文章编号: 1004-4353(2017)04-0283-08

半线性分数阶差分系统的 Lyapunov 型不等式

刘一丁， 王艺竹， 侯成敏*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 在 Dirichlet 边界条件下，利用 Hölder 不等式建立了二维半线性分数阶差分系统的 Lyapunov 型不等式，并将所得结果推广到了 m 维半线性分数阶差分系统上. 进一步，应用所得的 Lyapunov 型不等式，获得了有关广义谱第一特征值的下界.

关键词: 半线性; 分数阶; 差分系统; Lyapunov 型不等式
中图分类号: O175.4 **文献标识码**: A

Lyapunov type inequalities for quasi-linear fractional order difference systems

LIU Yiding, WANG Yizhu, HOU Chengmin*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Two dimensional quasi-linear fractional order difference systems are studied under the Dirichlet boundary conditions. By Hölder inequality, we establish Lyapunov type inequalities for two-dimensional quasi-linear fractional order difference systems and the results are generalized to m dimensional quasi-linear fractional difference systems. Applying these results, we also obtain some lower bounds for the first eigenvalue in the generalized spectra.

Keywords: quasi-linear; fractional order; difference system; Lyapunov inequality

0 引言

由于 Lyapunov 不等式及其一般形式在振动理论、非共轭特征问题、微差分方程理论等领域有着广泛的应用，因此近年来受到了国内外学者的广泛关注，并获得了许多研究结果[1-8]. 1983 年，Cheng[2] 证明了如果二阶差分方程

$$\Delta^2 u(n) + q(n)u(n+1) = 0 \tag{1}$$

有一个实数解 $u(n)$ 满足

$$u(a) = u(b),\ u(n) \not\equiv 0,\ n \in \mathbf{Z}[a,b], \tag{2}$$

那么不等式

$$F(b-a)\sum_{n=a}^{b-2} q(n) \geqslant 4 \tag{3}$$

成立. 其中 $q(n) \geqslant 0$, $n \in \mathbf{Z}$, $F(m) = \begin{cases} (m^2-1)/m,\ (m-1) \text{ 为偶数}; \\ m,\ (m-1) \text{ 为奇数}; \end{cases}$ 并且式(3) 中的常数 4 不可以用其他更大的数替换. 2008 年，Ünal 等[4] 在 Dirichlet 边界条件(2) 下对差分方程

收稿日期: 2017-07-12 **基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(11161049)
* **通信作者**: 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为常微分方程与离散动力系统.

$$\Delta(r(n)|\Delta u(n)|^{p-2}\Delta u(n))+q(n)|u(n+1)|^{p-2}u(n+1)=0$$

建立了Lyapunov型不等式$\left(\sum_{n=a}^{b-1}\frac{1}{[r(n)]^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=a}^{b-2}q^{+}(n)\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant 2$，其中$q^{+}(n)=\max\{q(n),0\}$. 2012年，Zhang Q M 等[5] 考虑了如下非线性差分系统：

$$\begin{cases}-\Delta(r_1(n)|\Delta u(n)|^{p_1-2}\Delta u(n))=f_1(n)|u(n+1)|^{\alpha_1-2}|v(n+1)|^{\alpha_2}u(n+1),\\ -\Delta(r_2(n)|\Delta v(n)|^{p_2-2}\Delta v(n))=f_2(n)|u(n+1)|^{\beta_1}|v(n+1)|^{\beta_2-2}v(n+1),\end{cases}\tag{4}$$

并提出了下列假设条件：

(H_1) $r_1(t), r_2(t), f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是实值函数，并且 $r_1(t)>0$, $r_2(t)>0$, $t\in\mathbf{Z}$；

(H_2) $1<p_1$, $p_2<\infty$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2>0$ 且满足 $\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}=1$ 和 $\frac{\beta_1}{p_1}+\frac{\beta_2}{p_2}=1$；

(H_3) $r_i(t)$ 和 $f_i(t)$ 是实值函数，$r_i(t)>0$, $i=1,2,\cdots,m$，且 $1<p_i<\infty$, $\alpha_i>0$ 满足 $\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{p_i}=1$.

在假设(H_1)—(H_3)的条件成立下，文献[5]的作者建立了系统(4)的几个 Lyapunov 型不等式，进而将结果推广到了如下的($p_1,p_2,\cdots,p_n$)-Laplacian 系统上：

$$\begin{cases}-\Delta(r_1(n)|\Delta u_1(n)|^{p_1-2}\Delta u_1(n))=f_1(n)|u_1(n+1)|^{\alpha_1-2}|u_2(n+1)|^{\alpha_2}\cdots|u_m(n+1)|^{\alpha_m}u_1(n+1),\\ -\Delta(r_2(n)|\Delta u_2(n)|^{p_2-2}\Delta u_2(n))=f_2(n)|u_1(n+1)|^{\alpha_1}|u_2(n+1)|^{\alpha_2-2}\cdots|u_m(n+1)|^{\alpha_m}u_2(n+1),\\ \vdots\\ -\Delta(r_m(n)|\Delta u_m(n)|^{p_m-2}\Delta u_m(n))=f_m(n)|u_1(n+1)|^{\alpha_1}|u_2(n+1)|^{\alpha_2}\cdots|u_m(n+1)|^{\alpha_m-2}u_m(n+1).\end{cases}$$

