha) - A\xi^{\alpha-1})}$，对一切 $t,s \in [0,+\infty)$.

3　主要结果及其证明

定义空间 $U = \{u \in C[0,\infty) \mid \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 存在$\}$ 和 $V = \{v \in C[0,\infty) \mid \lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}$ 存在$\}$，且分别

赋范数 $\|u\|_u=\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\dfrac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}$，$\|v\|_v=\max\limits_{t\in[0,+\infty)}\dfrac{|v(t)|}{1+t^{\beta-1}}$. 显然$(U,\|\cdot\|_u)$和$(V,\|\cdot\|_v)$是 Banach 空间. 设 $W=\{(u,v)\mid u\in U,v\in V\}$ 赋范数 $\|(u,v)\|_w=\max\{\|u\|_u,\|v\|_v\}$. 显然$(W,\|\cdot\|_w)$也是 Banach 空间，在其上定义锥 $P=\{(u,v)\in W\mid u(t)\geqslant 0,v(t)\geqslant 0\}$，则锥 $P\subset W$. 在锥上定义一个连续的凹泛函 $\varphi(u,v)=\min\left\{\min\limits_{t\in[\frac{1}{m},m]}\dfrac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}},\min\limits_{t\in[\frac{1}{m},m]}\dfrac{|v(t)|}{1+t^{\beta-1}}\right\}$.

根据定理 1，定义算子 $T:W\to W$ 如下：

$$T(u,v)(t)=(T_1(v)(t),T_2(u)(t)),\tag{6}$$

这里

$$T_1(v)(t)=\int_0^{+\infty}G(t,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}G(\xi,qs)f(s,v(s))\mathrm{d}_qs,\tag{7}$$

$$T_2(u)(t)=\int_0^{+\infty}H(t,qs)g(s,u(s))\mathrm{d}_qs+\frac{Bt^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)-B\eta^{\beta-1}}\int_0^{+\infty}H(\eta,qs)g(s,u(s))\mathrm{d}_qs.\tag{8}$$

其中

$$G(t,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty;\\ t^{\alpha-1},\ 0\leqslant t\leqslant s<+\infty.\end{cases}$$

$$H(t,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\begin{cases}t^{\beta-1}-(t-qs)^{(\beta-1)},\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty;\\ t^{\beta-1},\ 0\leqslant t\leqslant s<+\infty.\end{cases}$$

定理 3 假设如下条件(H)成立，则 $T:P\to P$ 是完全连续的：

(H) 设 $F_1(t,v)=f(t,(1+t^{\beta-1})v)$，$F_2(t,u)=g(t,(1+t^{\alpha-1})u)$，存在单调递增函数 $\phi(t),\rho(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ 和连续函数 $\psi(t),\gamma(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$，使得对 $\forall t\in[0,+\infty)$，有：

$|F_1(t,v)|\leqslant\psi(t)\phi(|v|)$，$|F_2(t,u)|\leqslant\gamma(t)\rho(|u|)$；其中 $\int_0^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}_qt<+\infty$，$\int_0^{+\infty}\gamma(t)\mathrm{d}_qt<+\infty$.

证明 设 $\forall(u,v)\in P$，由于 f,g,G,H 是连续函数，则算子 $T:P\to P$ 是连续的.

首先证明 T 是一致有界的. 设 W_1 是 P 的任意有界子集，即存在一个常数 $R>0$，使得对 $\forall(u,v)\in W_1$，有 $\|(u,v)\|_w\leqslant R$ 成立. 由于

$$\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)},\ \frac{At^{\alpha-1}G(\xi,qs)}{(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})}\leqslant\frac{A\xi^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})},$$

则对 $\forall(u,v)\in W_1$，有

$$\left|\frac{T_1v(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\leqslant\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^{+\infty}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs+\frac{A\xi^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\int_0^{+\infty}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs=$$
$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\left|F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(t)\phi\left(\frac{|v|}{1+s^{\beta-1}}\right)\mathrm{d}_qs\leqslant$$
$$\frac{\phi(R)}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_qs<+\infty.$$

同理可得

$$\left|\frac{T_2u(t)}{1+t^{\beta-1}}\right|\leqslant\frac{\rho(R)}{\Gamma_q(\beta)-B\eta^{\beta-1}}\int_0^{+\infty}\gamma(s)\mathrm{d}_qs<+\infty.$$

于是有 $\|T(u,v)\|_w=\max\{\|T_1v\|_u,\|T_2u\|_v\}<+\infty$，故 $T(W_1)$ 一致有界.

