文章编号： 1004-4353(2017)03-0189-06

具反馈控制和 Holling-III 类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统研究

陈江彬
（福州大学至诚学院，福建 福州 350002）

摘要： 利用微分方程比较原理和构造适当的 Lyapunov 函数研究具反馈控制和 Holling-III 类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统，得到了保证系统永久持续生存和全局吸引的充分性条件，所得的结果补充了文献[6]的工作.

关键词： 反馈控制；Holling-III；修正 Leslie-Gower；全局吸引性
中图分类号： O175.14　　**文献标识码：** A

Dynamics of a modified Leslie-Gower predator-prey system with Holling-type III response function and feedback controls

CHEN Jiangbin
(*Zhicheng College*, *Fuzhou University*, *Fuzhou* 350002, *China*)

Abstract: A modified Leslie-Gower predator-prey system with Holling-type III response function and feedback controls is investigated by applying the comparison theorem of differential equation and constructing a suitable Lyapunov function, and sufficient conditions for the permanence, global attractivity of the system are obtained. The results supplement the literature [6].

Keywords: feedback controls; Holling-III; modified Leslie-Gower; global attractivity

0 引言

对定义在$[0, +\infty)$上的任一有界连续函数 $f(t)$，本文恒设：

$$f^{\mathrm{L}} = \inf_{t\in[0,+\infty)} f(t),\ f^{\mathrm{U}} = \sup_{t\in[0,+\infty)} f(t).$$

2003 年，Aziz-Alaoui 等[1]提出并研究了如下具有 Holling II 类功能性反应的修正 Leslie-Gower 捕食食饵系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(r_1 - b_1 x - \dfrac{a_1 y}{x + k_1}\right), \\ \dot{y} = y\left(r_2 - \dfrac{a_2 y}{x + k_2}\right), \end{cases} \tag{1}$$

得到了该系统的有界性和正平衡点的全局稳定性；2012 年，Yu Shengbin[2]利用振动性引理和 Lyapunov函数法给出了两个保证系统(1)正平衡点全局稳定的充分性条件，补充了文献[1]的结果. 2011 年，Zhu Yanling 等[3]讨论了该类非自治周期系统的周期解的存在性和全局稳定性. 2014 年，

收稿日期： 2017－07－25　　**基金项目：** 福建省高等学校新世纪优秀人才支持计划项目(2017)
作者简介： 陈江彬(1979—)，男，副教授，研究方向为微分方程和生物数学.

Yu Shengbin[4]进一步探讨了 Beddington-DeAngelis 功能性反应下的系统(1)的稳定性. 2014 年,Yu Shengbin 等[5]提出并分析了系统(1)在捕食者干扰效应下的非自治系统的概周期解的存在唯一性. 2013 年,朱艳玲[6]提出并研究了系统(1)在 Holling III 类功能性反应作用下的永久持续生存及周期正解的存在性问题,但是朱艳玲并未对该系统的稳定性进行探讨. 众所周知,稳定性是生态系统研究中的一个重要课题,对物种或者自然资源的保护和开发等起着关键作用,因此非常有必要对系统的稳定性进行探讨. 另外,由于自然界会受到人类活动因素的影响[7-10],因此一个合理的模型必须考虑到系统能够承受住人类活动的干扰,即能够承受反馈控制变量的影响. 基于此,本文在文献[6]的基础上提出如下具反馈控制和 Holling-III 类功能反应的修正 Leslie-Gower 捕食系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)\left[r_1(t)-b(t)x(t)-\dfrac{a_1(t)x(t)y(t)}{x^2(t)+k_1(t)}-c_1(t)u(t)\right],\\ \dot{y}(t)=y(t)\left[r_2(t)-\dfrac{a_2(t)y(t)}{x(t)+k_2(t)}-c_2(t)v(t)\right],\\ \dot{u}(t)=-e_1(t)u(t)+d_1(t)x(t),\\ \dot{v}(t)=-e_2(t)v(t)+d_2(t)y(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示种群 x 和 y 在 t 时刻的密度,$u(t)$ 和 $v(t)$ 为反馈控制变量,其他各系数的生物学含义见文献[1-6] 及其所引文献. 本文的目的旨在通过适当的分析手法,得到保证系统(2) 永久持续生存和全局吸引的充分性条件. 基于生态学含义,本文恒设系统(2) 的各系数 $r_i(t)$,$a_i(t)$,$c_i(t)$,$e_i(t)$,$d_i(t)(i=1,2)$ 和 $b(t)$ 均为$[0,+\infty)$ 上的有正上下界的连续函数,且系统(2) 满足初始条件:$x(0)>0$,$y(0)>0$,$u(0)>0$,$v(0)>0$. 与文献[10] 类似,可知对于任意的 $t\geqslant 0$ 都有 $x(t)>0$,$y(t)>0$,$u(t)>0$,$v(t)>0$.