受上述文献的启发，本文考虑二维分数阶差分系统：

$$\begin{cases}\Delta_{v+a}^{v}(r_1(t)|{}_b\nabla^{v}u(t)|^{p_1-2}\,{}_b\nabla^{v}u(t))=f_1(t)|u(t)|^{\alpha_1-2}|\omega(t)|^{\alpha_2}u(t),\\ \Delta_{v+a}^{v}(r_2(t)|{}_b\nabla^{v}\omega(t)|^{p_2-2}\,{}_b\nabla^{v}\omega(t))=f_2(t)|\omega(t)|^{\beta_2-2}|u(t)|^{\beta_1}\omega(t)\end{cases}\tag{5}$$

和($p_1,p_2,\cdots,p_m$)-Laplacian 系统：

$$\begin{cases}\Delta_{v+a}^{v}(r_1(t)|{}_b\nabla^{v}u_1(t)|^{p_1-2}\,{}_b\nabla^{v}u_1(t))=f_1(t)|u_1(t)|^{\alpha_1-2}|u_2(t)|^{\alpha_2}\cdots|u_m(t)|^{\alpha_m}u_1(t),\\ \Delta_{v+a}^{v}(r_2(t)|{}_b\nabla^{v}u_2(t)|^{p_2-2}\,{}_b\nabla^{v}u_2(t))=f_2(t)|u_1(t)|^{\alpha_1}|u_2(t)|^{\alpha_2-2}\cdots|u_m(t)|^{\alpha_m}u_2(t),\\ \vdots\\ \Delta_{v+a}^{v}(r_m(t)|{}_b\nabla^{v}u_m(t)|^{p_m-2}\,{}_b\nabla^{v}u_m(t))=f_m(t)|u_1(t)|^{\alpha_1}|u_2(t)|^{\alpha_2}\cdots|u_m(t)|^{\alpha_m-2}u_m(t),\end{cases}\tag{6}$$

其中 $v\in(0,1)$. 本文将在 Dirichlet 边界条件下建立式(5)和(6)的 Lyapunov 型不等式，并给出所得结果的一些简单应用.

1 预备知识

对任意实数 β，记 $N_\beta=\{\beta,\beta+1,\beta+2,\cdots\}$, ${}_\beta N=\{\cdots,\beta-2,\beta-1,\beta\}$. 对任意 $t,v\in\mathbf{R}$ 定义 $t^{\underline{v}}=\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)}$，并规定如果 $t+1-v$ 是 Gamma 函数的极点，而 $t+1$ 不是极点，那么 $t^{\underline{v}}=0$.

定义 1[9] 假设 $f: N_a\to\mathbf{R}$, $v>0$，那么 f 的 v 阶左分数和定义为

$$\Delta_a^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}(t-s-1)^{\underline{v-1}}f(s),\ t\in N_{a+v},$$

f 的 v 阶左分数差分定义为

$$\Delta_a^{v}f(t)=\Delta^{N}\Delta_a^{v-N}f(t),\ t\in N_{a+N-v},\ 0\leqslant N-1<v\leqslant N,\ N\in\mathbf{N}.$$

定义 2[10] 假设 $f: {}_bN\to\mathbf{R}$, $v>0$，那么 f 的 v 阶右分数和定义为

$${}_b\nabla^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=t+v}^{b}(s-t-1)^{\underline{v-1}}f(s),\ t\in{}_{b-v}N,$$

f 的 v 阶右分数差分定义为

$${}_b\nabla^v f(t)=(-1)^N\ \nabla^N{}_b\nabla^{v-N}f(t),\ t\in{}_{b-N+v}N,\ 0\leqslant N-1<v\leqslant N,\ N\in\mathbf{N}.$$

引理 1[9]　假设 $f:N_a\to\mathbf{R}$, $v,\mu>0$,有 $\Delta_{a+\mu}^{v}\Delta_a^{-\mu}f(t)=\Delta_a^{v-\mu}f(t)$, $t\in N_{a+\mu+N-v}$, $N-1<v\leqslant N$.

引理 2[10]　假设 $f:{}_bN\to\mathbf{R}$, $v,\mu>0$,有${}_{b-\mu}\nabla^v{}_b\nabla^{-\mu}f(t)={}_b\nabla^{v-\mu}f(t)$, $t\in{}_{b-\mu-N+v}N$, $N-1<v\leqslant N$.

引理 3[11]　假设 $f:{}_bN\to\mathbf{R}$, $v>0$, $N-1<v\leqslant N$, $\Delta_a^v f:N_{a+N-v}\to\mathbf{R}$,那么以下关于左分数差分的两个定义是等价的:

$$\Delta_a^v f(t)=\Delta^N\Delta_a^{-(N-v)}f(t),$$

$$\Delta_a^v f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-v)}\displaystyle\sum_{s=a}^{t+v}(t-s-1)^{\underline{-v-1}}f(s),\ N-1<v\leqslant N;\\ \Delta^N f(t),\ v=N.\end{cases}$$