其次证明 $T(W_1)$ 在任意紧区间上等度连续. 对 $\forall l>0$，$t_1,t_2\in[0,l]$，$u,v\in W_1$，假设 $t_2>t_1$，有

$$\left|\frac{T_1v(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{T_1v(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{G(t_2,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs-\int_0^{+\infty}\frac{G(t_1,qs)}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\right|+$$
$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\int_0^{+\infty}\frac{AG(\xi,qs)}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\leqslant$$

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_2,qs)-G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s+\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))-\frac{G(t_1,qs)}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s+$$
$$\frac{|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|}{(1+t_1^{\alpha-1})(1+t_2^{\alpha-1})}\int_0^{+\infty}\frac{AG(\xi,qs)}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_q s.$$

一方面有

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_2,qs)-G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s=\int_0^{t_1}\left|\frac{G(t_2,qs)-G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s+$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{G(t_2,qs)-G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s+\int_{t_2}^{+\infty}\left|\frac{G(t_2,qs)-G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\int_0^{t_1}\left|\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})+[(t_2-qs)^{(\alpha-1)}-(t_1-qs)^{(\alpha-1)}]}{\Gamma_q(\alpha)(1+t_2^{\alpha-1})}F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_q s+$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})-(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)(1+t_2^{\alpha-1})}F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_q s+\int_{t_2}^{+\infty}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(1+t_2^{\alpha-1})}F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\phi(R)\int_0^{t_1}\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})+[(t_2-qs)^{(\alpha-1)}-(t_1-qs)^{(\alpha-1)}]}{\Gamma_q(\alpha)(1+t_2^{\alpha-1})}\psi(s)\mathrm{d}_q s+$$
$$\frac{3l^{\alpha-1}\phi(R)}{\Gamma_q(\alpha)(1+t_2^{\alpha-1})}\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\mathrm{d}_q s+\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})\phi(R)}{\Gamma_q(\alpha)(1+t_2^{\alpha-1})}\int_{t_2}^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_q s\to 0\ (t_1\to t_2).$$

另一方面有

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_1,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))-\frac{G(t_1,qs)}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s=$$
$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})G(t_1,qs)}{(1+t_1^{\alpha-1})(1+t_2^{\alpha-1})}f(s,v(s))\right|\mathrm{d}_q s\leqslant\frac{|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|}{1+t_2^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_1,qs)}{(1+t_1^{\alpha-1})}F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\frac{|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|}{(1+t_2^{\alpha-1})\Gamma_q(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left|F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_q s\leqslant\frac{|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|}{(1+t_2^{\alpha-1})\Gamma_q(\alpha)}\phi(R)\int_0^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}_q s\to 0\ (t_1\to t_2).$$

类似地有

$$\frac{|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|}{(1+t_1^{\alpha-1})(1+t_2^{\alpha-1})}\int_0^{+\infty}\frac{AG(\xi,qs)}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_q s\leqslant$$
$$\frac{A\xi^{\alpha-1}|t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}|}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})(1+t_1^{\alpha-1})(1+t_2^{\alpha-1})}\phi(R)\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_q s\to 0\ (t_1\to t_2).$$

同理可得 $\left|\dfrac{T_2u(t_2)}{1+t_2^{\beta-1}}-\dfrac{T_2u(t_1)}{1+t_1^{\beta-1}}\right|\to 0\ (t_1\to t_2)$. 因此 $T_1(W_1)$ 和 $T_2(W_1)$ 在任意紧区间上等度连续,故有 $T(W_1)$ 在任意紧区间上等度连续.