1 持久性

为了叙述和后续证明的方便起见,首先给出若干已知的结果:

引理 1[10] 设 $a>0$,$b>0$,当 $t\geqslant 0$ 且 $x(0)>0$ 时,若有 $\dot{x}\geqslant x(b-ax)$,则有 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\geqslant\dfrac{b}{a}$. 设 $a>0$,$b>0$,当 $t\geqslant 0$ 且 $x(0)>0$ 时,若有 $\dot{x}\leqslant x(b-ax)$,则有 $\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\leqslant\dfrac{b}{a}$.

引理 2[10] 设 $a>0$,$b>0$,当 $t\geqslant 0$ 且 $x(0)>0$ 时,若有 $\dot{x}\geqslant b-ax$,则有 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\geqslant\dfrac{b}{a}$. 设 $a>0$,$b>0$,当 $t\geqslant 0$ 且 $x(0)>0$ 时,若有 $\dot{x}\leqslant b-ax$,则有 $\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\leqslant\dfrac{b}{a}$.

引理 3 设$(x(t),y(t),u(t),v(t))^{\mathrm{T}}$ 为系统(2) 的任一正解,则有:

$$\limsup_{t\to+\infty}x(t)\leqslant\frac{r_1^{\mathrm{U}}}{b^{\mathrm{L}}}\triangleq M_1,\ \limsup_{t\to+\infty}y(t)\leqslant\frac{r_2^{\mathrm{U}}(M_1+k_2^{\mathrm{U}})}{a_2^{\mathrm{L}}}\triangleq M_2,$$

$$\limsup_{t\to+\infty}u(t)\leqslant\frac{d_1^{\mathrm{U}}M_1}{e_1^{\mathrm{L}}}\triangleq W_1,\ \limsup_{t\to+\infty}v(t)\leqslant\frac{d_2^{\mathrm{U}}M_2}{e_2^{\mathrm{L}}}\triangleq W_2.$$

证明 由系统(2) 的第 1 个方程,可得 $\dot{x}(t)\leqslant x(t)[r_1(t)-b(t)x(t)]\leqslant x(t)[r_1^{\mathrm{U}}-b^{\mathrm{L}}x(t)]$. 由引理 1 可知,$\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\leqslant\dfrac{r_1^{\mathrm{U}}}{b^{\mathrm{L}}}\triangleq M_1$. 从而对 $\forall\varepsilon_1>0$,$\exists T_1>0$ 使得对 $\forall t>T_1$ 有

$$x(t)\leqslant M_1+\varepsilon_1.\tag{3}$$

由式(3)、系统(2) 的第 2 个方程和第 3 个方程可知,当 $t>T_1$ 时,有

$$\begin{cases}\dot{y}(t)\leqslant y(t)\left[r_2(t)-\dfrac{a_2(t)y(t)}{x(t)+k_2(t)}\right]\leqslant y(t)\left[r_2^{\mathrm{U}}-\dfrac{a_2^{\mathrm{L}}y(t)}{M_1+\varepsilon_1+k_2^{\mathrm{U}}}\right],\\ \dot{u}(t)\leqslant-e_1(t)u(t)+d_1(t)(M_1+\varepsilon_1)\leqslant-e_1^{\mathrm{L}}u(t)+d_1^{\mathrm{U}}(M_1+\varepsilon_1).\end{cases}\tag{4}$$