引理 4[11]　假设 $f:{}_bN\to\mathbf{R}$, $v>0$, $N-1<v\leqslant N$, $\Delta_a^v f:N_{a+N-v}\to\mathbf{R}$,那么以下关于右分数差分的两个定义是等价的:

$${}_b\nabla^v f(t)=(-1)^N\ \nabla_b^N\nabla^{-(N-v)}f(t),$$

$${}_b\nabla^v f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-v)}\displaystyle\sum_{s=t-v}^{b}(s-t-1)^{\underline{-v-1}}f(s),\ N-1<v\leqslant N;\\ (-1)^N\ \nabla^N f(t),\ v=N.\end{cases}$$

引理 5[10]　假设 $f:N_a\to\mathbf{R}$, $k\in N_0$, $v>0$,则对于 $t\in N_{a+M-\mu+v}$ 有

$$\Delta_a^{-v}\Delta^k f(t)=\Delta_a^{k-v}f(t)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Delta^j f(a)}{\Gamma(v-k+j+1)}(t-a)^{\underline{v-k-j}}.$$

此外,若 $\mu>0$, $M-1<\mu\leqslant M$,则对于 $t\in N_{a+v}$ 有

$$\Delta_{a+M-\mu}^{-v}\Delta_a^{\mu}f(t)=\Delta_a^{\mu-v}f(t)-\sum_{j=0}^{M-1}\frac{\Delta_a^{j-M+\mu}f(a+M-\mu)}{\Gamma(v-M+j+1)}(t-a-M+\mu)^{\underline{v-M+j}}.$$

引理 6[11]　假设 $f:{}_bN\to\mathbf{R}$, $k\in N_0$, $v>0$,则对于 $t\in{}_{b-v}N$ 有

$${}_b\nabla^{-v}{}_b\nabla^k f(t)={}_b\nabla^{k-v}f(t)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{{}_b\nabla^j f(b)}{\Gamma(v-k+j+1)}(b-t)^{\underline{v-k+j}}.$$

此外,若 $\mu>0$, $M-1<\mu\leqslant M$,则对于 $t\in{}_{b-M+\mu-v}N$ 有

$${}_{b-M+\mu}\nabla^{-v}{}_b\nabla^{\mu}f(t)={}_b\nabla^{\mu-v}f(t)-\sum_{j=0}^{M-1}\frac{{}_b\nabla^{j-M+\mu}f(b-M+\mu)}{\Gamma(v-M+j+1)}(b-M+\mu-t)^{\underline{v-M+j}}.$$

为方便,记:

$$\xi_i(t)=\left\{\left[\sum_{\tau=a+v}^{t+v-1}\left(\frac{(\tau-a-1)^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)r_i^{1/p_i}(\tau)}\right)^{q_i}\right]^{\frac{1}{q_i}}+\left[\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left(\sum_{s=a+1}^{t}\frac{(\tau-s-1)^{\underline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)r_i^{1/p_i}(\tau)}\right)^{q_i}\right]^{\frac{1}{q_i}}\right\}^{p_i},$$

$$\eta_i(t)=\left[\sum_{s=t+v}^{b-1+v}\left(\frac{(s-t-1)^{\underline{v-1}}}{\Gamma(v)r_i^{1/p_i}(s)}\right)^{q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}},\ \frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1,\ i=1,2,\cdots,m.$$

2　主要结果及其证明

引理 7　假设 $1<p<+\infty$, $a,b\in\mathbf{Z}$, $u,\omega:\mathbf{Z}[a,b]\to\mathbf{R}$, $\phi_p(u)=|u|^{p-2}u$,则

$$\sum_{t=a+v}^{b+v}(r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))){}_b\nabla^v\omega(t)=\sum_{t=a}^{b}[\Delta_{a+v}^{v}(r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t)))]\,\omega(t).$$

证明　由定义 1、定义 2、引理 3 及引理 4 知

$$\sum_{t=a+v}^{b+v}(r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))){}_b\nabla^v\omega(t)=\sum_{t=a+v}^{b+v}(r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t)))\frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=t-v}^{b}(s-t-1)^{\underline{-v-1}}\omega(s)=$$

$$[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v}\frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=a}^{b}(s-a-v-1)^{\underline{-v-1}}\omega(s)+[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v+1}\cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=a+1}^{b}(s-a-v-2)^{\underline{-v-1}}\omega(s)+\cdots+$$

$$[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=b+v}\frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=b}^{b}(s-b-v-1)^{\underline{-v-1}}\omega(s)=$$

$$[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v}\frac{1}{\Gamma(-v)}(-v-1)^{\underline{-v-1}}\omega(a)+\{[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v}\cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma(-v)}(-v)^{\underline{-v-1}}+[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v+1}\frac{1}{\Gamma(-v)}(-v-1)^{\underline{-v-1}}\}\omega(a+1)+\cdots+$$

$$\Big\{[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v}\frac{1}{\Gamma(-v)}(b-a-v-1)^{\underline{-v-1}}+[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=a+v+1}\cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma(-v)}(b-a-v-2)^{\underline{-v-1}}+\cdots+[r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t))]_{t=b+v}\frac{(-v-1)^{\underline{-v-1}}}{\Gamma(-v)}\Big\}\omega(b)=$$

$$\sum_{t=a}^{b}\sum_{s=a+v}^{t+v}\frac{1}{\Gamma(-v)}(t-s-1)^{\underline{-v-1}}[r(s)\phi_p({}_b\nabla^v u(s))]\omega(t)=\sum_{t=a}^{b}[\Delta_{a+v}^{v}(r(t)\phi_p({}_b\nabla^v u(t)))]\omega(t).$$