最后证明 $T: W_1\to W_1$ 在无穷远处等度收敛. 记 $\omega=\max\left\{\dfrac{2(\varepsilon+1)\Gamma_q(\alpha)-(\varepsilon+2)A\xi^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\phi(R)\cdot\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_q s,\dfrac{2(\varepsilon+1)\Gamma_q(\beta)-(\varepsilon+2)B\eta^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)(\Gamma_q(\beta)-B\eta^{\beta-1})}\rho(R)\int_0^{+\infty}\gamma(s)\mathrm{d}_q s\right\}$. 由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\mu_1>0$, 使得对 $\forall t>\mu_1$, 有 $\left|\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 故对 $\forall t_1,t_2>\mu_1$, 有

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|\leqslant\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-1\right|+\left|\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-1\right|<\varepsilon.$$

同理 $\exists\sigma\geqslant qs$, 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(t-\sigma)^{(\alpha-1)}}{1+t^{\alpha-1}}=1$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\mu_2>0$, 使得对 $\forall t_1,t_2>\mu_2$, 有

$$\left|\frac{(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\leqslant\left|\frac{(t_2-\sigma)^{(\alpha-1)}}{1+t_2^{\alpha-1}}-1\right|+\left|\frac{(t_1-\sigma)^{(\alpha-1)}}{1+t_1^{\alpha-1}}-1\right|<\varepsilon.$$

因此,对 $\forall\varepsilon>0$, $\mu=\max\{\mu_1,\mu_2\}$, 使得对 $\forall t_1,t_2>\mu$, 有:

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{G(t_2,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs-\int_0^{+\infty}\frac{G(t_1,qs)}{1+t_1^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\right|\leqslant$$

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{G(t_2,qs)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{G(t_1,qs)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs=$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}-(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}-(t_1-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}-(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_{t_2}^{+\infty}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_2^{\alpha-1}}+\frac{(t_1-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}+\frac{(t_2-qs)^{(\alpha-1)}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_{t_2}^{+\infty}\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\leqslant$$

$$\frac{\phi(R)}{\Gamma_q(\alpha)}\left(\int_0^{t_1}2\varepsilon\psi(s)\mathrm{d}_qs+\int_{t_1}^{t_2}(\varepsilon+1)\psi(s)\mathrm{d}_qs+\int_{t_2}^{+\infty}\varepsilon\psi(s)\mathrm{d}_qs\right)\leqslant\frac{2(\varepsilon+1)\phi(R)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_qs,$$

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\int_0^{+\infty}\frac{AG(\xi,qs)}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{A\xi^{\alpha-1}\varepsilon}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\phi(R)\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_qs.$$

于是有 $\left|\frac{T_1v(t_2)}{1+t_2^{d-1}}-\frac{T_1v(t_1)}{1+t_1^{d-1}}\right|\leqslant\frac{2(\varepsilon+1)\Gamma_q(\alpha)-(\varepsilon+2)A\xi^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\phi(R)\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_qs\leqslant\omega\varepsilon$. 因此,对 $\forall\varepsilon>0$,存在充分大的 μ,当 $\forall t_1,t_2>\mu$ 时,$T_1:W_1\to W_1$ 在无穷远处等度收敛. 同理可证 $T_2:W_1\to W_1$ 在无穷远处等度收敛,故 $T:W_1\to W_1$ 在无穷远处等度收敛. 由引理 4 可得 $T:P\to P$ 完全连续.

为了方便计算,记:

$$K_1=\frac{4m^{4\alpha-1}(1+m^{\alpha-1})^2\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}{(m^2-1)(m^{3\alpha-3}\Gamma_q(\alpha)-(m^{3\alpha-3}-4m^{\alpha+1})A\xi^{\alpha-1})};\ L_1=\left(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}_qs\right)^{-1};$$

$$K_2=\frac{4m^{4\beta-1}(1+m^{\beta-1})^2\Gamma_q(\beta)(\Gamma_q(\beta)-B\eta^{\beta-1})}{(m^2-1)(m^{3\beta-3}\Gamma_q(\beta)-(m^{3\beta-3}-4m^{\beta+1})B\eta^{\beta-1})};\ L_2=\left(\frac{1}{\Gamma_q(\beta)-B\eta^{\beta-1}}\int_0^{+\infty}\gamma(t)\mathrm{d}_qs\right)^{-1}.$$

首先,利用引理 5 证明问题(1) 多重正解的存在性.

