文章编号：1004-4353(2017)03-0195-03

正定厄米特矩阵不等式的新证明

勇鑫蕾， 韩旖帆， 李晓玉， 陶元红*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要：正定厄米特矩阵的不等式在厄米特矩阵的研究中占有十分重要的地位，本文在已有的关于正定厄米特矩阵不等式的研究基础上，总结多篇文献在不同条件下的关于同一不等式的不同证明，化繁为简，利用一种简便的新方法证明了此不等式及其推广不等式，从而推广了相关文献的一些结果.

关键词：正定；厄米特矩阵；不等式

中图分类号：O177.3 **文献标识码：**A

A new proof for inequality of a positive definite Hermitian matrix

YONG Xinlei， HAN Yifan， LI Xiaoyu， TAO Yuanhong*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In the study of the Hermitian matrix, the inequalities of the positive definite Hermitian matrix occupies a very important position. Based on some literature of positive definite Hermitian matrix inequalities, we sum up different proofs of the same inequality under different conditions, and use a new simple method to prove the inequality and its generalized inequality, thus unify and promote the relevant literature.

Keywords: positive definite; Hermitian matrix; inequality

厄米特矩阵在量子理论研究中占有十分重要的地位，相关许多研究成果涉及到了厄米特矩阵的构造及性质[1-3]. 在对厄米特矩阵的相关研究中，许多学者对正定厄米特矩阵不等式进行了研究，并取得了一些研究成果[4-10]. 文献[4-7]讨论了如下厄米特矩阵的不等式及其推广：

$$\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}^{(i)}|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}^{(i)}|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}^{(i)}|^{\gamma}\leqslant\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}^{(i)}\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}^{(i)}\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}^{(i)}\right|^{\gamma},\tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{|\boldsymbol{A}^{(i)}|^{\alpha}}{|\boldsymbol{A}_{11}^{(i)}|^{\alpha}}\cdot\frac{|\boldsymbol{B}^{(i)}|^{\beta}}{|\boldsymbol{B}_{11}^{(i)}|^{\beta}}\cdot\cdots\cdot\frac{|\boldsymbol{C}^{(i)}|^{\gamma}}{|\boldsymbol{C}_{11}^{(i)}|^{\gamma}}\right)<\frac{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}^{(i)}\right|^{\alpha}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_{11}^{(i)}\right|^{\alpha}}\cdot\frac{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}^{(i)}\right|^{\beta}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_{11}^{(i)}\right|^{\beta}}\cdot\cdots\cdot\frac{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}^{(i)}\right|^{\gamma}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_{11}^{(i)}\right|^{\gamma}},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{(i)},\boldsymbol{B}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{C}^{(i)}(i=1,2,3,\cdots,k)$ 都是 n 阶正定厄米特矩阵，$\boldsymbol{A}_{11}^{(i)},\boldsymbol{B}_{11}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{C}_{11}^{(i)}$ 为其相应的 m 阶顺序主子阵，$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 都是正实数，且 $\alpha+\beta+\cdots+\gamma=p$. 文献[4-6]分别证明了 $p=1$，$p\geqslant 1$ 及 $\frac{1}{n}\leqslant p<1$ 时式(1) 成立，但是这些文献的证明方法各不相同，相互没有关联. 另外，文献[7] 推广了不等式(1)，并证明了不等式(2) 在 $p\geqslant 1$ 时成立. 为了找出更简便的证明方法，本文首先对文献[4-6] 进行了综合梳理，就 p 的不同取值，给出了不等式(1) 成立的新证明，然后证明了不等式(2) 在 $\frac{1}{n}\leqslant p<1$ 时也成立.

收稿日期：2017－06－12 **基金项目：**国家自然科学基金资助项目(11361065)
* **通信作者：**陶元红(1973—)，女，博士，副教授，研究方向为泛函分析及应用.

1 预备知识

定义 1[1] 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵,若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为厄米特矩阵,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭.

引理 1[4] 设 $a_i>0\,(i=1,2,3,\cdots,k)$, p 为任意实数,则:

1) 当 $p<1$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i^p>(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i)^p$;

2) 当 $p\geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i^p\leqslant(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i)^p$.