2.1 二维系统(5)的 Lyapunov 型不等式

定理 1 令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 且 $a\leqslant b-2$. 假设(H_1)和(H_2)成立且系统(5)有一个解 $u(t)$ 满足边界条件:

$$u(a)=u(b)=\omega(a)=\omega(b)=0,\ u(t)\not\equiv 0,\ \omega(t)\not\equiv 0,\ t\in\mathbf{Z}[a,b], \tag{7}$$

则有如下不等式:

$$\left(\sum_{t=a}^{b-1}\frac{\xi_1(t)\eta_1(t)}{\xi_1(t)+\eta_1(t)}f_1^+(t)\right)^{\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1^2}}\left(\sum_{t=a}^{b-1}\frac{\xi_1(t)\eta_1(t)}{\xi_1(t)+\eta_1(t)}f_2^+(t)\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_1p_2}}\times$$

$$\left(\sum_{t=a}^{b-1}\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}f_1^+(t)\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_1p_2}}\left(\sum_{t=a}^{b-1}\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}f_2^+(t)\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_2^2}}\geqslant 1,$$

这里 $f_i^+(t)=\max\{f_i(t),0\}$, $i=1,2$.

证明 根据引理 7 可得

$$\sum_{t=a+v}^{b+v}(r_1(t)|{}_b\nabla^v u(t)|^{p_1})=\sum_{t=a}^{b}f_1(t)|u(t)|^{\alpha_1}|\omega(t)|^{\alpha_2}, \tag{8}$$

$$\sum_{t=a+v}^{b+v}(r_2(t)|{}_b\nabla^v\omega(t)|^{p_2})=\sum_{t=a}^{b}f_2(t)|u(t)|^{\beta_1}|\omega(t)|^{\beta_2}. \tag{9}$$

再由引理 6、式(5)和(7)可得:

$$|u(t)|^{p_1}=\left|{}_{b-1+v}\nabla^{-v}{}_b\nabla^v u(t)+\frac{u(b)}{\Gamma(v)}(b-1+v-t)^{\overline{v-1}}\right|^{p_1}=$$

$$|{}_{b-1+v}\nabla^{-v}{}_b\nabla^v u(t)|^{p_1}=\left|\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=t+v}^{b-1+v}(s-t-1)^{\overline{v-1}}{}_b\nabla^v u(s)\right|^{p_1}\leqslant$$

$$\left(\sum_{s=t+v}^{b-1+v}\left(\frac{(s-t-1)^{\overline{v-1}}}{\Gamma(v)r_1^{1/p_1}(s)}\right)^{q_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\left(\sum_{s=t+v}^{b-1+v}r_1(s)|{}_b\nabla^v u(s)|^{p_1}\right)=\eta_1(t)\sum_{s=t+v}^{b-1+v}r_1(s)|{}_b\nabla^v u(s)|^{p_1}, \tag{10}$$

$$|u(t)|=\left|\sum_{s=a+1}^{t}\nabla u(s)\right|=\left|\sum_{s=a+1}^{t}\nabla_{b-1+v}\nabla^{-v}{}_b\nabla^v u(s)\right|=$$

$$\left|-\sum_{s=a+1}^{t}\frac{1}{\Gamma(v-1)}\sum_{\tau=s-1+v}^{b+v-1}(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}{}_b\nabla^v u(\tau)\right|=$$

$$\left|\sum_{s=a+1}^{t}\sum_{\tau=s-1+v}^{t+v-1}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right){}_b\nabla^v u(\tau)+\sum_{s=a+1}^{t}\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right){}_b\nabla^v u(\tau)\right|\leqslant$$

$$\left|\sum_{s=a+1}^{t}\sum_{\tau=s-1+v}^{t+v-1}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right){}_b\nabla^v u(\tau)\right|+\left|\sum_{s=a+1}^{t}\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right){}_b\nabla^v u(\tau)\right|=$$

$$\left|\sum_{\tau=a+v}^{t+v-1}{}_b\nabla^v u(\tau)\sum_{s=a+1}^{\tau-v+1}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right)\right|+\left|\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left[\sum_{s=a+1}^{t}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right)\right]{}_b\nabla^v u(\tau)\right|=$$

$$\left|\sum_{\tau=a+v}^{t+v-1} {}_b\nabla^v u(\tau)\frac{(\tau-s)^{\overline{v-1}}}{\Gamma(v)}\right|_{s=a+1}^{\tau-v+2}+\left|\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left[\sum_{s=a+1}^{t}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right)\right]{}_b\nabla^v u(\tau)\right|=$$

$$\left|\sum_{\tau=a+v}^{t+v-1} {}_b\nabla^v u(\tau)\frac{(\tau-a-1)^{\overline{v-1}}}{\Gamma(v)}\right|+\left|\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left[\sum_{s=a+1}^{t}\left(\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right)\right]{}_b\nabla^v u(\tau)\right|\leqslant$$

$$\left(\sum_{\tau=a+v}^{t+v-1}\left(\frac{(\tau-a-1)^{\overline{v-1}}}{\Gamma(v)r_1^{1/p_1}(\tau)}\right)^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\sum_{\tau=a+v}^{t+v-1}r_1(\tau)\left|{}_b\nabla^v u(\tau)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}+$$

$$\left(\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}\left[\left(\sum_{s=a+1}^{t}\frac{(\tau-s-1)^{\overline{v-2}}}{-\Gamma(v-1)}\right)\frac{1}{r_1^{1/p_1}(\tau)}\right]^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\sum_{\tau=t+v}^{b+v-1}r_1(\tau)\left|{}_b\nabla^v u(\tau)\right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