定理 4 假设存在 2 个常数 $0<r_1<r_2$,使得(H) 和如下条件(C_1)—(C_3) 成立:

(C_1) $\phi(|v|)\leqslant L_1r_2$, $\rho(|u|)\leqslant L_2r_2$, 对 $u,v\in[0,r_2]$;

(C_2) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\geqslant K_1r_1$, $F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\geqslant K_2r_1$, $(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,r_1]$;

(C_3) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\leqslant L_1r_2$, $F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\leqslant L_2r_2$, $(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,r_2]$.

那么问题(1) 至少有一个正解(u,v) 满足 $r_1\leqslant\|(u,v)\|_w\leqslant r_2$.

证明 若设 $W_2=\{(u,v)\in P\mid\|(u,v)\|_w<r_1\}$,则对任意的$(u,v)\in P\cap\partial W_2$,有 $\|(u,v)\|_w=r_1$ 且 $0\leqslant\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant r_1$, $0\leqslant\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\leqslant r_1$,对 $\forall t\in[0,+\infty)$. 从而由(C_2),有

$$\|T_1v\|_u\geqslant\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\frac{|T_1v(t)|}{1+t^{\alpha-1}}=\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\left|\int_0^{+\infty}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\cdot\right.$$

$$\left.\int_0^{+\infty}\frac{G(\xi,qs)}{1+t^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\right|=\int_0^{+\infty}\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs+$$

$$\int_0^{+\infty}\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\frac{At^{\alpha-1}G(\xi,qs)}{(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs\geqslant$$

$$\frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})}\int_{\frac{1}{m}}^{m}\max_{t\in[0,+\infty)}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\left|F_1(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}})\right|\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{1}{m^{2\alpha-2}(1+m^{\alpha-1})}\int_{\frac{1}{m}}^{m}\max_{t\in[0,+\infty)}\frac{At^{\alpha-1}G(\xi,qs)}{(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})}\left|F_1(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}})\right|\mathrm{d}_qs\geqslant$$

$$\frac{m^{3\alpha-3}\Gamma_q(\alpha)-(m^{3\alpha-3}-4m^{\alpha+1})A\xi^{\alpha-1}}{4m^{4\alpha-2}(1+m^{\alpha-1})^2\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\int_{\frac{1}{m}}^{m}\left|F_1(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}})\right|\mathrm{d}_qs\geqslant$$

$$\frac{(m^2-1)(m^{3\alpha-3}\Gamma_q(\alpha)-(m^{3\alpha-3}-4m^{\alpha+1})A\xi^{\alpha-1})K_1r_1}{4m^{4\alpha-1}(1+m^{\alpha-1})^2\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}=r_1=\|v\|_u.$$

同理可得 $\|T_2u\|_v\geqslant r_1=\|u\|_v$，因此有 $\|T(u,v)\|_w\geqslant r_1$，$(u,v)\in P\cap\partial W_2$.

若设 $W_3=\{x\in P\mid \|(u,v)\|_w<r_2\}$，则对任意的 $(u,v)\in P\cap\partial W_3$，有 $\|(u,v)\|_w=r_2$ 且 $0\leqslant\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\leqslant r_2$，$0\leqslant\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\leqslant r_2$，从而由 (C_1) 和 (C_3) 有

$$\|T_1v\|_u=\max_{t\in[0,+\infty)}\left|\frac{T_1v(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\leqslant\max_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs+$$

$$\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\max_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\frac{G(\xi,qs)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\left|F_1(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}})\right|\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(s)\phi(\frac{|v|}{1+s^{\beta-1}})\mathrm{d}_qs\leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(t)\phi(|v|)\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{L_1r_2}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}_qs=r_2=\|v\|_u.$$

同理可得 $\|T_2u\|_v\leqslant r_1=\|u\|_v$，即有 $\|T(u,v)\|_w\leqslant r_2$. 由 Schauder 不动点定理，可得 T 至少有一个不动点 $(u,v)\in P\cap(\overline{W}_3\backslash W_2)$，因此问题(1) 至少有 1 个正解 (u,v) 满足 $r_1\leqslant\|(u,v)\|_w\leqslant r_2$.

定理 5　假设存在 3 个常数 $0<r_1<r_2<r_3$，使得(H)、(C_1)、(C_2) 以及如下条件 (C_4) 和 (C_5) 成立：

(C_4) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})<L_1r_2$，$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})<L_2r_2$，$(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,r_2]$;

(C_5) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\geqslant K_1r_3$，$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\geqslant K_2r_3$，$(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,r_3]$.