对式(4)，令 $\varepsilon_1 \to 0$，由引理 1 和引理 2 分别得

$$\limsup_{t\to+\infty} y(t) \leqslant \frac{r_2^{\mathrm{U}}(M_1+k_2^{\mathrm{U}})}{a_2^{\mathrm{L}}} \triangleq M_2,\quad \limsup_{t\to+\infty} u(t) \leqslant \frac{d_1^{\mathrm{U}} M_1}{e_1^{\mathrm{L}}} \triangleq W_1,$$

即 $\exists\, T_2 > T_1$ 使得对 $\forall\, t > T_2$ 有

$$y(t) \leqslant M_2 + \varepsilon,\ u(t) \leqslant W_1 + \varepsilon. \tag{5}$$

由式(5)和系统(2)的第 4 个方程，同理可得 $\limsup\limits_{t\to+\infty} v(t) \leqslant \dfrac{d_2^{\mathrm{U}} M_2}{e_2^{\mathrm{L}}} \triangleq W_2$. 证毕.

引理 4　若 $r_1^{\mathrm{L}} > c_1^M W_1$ 且 $r_2^{\mathrm{L}} > c_2^M W_2$，则存在正常数 m_i 和 $w_i (i=1,2)$，使得对系统(2)的任一正解 $(x(t),y(t),u(t),v(t))^{\mathrm{T}}$ 有：

$$\liminf_{t\to+\infty} x(t) \geqslant \frac{k_1^{\mathrm{L}}(r_1^{\mathrm{L}} - c_1^{\mathrm{U}} W_1)}{b^{\mathrm{U}} k_1^{\mathrm{L}} + a_1^{\mathrm{U}} M_2} \triangleq m_1,\quad \liminf_{t\to+\infty} y(t) \geqslant \frac{k_2^{\mathrm{L}}(r_2^{\mathrm{L}} - c_2^{\mathrm{U}} W_2)}{a_2^{\mathrm{U}}} \triangleq m_2,$$

$$\liminf_{t\to+\infty} u(t) \geqslant \frac{d_1^{\mathrm{L}} m_1}{e_1^{\mathrm{U}}} \triangleq w_1,\quad \liminf_{t\to+\infty} v(t) \geqslant \frac{d_2^{\mathrm{L}} m_2}{e_2^{\mathrm{U}}} \triangleq w_2,$$

这里 M_2 和 $W_i (i=1,2)$ 如引理 3 所定义.

证明　由条件 $r_1^{\mathrm{L}} > c_1^M W_1$ 和 $r_2^{\mathrm{L}} > c_2^M W_2$，可取足够小的 $\varepsilon_2 > 0$，使得

$$r_1^{\mathrm{L}} > c_1^{\mathrm{U}}(W_1+\varepsilon_2),\ r_2^{\mathrm{L}} > c_2^{\mathrm{U}}(W_2+\varepsilon_2). \tag{6}$$

对上述 ε_2，由引理 3 可知，$\exists\, T_3 > 0$ 使得对 $\forall\, t > T_3$ 有

$$x(t) \leqslant M_1+\varepsilon_2,\ y(t) \leqslant M_2+\varepsilon_2,\ u(t) \leqslant W_1+\varepsilon_2,\ v(t) \leqslant W_2+\varepsilon_2. \tag{7}$$

由式(7)、系统(2)的第 1 个和第 2 个方程可知，当 $t > T_3$ 时，有

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \geqslant x(t)\left[r_1^{\mathrm{L}} - b^{\mathrm{U}} x(t) - \dfrac{a_1^{\mathrm{U}} x(t)(M_2+\varepsilon_2)}{k_1^{\mathrm{L}}} - c_1^{\mathrm{U}}(W_1+\varepsilon_2)\right], \\ \dot{y}(t) \geqslant y(t)\left[r_2^{\mathrm{L}} - \dfrac{a_2^{\mathrm{U}} y(t)}{k_2^{\mathrm{L}}} - c_2^{\mathrm{U}}(W_2+\varepsilon_2)\right]. \end{cases} \tag{8}$$

对式(8)，令 $\varepsilon_2 \to 0$，由式(6)和引理 1 分别得

$$\liminf_{t\to+\infty} x(t) \geqslant \frac{k_1^{\mathrm{L}}(r_1^{\mathrm{L}} - c_1^{\mathrm{U}} W_1)}{b^{\mathrm{U}} k_1^{\mathrm{L}} + a_1^{\mathrm{U}} M_2} \triangleq m_1,\quad \liminf_{t\to+\infty} y(t) \geqslant \frac{k_2^{\mathrm{L}}(r_2^{\mathrm{L}} - c_2^{\mathrm{U}} W_2)}{a_2^{\mathrm{U}}} \triangleq m_2.$$