即

$$|u(t)|^{p_1}\leqslant\xi_1(t)\sum_{\tau=a+v}^{b+v-1}r_1(\tau)\left|{}_b\nabla^v u(\tau)\right|^{p_1}\leqslant\xi_1(t)\sum_{\tau=a+v}^{b+v}r_1(\tau)\left|{}_b\nabla^v u(\tau)\right|^{p_1}.\tag{11}$$

根据式(8)—(11)可得:

$$|u(t)|^{p_1}\leqslant\frac{\xi_1(t)\eta_1(t)}{\xi_1(t)+\eta_1(t)}\sum_{\tau=a+v}^{b+v}r_1(\tau)\left|{}_b\nabla^v u(\tau)\right|^{p_1},\tag{12}$$

$$\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|u(t)|^{p_1}\leqslant\sum_{t=a}^{b}\frac{\xi_1(t)\eta_1(t)}{\xi_1(t)+\eta_1(t)}f_1^+(t)\sum_{t=a+v}^{b+v}r_1(t)\left|{}_b\nabla^v u(t)\right|^{p_1}=$$

$$M_{11}\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|u(t)|^{\alpha_1}|\omega(t)|^{\alpha_2}\leqslant M_{11}\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|u(t)|^{\alpha_1}|\omega(t)|^{\alpha_2}\leqslant$$

$$M_{11}\left(\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|u(t)|^{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|\omega(t)|^{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{p_2}},\tag{13}$$

$$\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|u(t)|^{p_1}\leqslant M_{12}\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|u(t)|^{\alpha_1}|\omega(t)|^{\alpha_2}\leqslant$$

$$M_{12}\left(\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|u(t)|^{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|\omega(t)|^{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{p_2}}.\tag{14}$$

这里

$$M_{11}=\sum_{t=a}^{b}\left[\frac{\xi_1(t)\eta_1(t)}{\xi_1(t)+\eta_1(t)}f_1^+(t)\right],\ M_{12}=\sum_{t=a}^{b}\left[\frac{\xi_1(t)\eta_1(t)}{\xi_1(t)+\eta_1(t)}f_2^+(t)\right].\tag{15}$$

类似于式(12)的方法,可得$|\omega(t)|^{p_2}\leqslant\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}\sum_{t=a+v}^{b+v}r_2(t)\left|{}_b\nabla^v\omega(t)\right|^{p_2}$.类似于式(13)和(14),利用 Hölder 不等式可得:

$$\sum_{t=a}^{b}f_1^+(t)|\omega(t)|^{p_2}\leqslant\sum_{t=a}^{b}\left[\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}f_1^+(t)\right]\sum_{t=a+v}^{b+v}r_2(t)\left|{}_b\nabla^v\omega(t)\right|^{p_2}=$$

$$M_{21}\sum_{t=a}^{b}f_2(t)|u(t)|^{\beta_1}|\omega(t)|^{\beta_2}\leqslant M_{21}\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|u(t)|^{\beta_1}|\omega(t)|^{\beta_2}\leqslant$$

$$M_{21}\left(\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|u(t)|^{p_1}\right)^{\frac{\beta_1}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|\omega(t)|^{p_2}\right)^{\frac{\beta_2}{p_2}},\tag{16}$$

$$\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|\omega(t)|^{p_2}\leqslant\sum_{t=a}^{b}\left[\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}f_2^+(t)\right]\sum_{t=a}^{b}r_2(t)\left|{}_b\nabla^v\omega(t)\right|^{p_2}=$$

$$M_{22}\sum_{t=a}^{b}f_2(t)|u(t)|^{\beta_1}|\omega(t)|^{\beta_2}\leqslant M_{22}\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|u(t)|^{\beta_1}|\omega(t)|^{\beta_2}\leqslant$$

$$M_{22}\left(\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|u(t)|^{p_1}\right)^{\frac{\beta_1}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b}f_2^+(t)|\omega(t)|^{p_2}\right)^{\frac{\beta_2}{p_2}}.\tag{17}$$

这里

$$M_{21}=\sum_{t=a}^{b}\left(\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}f_1^+(t)\right),\quad M_{22}=\sum_{t=a}^{b}\left(\frac{\xi_2(t)\eta_2(t)}{\xi_2(t)+\eta_2(t)}f_2^+(t)\right).\tag{18}$$

下证

$$\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left|u(t)\right|^{p_1} > 0. \tag{19}$$

如果式(19)不成立,那么 $\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left|u(t)\right|^{p_1}=0$,再由式(8)可以得到

$$0 \leqslant \sum_{t=a}^{b} r_1(t)\left|{}_b\nabla^v u(t)\right|^{p_1}=\sum_{t=a}^{b} f_1(t)\left|u(t)\right|^{\alpha_1}\left|\omega(t)\right|^{\alpha_2} \leqslant \sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left|u(t)\right|^{\alpha_1}\left|\omega(t)\right|^{\alpha_2} \leqslant$$

$$\left(\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left|u(t)\right|^{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left|\omega(t)\right|^{p_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{p_2}}=0.$$