那么问题(1) 至少有 2 个正解 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 满足 $r_1\leqslant\|(u_1,v_1)\|_w\leqslant r_2\leqslant\|(u_2,v_2)\|_w\leqslant r_3$.

证明　由 (C_4) 知存在 2 个正数 M 和 N，使得 $r_1<M<r_2<N<r_3$，且

$$F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\leqslant L_1M,\ F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\leqslant L_2M,\ (t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,M];$$

$$F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\leqslant L_1N,\ F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\leqslant L_2N,\ (t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,N].$$

再根据 (C_5) 和定理 4，可得 T 至少有 2 个不动点 $(u_1,v_1)\in P\cap(\overline{W}_M\backslash W_2)$，$(u_2,v_2)\in P\cap(\overline{W}_3\backslash W_N)$，因此问题(1) 至少有 2 个正解 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 满足 $r_1\leqslant\|(u_1,v_1)\|_w\leqslant r_2\leqslant\|(u_2,v_2)\|_w\leqslant r_3$.

推论 2　假设存在 n 个常数 $0<r_1<r_2<\cdots<r_n$，使得 $f(t,v)$，$g(t,u)$ 满足(H)、(C_1) 以及如下条件 (C_6) 和 (C_7) 成立：

(C_6) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\geqslant K_1r_{2i-1}$，$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\geqslant K_2r_{2i-1}$，$(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,r_{2i-1}]$，$i=1,2,\cdots,\left[\frac{k+1}{2}\right]$;

(C_7) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})<L_1r_{2i}$，$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})<L_2r_{2i}$，$(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,r_{2i}]$，$i=1,2,\cdots,\left[\frac{k+1}{2}\right]$.

其中$\left[\frac{k+1}{2}\right]$表示不小于$\frac{k+1}{2}$的最小整数. 那么问题(1) 至少有$k-1$个正解$(u_i, v_i)(i=1,2,\cdots,n-1)$满足$r_i \leqslant \|(u_i, v_i)\|_w \leqslant r_{i+1}$.

下面利用引理 6 证明问题(1) 多重正解的存在性.

定理 6 假设存在常数a,b,c满足$0<a<b<c$,使得(H) 和如下条件(D_1)—(D_4)成立:

(D_1) $\phi(|v|)<K_1a$, $\rho(|u|)<K_2a$, 对$u,v\in[0,a]$; $\phi(|v|)\leqslant L_1c$, $\rho(|u|)\leqslant L_2c$, 对$u,v\in[0,c]$;

(D_2) $F_1\left(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}}\right)<L_1a$, $F_2\left(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}\right)<L_2a$, $\left(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}\right),\left(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}}\right)\in[0,+\infty)\times[0,a]$;

(D_3) $F_1\left(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}}\right)>K_1b$, $F_2\left(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}\right)>K_2b$, $\left(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}\right),\left(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}}\right)\in\left[\frac{1}{m},m\right]\times[b,c]$;

(D_4) $F_1\left(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}}\right)\leqslant L_1c$, $F_2\left(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}\right)\leqslant L_2c$, $\left(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}\right),\left(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}}\right)\in[0,+\infty)\times[0,c]$.

那么问题(1) 至少有 3 个正解(u_1,v_1),(u_2,v_2)和(u_3,v_3),满足:

$$\|(u_1,v_1)\|_w<a,\ b<\varphi(u_2,v_2)<\|(u_2,v_2)\|_w\leqslant c,\ a<\|(u_3,v_3)\|_w\leqslant c,\ \varphi(u_3,v_3)<b.$$

证明 为了应用引理 6,设$P_i=\{(u,v)\in P\mid \|(u,v)\|_w\leqslant i\}$, $P(\varphi,b,c)=\{(u,v)\in P\mid b\leqslant\varphi(u,v),\|(u,v)\|_w\leqslant c\}$,记$\bar{P}_i$为$P_i$的闭包. 首先证明$T:\bar{P}_c\to\bar{P}_c$是一个完全连续算子. 事实上,若$(u,v)\in\bar{P}_c$,则$\|(u,v)\|_w\leqslant c$. 由条件$(D_4)$知

$$\|T_1v\|_u=\max_{t\in[0,+\infty)}\left|\frac{T_1u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\leqslant\max_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs+$$
$$\max_{t\in[0,+\infty)}\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\frac{G(\xi,qs)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs\leqslant$$
$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\left|F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_qs\leqslant\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(t)\phi(|v|)\mathrm{d}_qs\leqslant$$
$$\frac{L_1c}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}_qs=c.$$