从而对 $\forall\, \varepsilon_3 < \varepsilon_2$，$\exists\, T_4 > T_3$ 使得对 $\forall\, t > T_4$ 有

$$x(t) \geqslant m_1 - \varepsilon_3,\ y(t) \geqslant m_2 - \varepsilon_3. \tag{9}$$

由式(9)和系统(2)的第 3 个和第 4 个方程可得，当 $t > T_4$ 时，有

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \geqslant -e_1^{\mathrm{U}} u(t) + d_1^{\mathrm{L}}(m_1 - \varepsilon_3), \\ \dot{v}(t) \geqslant -e_2^{\mathrm{U}} v(t) + d_2^{\mathrm{L}}(m_2 - \varepsilon_3). \end{cases}$$

对上式令 $\varepsilon_3 \to 0$，由引理 2 分别得 $\liminf\limits_{t\to+\infty} u(t) \geqslant \dfrac{d_1^{\mathrm{L}} m_1}{e_1^{\mathrm{U}}} \triangleq w_1$，$\liminf\limits_{t\to+\infty} v(t) \geqslant \dfrac{d_2^{\mathrm{L}} m_2}{e_2^{\mathrm{U}}} \triangleq w_2$. 证毕.

由引理 3 和引理 4 可得如下定理：

定理 1　若 $r_1^{\mathrm{L}} > c_1^M W_1$ 且 $r_2^{\mathrm{L}} > c_2^M W_2$，则系统(2)是永久持续生存的.

2　全局吸引性

定理 2　设定理 1 的条件成立，进一步假设存在常数 $p_i > 0 (i=1,2,3,4)$ 使

$$\liminf_{t\to+\infty} \{A_j(t), B_j(t)\} > 0\ (j=1,2) \tag{10}$$

成立，其中

$$A_1(t) = p_1 b(t) - \frac{p_1 a_1(t) M_1^2 M_2}{[m_1^2 + k_1(t)]\,[m_2^2 + k_1(t)]} + \frac{p_1 a_1(t) k_1(t) m_2}{[M_1^2 + k_1(t)]\,[M_2^2 + k_1(t)]} -$$

$$\frac{p_2a_2(t)M_2}{[m_1+k_2(t)]\,[m_2+k_2(t)]}-p_3d_1(t),$$

$$A_2(t)=\frac{p_2a_2(t)}{M_1+k_2(t)}-\frac{p_1a_1(t)M_1}{m_1^2+k_1(t)}-p_4d_2(t),$$

$$B_1(t)=p_3e_1(t)-p_1c_1(t),\ B_2(t)=p_4e_2(t)-p_2c_2(t),$$

则系统(2)是全局吸引的,即对系统(2)的任意两个正解$(x_i(t),y_i(t),u_i(t),v_i(t))^{\mathrm{T}}(i=1,2)$,有

$$\lim_{t\to+\infty}|x_1(t)-x_2(t)|=\lim_{t\to+\infty}|y_1(t)-y_2(t)|=\lim_{t\to+\infty}|u_1(t)-u_2(t)|=\lim_{t\to+\infty}|v_1(t)-v_2(t)|=0.$$

证明 由条件(10)和定理1知,对$\forall\varepsilon>0$,存在正常数α和足够大的$T_5>0$,使得对$\forall t>T_5$有:

$$m_1-\varepsilon\leqslant x_i(t)\leqslant M_1+\varepsilon,\ m_2-\varepsilon\leqslant y_i(t)\leqslant M_2+\varepsilon,\ A_i(t,\varepsilon)\geqslant\alpha,$$
$$w_1-\varepsilon\leqslant u_i(t)\leqslant W_1+\varepsilon,\ w_2-\varepsilon\leqslant v_i(t)\leqslant W_2+\varepsilon,\ B_i(t)\geqslant\alpha,\tag{11}$$