因此由(H_1)有${}_b\nabla^v u(t)\equiv 0$.再结合式(11)可知,当 $a\leqslant t\leqslant b$,有 $u(t)\equiv 0$,与条件(7)矛盾,故式(19)成立.同理可得

$$\sum_{t=a}^{b} f_2^+(t)\left|u(t)\right|^{p_1}>0,\ \sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left|\omega(t)\right|^{p_1}>0,\ \sum_{t=a}^{b} f_2^+(t)\left|\omega(t)\right|^{p_2}>0. \tag{20}$$

根据式(13)—(16)、(20)和条件(H_2)可得 $M_{11}^{\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1^2}} M_{12}^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_1 p_2}} M_{21}^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_1 p_2}} M_{22}^{\frac{\alpha_2\beta_2}{p_2^2}} \geqslant 1$,再由式(15)和(18)可知定理1成立.

推论 1 令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 并且 $a\leqslant b-2$.假设(H_1)和(H_2)成立且系统(5)有一个满足式(7)的解($u(t)$, $v(t)$),则

$$\left(\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left[\xi_1(t)\eta_1(t)\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1^2}}\left(\sum_{t=a}^{b} f_2^+(t)\left[\xi_1(t)\eta_1(t)\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_1 p_2}}\times$$

$$\left(\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\left[\xi_2(t)\eta_2(t)\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2\beta_1}{p_1 p_2}}\left(\sum_{t=a}^{b} f_2^+(t)\left[\xi_2(t)\eta_2(t)\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha_2\beta_2}{p_2^2}} \geqslant 2^{(p_2\beta_1+p_1\alpha_2)p_1p_2}. \tag{21}$$

证明 因为 $\xi_i(t)+\eta_i(t)\geqslant 2[\xi_i(t)\eta_i(t)]^{\frac{1}{2}}$,$i=1,2$,显然知推论1成立.

推论 2 令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 并且 $a\leqslant b-2$,$v=1$.假设(H_1)和(H_2)成立且系统(5)有一个满足式(7)的解($u(t)$,$v(t)$),则

$$\left(\sum_{t=a}^{b}\left[r_1(t)\right]^{\frac{1}{1-p_1}}\right)^{\frac{\beta_1(p_1-1)}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b}\left[r_2(t)\right]^{\frac{1}{1-p_2}}\right)^{\frac{\alpha_2(p_2-1)}{p_2}}\left(\sum_{t=a}^{b} f_1^+(t)\right)^{\frac{\beta_1}{p_1}}\left(\sum_{t=a}^{b} f_2^+(t)\right)^{\frac{\alpha_2}{p_2}} \geqslant 2^{\beta_1+\alpha_2}. \tag{22}$$

证明 因为 $v=1$,$\xi_1(t)=\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r_1(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_1}}\right)^{p_1-1}$,$\eta_1(t)=\left(\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r_1(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_1}}\right)^{p_1-1}$,

$$\xi_2(t)=\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r_2(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_2}}\right)^{p_2-1},\ \eta_2(t)=\left(\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r_2(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_2}}\right)^{p_2-1},$$

$$\left[\xi_1(t)\eta_1(t)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r_1(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_1}}\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r_1(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_1}}\right)^{\frac{p_1-1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^{p_1-1}}\left(\sum_{\tau=a}^{b}\left(r_1(\tau)\right)^{\frac{1}{1-p_1}}\right)^{p_1-1},$$

$$\left[\xi_2(t)\eta_2(t)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r_2(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_2}}\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r_2(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p_2}}\right)^{\frac{p_1-1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^{p_2-1}}\left(\sum_{\tau=a}^{b}\left(r_2(\tau)\right)^{\frac{1}{1-p_2}}\right)^{p_2-1},$$

由式(20)和条件(H_2)可知式(22)成立.

当 $v=1$,$\alpha_1=\beta_1=p_1=p_2=p$,$\alpha_2=\beta_1=0$,$r_1(t)=r_2(t)=r(t)$,且 $f_1(t)=f_2(t)=q(t)$,那么系统(5)将变化成

$$\Delta(r_1(t)\phi_p(\nabla u(t)))=q(t)\left|u(t)\right|^{p-2}u(t). \tag{23}$$

定理 2 令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 且 $a\leqslant b-2$.假设 $p>1$,$r(t)>0$,如果式(23)有一个解 $u(t)$ 满足式(2),则

$$\sum_{t=a}^{b}\left[\frac{\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}\left(\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}}{\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}+\left(\sum_{\tau=t+1}^{b}\left(r(\tau)\right)^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}}q^+(t)\right]\geqslant 1.$$

证明 由式(13)和(19)可直接得到上述 Lyapunov 型不等式.