同理可得$\|T_2u\|_v\leqslant c$,即有$\|T(u,v)\|_w=\max\{\|T_1v\|_u,\|T_2u\|_v\}\leqslant c$. 因此$T$是$\bar{P}_c$到$\bar{P}_c$上的算子. 由定理 3 可知$T:\bar{P}_c\to\bar{P}_c$是一个完全连续算子. 同理若$(u,v)\in\bar{P}_a$,则引理 6 中的条件$(B_2)$成立. 为了证明条件$(B_1)$成立,对于$t\in[0,\infty)$,选取$u(t)=\frac{(b+c)(1+t^{\alpha-1})}{2}$, $v(t)=\frac{(b+c)(1+t^{\beta-1})}{2}$,由此易得$\|u\|_u=\|v\|_v=\frac{b+c}{2}$,且$u(t)=\frac{(b+c)(1+t^{\alpha-1})}{2}$,$v(t)=\frac{(b+c)(1+t^{\beta-1})}{2}\in P(\varphi,b,c)$, $\varphi(u,v)=\varphi\left(\frac{(b+c)(1+t^{\alpha-1})}{2},\frac{(b+c)(1+t^{\beta-1})}{2}\right)=\frac{b+c}{2}>b$,从而有$\{(u,v)\in P(\varphi,b,c)\mid\varphi(u,v)>b\}\neq\varnothing$. 因此,若$(u,v)\in\mathscr{P}(\varphi,b,c)$,对于$t\in\left[\frac{1}{m},m\right]$,则$b\leqslant\max\left\{\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}},\frac{v(t)}{1+t^{\beta-1}}\right\}\leqslant c$. 由$(D_3)$有

$$\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\frac{|T_1v(t)|}{1+t^{\alpha-1}}=\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\left|\int_0^{+\infty}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs+\frac{At^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\frac{G(\xi,qs)}{1+t^{\alpha-1}}f(s,v(s))\mathrm{d}_qs\right|=$$
$$\int_0^{+\infty}\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs+\int_0^{+\infty}\min_{t\in[\frac{1}{m},m]}\frac{At^{\alpha-1}G(\xi,qs)}{(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})}|f(s,v(s))|\mathrm{d}_qs\geqslant$$
$$\frac{1}{4m^2(1+m^{\alpha-1})}\int_0^{+\infty}\max_{t\in[0,+\infty)}\frac{G(t,qs)}{1+t^{\alpha-1}}\left|F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_qs+$$
$$\frac{1}{m^{2\alpha-2}(1+m^{\alpha-1})}\int_0^{+\infty}\max_{t\in[0,+\infty)}\frac{At^{\alpha-1}G(\xi,qs)}{(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})(1+t^{\alpha-1})}\left|F_1\left(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}}\right)\right|\mathrm{d}_qs\geqslant$$

$$\frac{m^{3\alpha-3}\Gamma_q(\alpha)-(m^{3\alpha-3}-4m^{\alpha+1})A\xi^{\alpha-1}}{4m^{4\alpha-2}(1+m^{\alpha-1})^2\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}\int_{\frac{1}{m}}^{m}\left|F_1(s,\frac{v(s)}{1+s^{\beta-1}})\right|\mathrm{d}_q s\geqslant$$

$$\frac{(m^2-1)(m^{3\alpha-3}\Gamma_q(\alpha)-(m^{3\alpha-3}-4m^{\alpha+1})A\xi^{\alpha-1})K_1 b}{4m^{4\alpha-1}(1+m^{\alpha-1})^2\Gamma_q(\alpha)(\Gamma_q(\alpha)-A\xi^{\alpha-1})}=b=\|v\|_u.$$