其中

$$A_1(t,\varepsilon)=p_1b(t)-\frac{p_1a_1(t)(M_1+\varepsilon)^2(M_2+\varepsilon)}{[(m_1-\varepsilon)^2+k_1(t)]\,[(m_2-\varepsilon)^2+k_1(t)]}+$$
$$\frac{p_1a_1(t)k_1(t)(m_2-\varepsilon)}{[(M_1-\varepsilon)^2+k_1(t)]\,[(M_2-\varepsilon)^2+k_1(t)]}-\frac{p_2a_2(t)(M_2+\varepsilon)}{[m_1-\varepsilon+k_2(t)]\,[m_2-\varepsilon+k_2(t)]}-p_3d_1(t),$$

$$A_2(t,\varepsilon)=\frac{p_2a_2(t)}{M_1+\varepsilon+k_2(t)}-\frac{p_1a_1(t)(M_1+\varepsilon)}{(m_1-\varepsilon)^2+k_1(t)}-p_4d_2(t).$$

定义$V_1(t)=|\ln x_1(t)-\ln x_2(t)|$,$V_2(t)=|\ln y_1(t)-\ln y_2(t)|$,$V_3(t)=|u_1(t)-u_2(t)|$,$V_4(t)=|v_1(t)-v_2(t)|$.当$t>T_5$时,分别计算$V_i(t)(i=1,2,3,4)$沿着系统(2)的正解的右上导数,再结合式(11)得

$$D^+V_1(t)=\operatorname{sgn}(x_1(t)-x_2(t))\left(\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}-\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}\right)=\operatorname{sgn}(x_1(t)-x_2(t))\cdot$$
$$\left[-b(t)(x_1(t)-x_2(t))-a_1(t)\left(\frac{x_1(t)y_1(t)}{x_1^2(t)+k_1(t)}-\frac{x_2(t)y_2(t)}{x_2^2(t)+k_1(t)}\right)-c_1(t)(u_1(t)-u_2(t))\right].$$

因为

$$\frac{x_1(t)y_1(t)}{x_1^2(t)+k_1(t)}-\frac{x_2(t)y_2(t)}{x_2^2(t)+k_1(t)}=$$
$$\frac{x_1(t)x_2^2(t)y_1(t)+k_1(t)x_1(t)y_1(t)-x_1^2(t)x_2(t)y_2(t)-k_1(t)x_2(t)y_2(t)}{[x_1^2(t)+k_1(t)]\,[x_2^2(t)+k_1(t)]},$$

其中

$$x_1(t)x_2^2(t)y_1(t)+k_1(t)x_1(t)y_1(t)-x_1^2(t)x_2(t)y_2(t)-k_1(t)x_2(t)y_2(t)=$$
$$x_1(t)x_2(t)\,[x_2(t)y_1(t)-x_1(t)y_2(t)]+k_1(t)\,[x_1(t)y_1(t)-x_2(t)y_2(t)]=$$
$$x_1(t)x_2^2(t)\,[y_1(t)-y_2(t)]-x_1(t)x_2(t)y_2(t)\,[x_1(t)-x_2(t)]+$$
$$k_1(t)x_1(t)\,[y_1(t)-y_2(t)]+k_1(t)y_2(t)\,[x_1(t)-x_2(t)]=$$
$$x_1(t)\,[x_2^2(t)+k_1(t)]\,[y_1(t)-y_2(t)]-x_1(t)x_2(t)y_2(t)\,[x_1(t)-x_2(t)]+$$
$$k_1(t)y_2(t)\,[x_1(t)-x_2(t)].$$

故

$$D^+V_1(t)\leqslant-b(t)|x_1(t)-x_2(t)|+c_1(t)|u_1(t)-u_2(t)|+$$
$$\frac{a_1(t)x_1(t)\,[x_2^2(t)+k_1(t)]\,|y_1(t)-y_2(t)|}{[x_1^2(t)+k_1(t)]\,[x_2^2(t)+k_1(t)]}+\frac{a_1(t)x_1(t)x_2(t)y_2(t)\,|x_1(t)-x_2(t)|}{[x_1^2(t)+k_1(t)]\,[x_2^2(t)+k_1(t)]}-$$
$$\frac{a_1(t)k_1(t)y_2(t)\,|x_1(t)-x_2(t)|}{[x_1^2(t)+k_1(t)]\,[x_2^2(t)+k_1(t)]}\leqslant-\left\{b(t)-\frac{a_1(t)(M_1+\varepsilon)^2(M_2+\varepsilon)}{[(m_1-\varepsilon)^2+k_1(t)]\,[(m_2-\varepsilon)^2+k_1(t)]}+\right.$$
$$\left.\frac{a_1(t)k_1(t)(m_2-\varepsilon)}{[(M_1-\varepsilon)^2+k_1(t)]\,[(M_2-\varepsilon)^2+k_1(t)]}\right\}|x_1(t)-x_2(t)|+$$