因为 $\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}+\left(\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{p-1}\geqslant 2\left(\sum_{\tau=a}^{t}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\sum_{\tau=t+1}^{b}\left[r(\tau)\right]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{\frac{p-1}{2}}$,所以由定理2可

得如下推论 3：

推论 3　令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 并且 $a\leqslant b-2$. 假设 $p>1$，$r(t)>0$，如果式(23) 有一个解 $u(t)$ 满足式(2)，那么不等式 $\sum_{t=a}^{b}\left[q^{+}(t)\left(\sum_{\tau=a}^{t}[r(\tau)]^{\frac{1}{1-p}}\sum_{\tau=t+1}^{b}[r(\tau)]^{\frac{1}{1-p}}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right]\geqslant 2$ 成立.

2.2　m 维系统(6) 的 Lyapunov 型不等式

定理 3　令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 并且 $a\leqslant b-2$. 假设(H_3) 成立且系统(6) 有一个解$(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t))$ 满足如下边界条件：

$$u_i(a)=u_i(b)=0,\ u_i(t)\not\equiv 0,\ t\in\mathbf{Z}[a,b],\ i=1,2,\cdots,m, \tag{24}$$

那么

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b}\left[\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}\right]f_j^{+}(t)\right)^{\frac{\alpha_i\alpha_j}{p_ip_j}}\geqslant 1. \tag{25}$$

证明　由式(6)、(24) 和条件(H_3) 可知：$\sum_{t=a}^{b}r_i(t)\left|{}_b\nabla^{v}u_i(t)\right|^{p_i}=\sum_{t=a}^{b}\left[f_i(t)\prod_{k=1}^{m}\left|u_k(t)\right|^{\alpha_k}\right]$，$i=1,2,\cdots,m$. 再由式(24) 和 Hölder 不等式可得

$$\left|u_i(t)\right|^{p_i}=\left|\sum_{\tau=a+1}^{t}\nabla u_i(\tau)\right|^{p_i}=\left|\sum_{\tau=a+1}^{t}\nabla_{b-1+v}\nabla^{-v}{}_b\nabla^{v}u_i(\tau)\right|^{p_i}\leqslant\xi_i(t)\sum_{\tau=a+v}^{b+v}r_i(\tau)\left|{}_b\nabla^{v}u_i(\tau)\right|^{p_i},$$

$$\left|u_i(t)\right|^{p_i}\leqslant\eta_i(t)\sum_{\tau=t+1+v}^{b+2}r_i(\tau)\left|{}_b\nabla^{v}u_i(\tau)\right|^{p_i}.$$

因此有：

$$\left|u_i(t)\right|^{p_i}\leqslant\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}\sum_{\tau=a+v}^{b+v}r_i(\tau)\left|{}_b\nabla^{v}u_i(\tau)\right|^{p_i},$$

$$\sum_{t=a}^{b}f_j^{+}(t)\left|u_i(t)\right|^{p_i}\leqslant M_{ij}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{t=a}^{b}f_i^{+}(t)\left|u_k(t)\right|^{p_k}\right)^{\frac{\alpha_k}{p_k}},$$

其中

$$M_{ij}=\sum_{t=a}^{b}\left[\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}f_j^{+}(t)\right],\ i,j=1,2,\cdots,m. \tag{26}$$

类似于式(19)，知$\sum_{t=a}^{b}f_i(t)\left|u_k(t)\right|^{p_k}>0$，$i,k=1,2,\cdots,m$，因此$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}M_{ij}^{\frac{\alpha_i\alpha_j}{p_ip_j}}\geqslant 1$. 再由式(26) 可知式(25) 成立.

推论 4　令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 并且 $a\leqslant b-2$. 假设(H_3) 成立且式(6) 有一个解$(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t))$ 满足式(24)，则不等式$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b}f_j^{+}(\tau)\,[\xi_i(t)\eta_i(t)]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\alpha_i\alpha_j}{p_ip_j}}\geqslant 2$ 成立.

推论 5　令 $v=1$，$a,b\in\mathbf{Z}$ 和 $a\leqslant b-2$. 假设(H_3) 成立且式(6) 有一个解$(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t))$ 满足式(24)，记 $A=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$，则不等式$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b}[r_i(\tau)]^{\frac{1}{1-p_i}}\right)^{\frac{\alpha_i(p_i-1)}{p_i}}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b}f_j^{+}(\tau)\right)^{\frac{\alpha_j}{p_j}}\geqslant 2^{A}$ 成立.

3　Lyapunov 型不等式的应用

令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 且 $a\leqslant b-2$，考虑半线性差分系统：

$$\begin{cases}\Delta_{v+a}^{v}\phi_{p_1}({}_b\nabla^{v}u_1(t))=\lambda_1\alpha_1q(t)\phi_{\alpha_1}(u_1(t))\left|u_2(t)\right|^{\alpha_2}\cdots\left|u_m(t)\right|^{\alpha_m},\\ \Delta_{v+a}^{v}\phi_{p_2}({}_b\nabla^{v}u_2(t))=\lambda_2\alpha_2q(t)\phi_{\alpha_2}(u_2(t))\left|u_1(t)\right|^{\alpha_1}\left|u_3(t)\right|^{\alpha_3}\cdots\left|u_m(t)\right|^{\alpha_m},\\ \vdots\\ \Delta_{v+a}^{v}\phi_{p_m}({}_b\nabla^{v}u_m(t))=\lambda_m\alpha_mq(t)\phi_{\alpha_m}(u_m(t))\left|u_1(t)\right|^{\alpha_1}\cdots\left|u_{m-1}(t)\right|^{\alpha_{m-1}},\end{cases} \tag{27}$$