同理可得 $\min\limits_{t\in[\frac{1}{m},m]}\dfrac{|T_2u(t)|}{1+t^{\beta-1}}>b$,即对于 $(u,v)\in\mathscr{P}(\varphi,b,c)$ 有 $\varphi(T_1v,T_2u)>b$. 综上,问题(1) 至少有 3 个正解 (u_1,v_1),(u_2,v_2) 和 (u_3,v_3),满足:

$$\|(u_1,v_1)\|_w<a,\ b<\varphi(u_2,v_2)<\|(u_2,v_2)\|_w\leqslant c,\ a<\|(u_3,v_3)\|_w\leqslant c,\ \varphi(u_3,v_3)<b.$$

定理 7　假设存在常数 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,\cdots,M)$ 满足 $0<a_1<b_1<c_1<a_2<b_2<c_2<\cdots<a_M$,$M\in\mathbf{N}$,使得(H) 和如下条件($D_5$)—($D_8$) 成立:

(D_5) $\phi(|v|)<K_1a_1$,$\rho(|u|)<K_2a_1$,对 $u,v\in[0,a_1]$;$\phi(|v|)\leqslant L_1c_i$,$\rho(|u|)\leqslant L_2c_i$,对 u,$v\in[0,c_i]$,$i=1,2,\cdots,M-1$;

(D_6) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})<L_1a_i$,$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha}})<L_2a_i$,$(\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,a_i]$;

(D_7) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\geqslant K_1b_i$,$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\geqslant K_2b_i$,$(\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[\frac{1}{m},m]\times[b_i,c_i]$;

(D_8) $F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\leqslant L_1c_i$,$F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\leqslant L_2c_i$,$(\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,c_i]$.

那么问题(1) 至少有 $2M-1$ 个正解.

证明　当 $M=1$ 时,由条件(D_5) 和(D_6) 知全连续算子 T 是 $\bar{P}_{a_1}\to\bar{P}_{a_1}$ 上的算子,于是由 Schauder 不动点定理知问题(1) 至少有 1 个正解 $(u_1,v_1)\in\bar{P}_{a_1}$. 假设当 $M=N$ 时结论成立,为了证明当 $M=N+1$ 时结论也成立,假设存在常数 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,\cdots,N+1)$ 满足 $0<a_1<b_1<c_1<a_2<b_2<c_2<\cdots<a_N<b_N<c_N<a_{N+1}$,$N\in\mathbf{N}$,使得

$$F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})<L_1a_i,\ F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})<L_2a_i,\ (\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,a_i],$$
$$i=1,2,\cdots,N+1;\tag{9}$$

$$F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\geqslant K_1b_i,\ F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\geqslant K_2b_i,\ (\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[\frac{1}{m},m]\times[b_i,c_i],$$
$$i=1,2,\cdots,N;\tag{10}$$

$$F_1(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\leqslant L_1c_i,\ F_2(t,\frac{u}{1+t^{\alpha-1}})\leqslant L_2c_i,\ (\frac{u}{1+t^{\alpha-1}}),(t,\frac{v}{1+t^{\beta-1}})\in[0,+\infty)\times[0,c_i],$$
$$i=1,2,\cdots,N.\tag{11}$$

由假设知问题(1) 至少有 $2N-1$ 个正解 $(u_i,v_i)\in\bar{P}_{a_k}(i=1,2,\cdots,2N-1)$. 同时由引理 6 和式(9)—(11) 可知至少存在 3 个正解 (u,v),(w,z),$(x,y)\in\bar{P}_{a_{k+1}}$,使得

$$\|(u,v)\|_w<a_k,\ b_k<\varphi(w,z)<\|(w,z)\|_w\leqslant c_k,\ a_k<\|(x,y)\|_w\leqslant c_{k+1},\ \varphi(x,y)<b_k.$$

显然 (w,z),$(x,y)\neq(u,v)$,因此问题(1) 至少存在 $2N+1$ 个正解 $(u_i,v_i)\in\bar{P}_{a_i}(i=1,2,\cdots,2N+1)$,进而知 $M=N+1$ 时也成立. 由此可知问题(1) 至少有 $2M-1$ 个正解.

参考文献:

[1]　Ernst T. q-Bernoulli and q-Euler polynomials, an umbral approach[J]. International Journal of Difference Equations, 2006,1(1):31-80.

[2]　Ernst T. q-Pascal and q-Bernoulli matrices, an umbral approach[J]. Advances in Dynamical Systems & Applications, 2008,3(2):251-282.