$$\frac{a_1(t)(M_1+\varepsilon)}{(m_1-\varepsilon)^2+k_1(t)}|y_1(t)-y_2(t)|+c_1(t)|u_1(t)-u_2(t)|. \tag{12}$$

$$D^+V_2(t)=\operatorname{sgn}(y_1(t)-y_2(t))\left(\frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)}-\frac{\dot{y}_2(t)}{y_2(t)}\right)=$$

$$\operatorname{sgn}(y_1(t)-y_2(t))\left[-a_2(t)\left(\frac{y_1(t)}{x_1(t)+k_2(t)}-\frac{y_2(t)}{x_2(t)+k_2(t)}\right)-c_2(t)(v_1(t)-v_2(t))\right].$$

由

$$\frac{y_1(t)}{x_1(t)+k_2(t)}-\frac{y_2(t)}{x_2(t)+k_2(t)}=\frac{x_2(t)y_1(t)+k_2(t)y_1(t)-x_1(t)y_2(t)-k_2(t)y_2(t)}{[x_1(t)+k_2(t)]\,[x_2(t)+k_2(t)]}=$$

$$\frac{x_2(t)\,[y_1(t)-y_2(t)]-y_2(t)\,[x_1(t)-x_2(t)]+k_2(t)\,[y_1(t)-y_2(t)]}{[x_1(t)+k_2(t)]\,[x_2(t)+k_2(t)]}=$$

$$\frac{[x_2(t)+k_2(t)]\,[y_1(t)-y_2(t)]-y_2(t)\,[x_1(t)-x_2(t)]}{[x_1(t)+k_2(t)]\,[x_2(t)+k_2(t)]},$$

可知：

$$D^+V_2(t)=-\frac{a_2(t)|y_1(t)-y_2(t)|}{x_1(t)+k_2(t)}+\frac{a_2(t)y_2(t)|x_1(t)-x_2(t)|}{[x_1(t)+k_2(t)]\,[x_2(t)+k_2(t)]}+$$

$$c_2(t)|v_1(t)-v_2(t)|\leqslant-\frac{a_2(t)|y_1(t)-y_2(t)|}{M_1+\varepsilon+k_2(t)}+\frac{a_2(t)(M_2+\varepsilon)|x_1(t)-x_2(t)|}{[m_1-\varepsilon+k_2(t)]\,[m_2-\varepsilon+k_2(t)]}+$$

$$c_2(t)|v_1(t)-v_2(t)|, \tag{13}$$

$$D^+V_3(t)=\operatorname{sgn}(u_1(t)-u_2(t))\,[\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)]=$$

$$\operatorname{sgn}(u_1(t)-u_2(t))\{-e_1(t)\,[u_1(t)-u_2(t)]+d_1(t)\,[x_1(t)-x_2(t)]\}\leqslant$$

$$-e_1(t)|u_1(t)-u_2(t)|+d_1(t)|x_1(t)-x_2(t)|, \tag{14}$$

$$D^+V_4(t)=\operatorname{sgn}(v_1(t)-v_2(t))\,[\dot{v}_1(t)-\dot{v}_2(t)]=$$

$$\operatorname{sgn}(v_1(t)-v_2(t))\{-e_2(t)\,[v_1(t)-v_2(t)]+d_2(t)\,[y_1(t)-y_2(t)]\}\leqslant$$

$$-e_2(t)|v_1(t)-v_2(t)|+d_2(t)|y_1(t)-y_2(t)|. \tag{15}$$

定义 Lyapunov 函数 $V(t)=\sum_{i=1}^{4}p_iV_i(t)$，则当 $t>T_5$ 时，由式(12)—(15) 及式(11) 可得

$$D^+V(t)\leqslant-A_1(t,\varepsilon)|x_1(t)-x_2(t)|-A_2(t,\varepsilon)|y_1(t)-y_2(t)|-$$

$$B_1(t)|u_1(t)-u_2(t)|-B_2(t)|v_1(t)-v_2(t)|\leqslant$$

$$-\alpha\,[|x_1(t)-x_2(t)|+|y_1(t)-y_2(t)|+|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|].$$