其中 $q(t)>0$，$\alpha_i\in\mathbf{R}$，p_i,α_i 与式(6) 中相同并且 u_i 满足 Dirichlet 边界条件：

$$u_i(a)=u_i(b)=0,\ u_i(t)>0,\forall t\in\mathbf{Z}[a+1,b-1],\ i=1,2,\cdots,m. \tag{28}$$

对非线性差分系统(27)定义广义频谱 S. 令 S 为向量$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m$ 的集合,因此由问题(27)和(28)的特征值可以得到一个特征解. 实际上问题(27)和(28)是下列 p-Laplacian 差分方程边值问题:

$$\Delta_{v+a}^{v}(\phi_p({}_b\nabla^v u(t)))=\lambda pq(t)\phi_p(u(t)), \tag{29}$$

$$u(a)=u(b)=0,\ u(t)>0,\forall t\in\mathbf{Z}[a+1,b-1] \tag{30}$$

的一般化. 当 $p>1$, $\lambda\in\mathbf{R}$ 且 $q(t)>0$ 时, $f_i(t)=\lambda_i\alpha_i q(t)$, $r_i(t)=1$, $i=1,2,\cdots,m$. 由此可以应用定理 3 获得问题(27)和(28)的一个有关广义谱第一特征值的界.

定理 4 令 $a,b\in\mathbf{Z}$ 且 $a\leqslant b-2$. 假设 $1<p_i<\infty$, $\alpha_i>0$ 满足$\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{p_i}=1$ 且对于所有的 $t\in\mathbf{Z}$, 有 $q(t)>0$; 那么一定存在一个函数 $h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1})$ 使得问题(27)和(28)对于广义特征值$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$ 有不等式 $\lambda_m\geqslant h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1})$ 成立. 其中 $h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1})$ 定义为

$$h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1})=\frac{1}{\alpha_m}\prod_{j=1}^{m-1}(\lambda_j\alpha_j)^{\frac{\alpha_j}{p_j}}\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{n=a}^{b}\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}\right)^{\frac{\alpha_i}{p_i}}.$$

证明 假设问题(27)和(28)在特征值$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$下有一个特征解$(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t))$, 则由式(29)知 $r_i(t)\equiv1$, $f_i(t)=\lambda_i\alpha_i q(t)>0$. 所以可以得到

$$1\leqslant\prod_{i-1}^{m}\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b-2}\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}f_j^{+}(t)\right)^{\frac{\alpha_i\alpha_j}{p_ip_j}}=\prod_{j=1}^{m}(\lambda_j\alpha_j)^{\frac{\alpha_j}{p_j}}\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b}\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}q(\tau)\right)^{\frac{\alpha_j}{p_j}},$$

因此 $\lambda_m\geqslant\frac{1}{\alpha_m}\left[\prod_{j=1}^{m-1}(\lambda_j\alpha_j)^{\frac{\alpha_j}{p_j}}\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{\tau=a}^{b}\frac{\xi_i(\tau)\eta_i(\tau)}{\xi_i(\tau)+\eta_i(\tau)}\right)^{\frac{\alpha_i}{p_i}}\right]^{-(\frac{p_m}{\alpha_m})}$. 至此,定理 4 证明完毕.

参考文献:

[1] Atkinson F V. Discrete and Continuous Boundary Problems[M]. New York: Academic Press, 1964.

[2] Cheng S S. A discrete analogue of the inequality of Lyapunov[J]. Hokkaido Mathematical Journal, 1983,12(1): 105-112.

[3] Liapounoff A M. Probléme général de la stabilité du movement[J]. Ann Fac Sci Toulouse Sci Math Sci Phys, 1907,2(9):203-474.

[4] Ünal M, Cakmak D, Tiryaki A. A discrete analogue of Lyapunov-type inequalities for nonlinear systems[J]. Comput Math Appl, 2003,55(11):1399-1416.

[5] Zhang Q M, Tang X H. Lyapunov-type inequalities for the quasilinear difference systems[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012,2012:DOI 10.1155/2012/860598.

[6] He Xianfei, Zhang Qiming. A discrete analogue of Lyapunov-type inequalities for nonlinear difference system[J]. Comput Math Appl, 2011,62:677-684.

[7] Guseinov G Sh, Kcalan B Kayma. Lyapunov inequalities for discrete linear Hanailtonian systems[J]. Comput Math Appl, 2003,45:139-156.

[8] Jiang L Q, Zhou Z. Lyapunov inequality for linear Hamiltonian Systems[J]. J Math Anal Appl, 2005,310:579-593.

[9] He Yansheng, Hou Chengmin. Existence of solutions for discrete fractional boundary value problems with p-Laplacian operator[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2014,34(2):192-208.

[10] Ibrahim Rabha W, Jalab H A. Existence of a class of fractional difference equations with two point boundary value problem[J]. Advances in Difference Equations, 2015,2015:DOI 10.1186/s13662-015-0609-1.

[11] Xie Zuoshi, Hou Chengmin. Properties of right fractional sum and right fractional difference operators and application[J]. Advances in Difference Equations, 2015,2015:DOI 10.1186/s13662-015-0616-2.