引理 2[4] 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_k$ 是 k 个 n 阶正定厄米特矩阵, m 是不小于 1 的自然数,则有

$$|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_k|^{\frac{m}{n}}>|\boldsymbol{A}_1|^{\frac{m}{n}}+|\boldsymbol{A}_2|^{\frac{m}{n}}+\cdots+|\boldsymbol{A}_k|^{\frac{m}{n}}. \tag{3}$$

引理 3[5] 设 $a_i,p_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 均为正数, $p_1+p_2+\cdots+p_k=p$,则对任意正整数 n,成立如下不等式:

$$a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot\cdots\cdot a_k^{p_k}\leqslant\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k}p_i\,a_i^{\frac{1}{n}}\right)^{np}. \tag{4}$$

引理 4[7] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定厄米特矩阵, $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{B}_{11}$ 分别表示 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的 m 阶顺序主子式,则当 $1\leqslant m\leqslant n-1$, $\alpha\geqslant 1$ 时,有

$$\frac{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|^{\frac{\alpha}{n-m}}}{|\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}|^{\frac{\alpha}{n-m}}}\geqslant\frac{|\boldsymbol{A}|^{\frac{\alpha}{n-m}}}{|\boldsymbol{A}_{11}|^{\frac{\alpha}{n-m}}}+\frac{|\boldsymbol{B}|^{\frac{\alpha}{n-m}}}{|\boldsymbol{B}_{11}|^{\frac{\alpha}{n-m}}}. \tag{5}$$

2 不等式的新证明及推广

本文利用比值法和引理 1—4 给出不等式(1) 和不等式(2) 的新证明.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i,\cdots,\boldsymbol{C}_i\,(i=1,2,3,\cdots,k)$ 是 n 阶正定厄米特矩阵, $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 都是正实数,且 $\alpha+\beta+\cdots+\gamma=p\,(p\geqslant\frac{1}{n})$,则

$$\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}\leqslant\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}. \tag{6}$$

证明 当 $k=1$ 时,显然不等式(6) 成立.下面给出 $k>1$ 时的证明.运用比值法,考虑如下分式:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}}=$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\left(\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}\right)^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right)^{\gamma}\right\}.$$

1) 当 $p\geqslant 1$ 时,因为 $\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}>0$, $\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}>0,\cdots,\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}>0$,所以由引理 3 中 $n=1$ 时的不等式(4),可得

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\left(\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}\right)^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right)^{\gamma}\right\}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{p}\left[\alpha\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}+\beta\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}+\cdots+\gamma\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right]\right\}^{p}.$$

再由引理 1 的 2),得

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{p}\left[\alpha\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}+\beta\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}+\cdots+\gamma\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right]\right\}^{p}\leqslant$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p}\left[\alpha\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}+\beta\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}+\cdots+\gamma\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right]\right\}^{p}=$$

$$\left\{\frac{1}{p}\left[\alpha\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}+\beta\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}+\cdots+\gamma\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right]\right\}^{p}.$$

再根据引理 2,得 $\dfrac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}<1$, $\dfrac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}<1$, $\cdots$, $\dfrac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}<1$,于是有

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}}<\left\{\frac{1}{p}(\alpha+\beta+\cdots+\gamma)\right\}^{p}=1,$$

故 $\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}<\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}$.

2) 当 $\frac{1}{n}\leqslant p<1$ 时,由引理 3 中的式(4),可得

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\left(\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}\right)^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right)^{\gamma}\right\}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{p}\left[\alpha\left(\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\beta\left(\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\cdots\cdot\gamma\left(\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right\}^{np}.$$

因为 $p\geqslant\frac{1}{n}$,所以 $np\geqslant1$,由引理 1 中的 2),得

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{p}\left[\alpha\left(\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}+\beta\left(\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}+\cdots+\gamma\left(\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right\}^{np}\leqslant$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p}\left[\alpha\left(\frac{|\boldsymbol{A}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}+\beta\left(\frac{|\boldsymbol{B}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}+\cdots+\gamma\left(\frac{|\boldsymbol{C}_i|}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\right\}^{np}=$$

$$\left\{\frac{1}{p}\left[\alpha\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\frac{1}{n}}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\frac{1}{n}}}+\beta\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{B}_i|^{\frac{1}{n}}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\frac{1}{n}}}+\cdots+\gamma\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{C}_i|^{\frac{1}{n}}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\frac{1}{n}}}\right]\right\}^{np}.$$

再据引理 2,得

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}}{\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}}<\left\{\frac{1}{p}(\alpha+\beta+\cdots+\gamma)\right\}^{np}=1,$$

即 $\sum_{i=1}^{k}|\boldsymbol{A}_i|^{\alpha}\cdot|\boldsymbol{B}_i|^{\beta}\cdot\cdots\cdot|\boldsymbol{C}_i|^{\gamma}<\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\right|^{\alpha}\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{B}_i\right|^{\beta}\cdot\cdots\cdot\left|\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{C}_i\right|^{\gamma}$,从而式(6)得证.