(下转第 326 页)

而建立了一种灰色聚类白化函数模型,通过计算聚类系数来划分聚类对象所属的灰类.实验仿真和实例分析表明,本文评价方法客观、准确,有效降低了评价结果的主观性.本文在研究中只考虑了相邻区间对聚类系数的影响,并未考虑不相邻区间对聚类系数的影响,因此在后续研究过程中将考虑构建一种新的白化函数模型,以综合考虑相邻区间和不相邻区间对聚类系数的影响,进而拓展灰色聚类方法的应用范围.

参考文献:

[1] 卢皓,刘全胜,王帅帅,等.基于 AHP 的某新型坦克射击模拟训练系统成绩评定[J].四川兵工学报,2011,32(5):146-148.

[2] 陆海,王新民,赵凯瑞,等.基于灰联层次分析法的无人机自修复控制策略评价[J]. 航空学报,2010,31(5):1030-1037.

[3] 唐正,孙超,刘宗伟,等.基于灰色层次分析法的对抗系统效能评估[J]. 兵工学报,2013,34(10):1250-1257.

[4] 武兆斌,陈黎,赵春霞.基于灰色聚类和层次分析的模拟训练成绩评定[J].系统仿真学报,2012,28(2):416-424.

[5] 邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002:1-46.

[6] 陈启月.评测指标权重确定的结构熵权法[J].系统工程理论与实践,2010,30(7):2225-2228.

[7] 董一哲,党耀国.基于离差最大化法的灰色聚类方法[J].系统工程理论与实践,2009,29(9):141-146.

[8] 陈伟,夏建华.综合主、客观权重信息的最优组合赋权方法[J].数学的实践与认知,2007,37(1):17-21.

[9] 高阳,罗军舟.基于灰色关联决策算法的信息安全风险评估方法[J].东南大学学报,,2009,39(2):225-229.

[10] Liu S F, Sheng K Q, Jeffrey Forrest. On uncertain systems and uncertain models[J]. Kybernetes: The Int J of Cybernetics, Systems and Management Sciences, 2012,41(5):548-556.

[11] 刘思峰,方志耕,杨英杰.两阶段灰色综合测度决策模型与三角白化权函数的改进[J].控制与决策,2014,29(7):1232-1238.

[12] 吉琨,王海燕,王汝传.一种基于灰色系统理论的主观信任评估方法[J].计算机技术与发展,2010,20(4):109-113.

(上接第 301 页)

[3] Agarwal R P. Certain fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1969,66:365-370.

[4] Atici F M, Eloe P W. Fractional q-calculus on a time scale[J]. J Nonlinear Math Phys, 2007,14(3):333-344.

[5] Rajkovic P M, Marinkovic S D, Stankovic M S. Fractional integrals and derivatives in q-calculus[J]. Discrete Math, 2007,1(1):311-323.

[6] 孙明哲,韩筱爽.一类分数阶 q-差分边值问题的正解[J].延边大学学报(自然科学版),2013,39(4):252-255.

[7] Ahmad B, Nieto J J, Alsaedi A, et al. Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351:2890-2909.

[8] Agarwal R P, Ahmad B, Alsaedi A, et al. Existence theory for q-antiperiodic boundary value problems of sequential q-fractional integro differential equations[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014,2014:1-12.

[9] Sitthiwirattham Thanin. On nonlocal fractional q-integral boundary value problems of fractional q-difference and fractional q-integrodifference equations involving different numbers of order and q [J]. Boundary Value Problems, 2016,12:1-19.

[10] Wang G, Ahmad B, Zhang L. A coupled system of nonlinear fractional differential equations with multipoint fractional boundary conditions on an unbounded domain[J]. Abstract and Applied Analysis, 2012,2012:1-11.

[11] Su Xinwei, Zhang Shuqin. Unbounded solutions to a boundary value problem of fractional order on the half-line [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011,61:1079-1087.

[12] Zhao Y L, Chen H B, Zhang Q M. Existence and multiplicity of positive solutions for nonhomogeneous boundary value problems with fractional q-derivatives[J]. Boundary Value Problems, 2013,2013:103.

[13] 葛琦,侯成敏.一类分数阶差分方程边值问题多重正解的存在性[J].东北石油大学学报,2012,36(4):101-110.