(下转第 **241** 页)

从图 1 和表 1 可知，在榛花的挥发性成分中共检测出 130 种成分，并从中鉴定出 70 个化合物，这些化合物占总挥发性成分含量的 95.94%，其中主要包括长链烷烃、长链烷酸、长链醇以及长链烷酸酯等成分. 在这些化合物中，亚油酸甲酯、十六烷酸、9，12 -十八碳二烯酸、9，12，15 -十八碳三烯酸乙酯、十六烷酸甲酯、正四十烷、二十四烷醇、2 -己基- 1 -癸醇的含量均高于 5%，其中亚油酸甲酯的含量最高，为11.49%.

3　结论

本文利用气流吹扫微萃取和气相色谱-质谱联用技术，从榛花挥发性成分中检测得到了 70 个化合物，其中 53 种榛花挥发性成分为首次报道，包括 9，12 -十八碳二烯酸（9.75%）、十六烷酸甲酯（7.37%）、正四十烷（6.02%）、山嵛醇（4.25%）、二十六烷醇（2.31%）和 1 -十九烯（1.01%）等，由此说明本文方法比石油醚回流提取和硅胶柱层析法更具有优越性. 本文的研究结果补充了榛花化学成分的相关研究，并为后续研究奠定了基础.

参考文献：

[1]　严仲铠，李万林. 中国长白山药用植物彩色图志[M]. 北京：人民卫生出版社，1997：117.

[2]　薛健飞，杨丽，李平亚，等. 榛子叶中脂溶性成分的 GC-MS 分析[J]. 特产研究，2008，30(1)：58-59.

[3]　关紫烽，姜波，王英坡，等. 榛子脂肪酸组成的比较研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，2003，26(3)：284-285.

[4]　李东浩，方英玉. 气相色谱-质谱法测定榛子中脂肪酸[J]. 延边大学医学学报，1997，20(1)：18-20.

[5]　白玉华，孙颖，于春月，等. 榛花挥发油的化学成分[J]. 药学与临床研究，2010，18(3)：265-266.

[6]　杨翠，何苗，张美花，等. 利用气流吹扫微注射器萃取技术分析植物释放挥发性物质的昼夜节律[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2011，37(2)：119-123.

[7]　杨翠，张永峰，任春燕，等. 气流式吹扫液相微萃取[J]. 延边大学学报(自然科学版)，2011，37(2)：111-114.

[8]　刘爽，杨绍群，梁刚，等. 气流吹扫微注射器萃取技术与 GC-MS 法联用分析关苍术根茎和块根中的挥发性成分[J]. 延边大学医学学报，2012，35(1)：27-30.

(上接第 197 页)

定理 2　设 $\boldsymbol{A}^{(i)},\boldsymbol{B}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{C}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 都是 n 阶正定厄米特矩阵，$\boldsymbol{A}_{11}^{(i)},\boldsymbol{B}_{11}^{(i)},\cdots,\boldsymbol{C}_{11}^{(i)}$ 为其相应的 m 阶顺序主子阵，$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 都是正数，且 $\alpha+\beta+\cdots+\gamma=p$ $(p\geqslant\frac{1}{n})$，则式(2) 成立.

证明　利用引理 4 及定理 1 的证明方法，易证式(2).

参考文献：

[1]　任芳国，冯考周. 浅谈厄米特矩阵的学习[J]. 陕西师范大学继续教育学报，2004，21(3)：102-106.

[2]　刘兴祥，黄美愿. 正定厄米特矩阵的性质[J]. 西安民族大学学报(自然科学版)，2010，36(1)：16-20.

[3]　钱珑，袁江. 正定矩阵的性质探讨[J]. 科教导刊，2014，28(6)：112-113.

[4]　郝稚传. 关于厄米特矩阵的一个不等式[J]. 数学的实践与认识，1985(4)：59-61.

[5]　王淑贵. 关于正定厄米特矩阵的一个定理[J]. 数学的实践与认识，2001，31(3)：369-373.

[6]　王淑贵. 关于正定厄米特矩阵的一个定理的推广[J]. 石河子大学学报(自然科学版)，2004，22(6)：539-541.

[7]　于江明，谢清明. 关于正定厄米特矩阵一个不等式的推广[J]. 数学的实践与认识，2003，33(7)：151-154.

[8]　胡讷. 从实数不等式到矩阵不等式的演变[J]. 巢湖学院院报，2016，18(6)：11-14.

[9]　刘静，李瑞娟. 一些数值不等式的矩阵形式推广[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(6)：5-8.

[10]　余剑春，骆洪才. 一个矩阵不等式的推广[J]. 湘南学院学报，2007，28(2)：24-26.