取 $T^*>T_5$，对上式从 T^* 到 t 积分得

$$V(t)+\alpha\int_{T^*}^{t}[|x_1(s)-x_2(s)|+|y_1(s)-y_2(s)|+|u_1(s)-u_2(s)|+$$

$$|v_1(s)-v_2(s)|]\mathrm{d}s\leqslant V(T^*)<+\infty,$$

因此，$\int_{T^*}^{t}[|x_1(s)-x_2(s)|+|y_1(s)-y_2(s)|+|u_1(s)-u_2(s)|+|v_1(s)-v_2(s)|]<\dfrac{V(T^*)}{\alpha}<+\infty$.

从而有 $|x_1(t)-y_1(t)|+|x_2(t)-y_2(t)|+|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|\in L^1([T^*,+\infty))$.

由引理 3 可知，$x_i(t),y_i(t),u_i(t)$ 和 $v_i(t)(i=1,2)$ 及其导数在 $[T^*,+\infty)$ 上有界，从而知 $|x_1(t)-x_2(t)|+|y_1(t)-y_2(t)|+|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|$ 在 $[T^*,+\infty)$ 上一致连续. 再由 Barbalat 引理[11] 得

$$\lim_{t\to+\infty}[|x_1(t)-x_2(t)|+|y_1(t)-y_2(t)|+|u_1(t)-u_2(t)|+|v_1(t)-v_2(t)|]=0,$$

即 $\lim\limits_{t\to+\infty}|x_1(t)-x_2(t)|=\lim\limits_{t\to+\infty}|y_1(t)-y_2(t)|=\lim\limits_{t\to+\infty}|u_1(t)-u_2(t)|=\lim\limits_{t\to+\infty}|v_1(t)-v_2(t)|=0$，故系统 (2) 是全局吸引的. 证毕.

在没有反馈控制变量作用且 $k_i(t)(i=1,2)$ 为常数的情形下，系统(2) 转化为如下朱艳玲[6] 所讨论的系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)\left[r_1(t)-b(t)x(t)-\dfrac{a_1(t)x(t)y(t)}{x^2(t)+k_1}\right],\\ \dot{y}(t)=y(t)\left[r_2(t)-\dfrac{a_2(t)y(t)}{x(t)+k_2}\right].\end{cases}\tag{16}$$

作为系统(2) 的特例，由定理 1 容易得到如下推论：

推论 1 系统(16) 是永久持续生存的.

由定理 2，还可以进一步得到系统(16) 的稳定性结论：

推论 2 系统(16) 是全局吸引的，假设存在常数 $p_i>0(i=1,2)$ 使 $\liminf\limits_{t\to+\infty}\{C_1(t),C_2(t)\}>0$ 成立，其中：

$$C_1(t)=p_1b(t)-\frac{p_1a_1(t)M_1^2M_2}{(m_1^2+k_1)(m_2^2+k_1)}+\frac{p_1a_1(t)k_1m_2}{(M_1^2+k_1)(M_2^2+k_1)}\frac{p_2a_2(t)M_2}{(m_1+k_2)(m_2+k_2)},$$

$$C_2(t)=\frac{p_2a_2(t)}{M_1+k_2}-\frac{p_1a_1(t)M_1}{m_1^2+k_1}.$$

注 推论 1 即为文献[6]的定理 1，推论 2 是文献[6]未探讨的系统(16)的稳定性结论，故本文补充了文献[6]的结果.

参考文献：

[1] Aziz Alaoui M A, Daher Okiye M. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. Applied Mathematics Letters, 2003,16(7):1069-1075.

[2] Yu Shengbin. Global asymptotic stability of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012,2012:1-8.

[3] Zhu Yanling, Wang Kai. Existence and global attractivity of positive periodic solutions for a predator-prey model with modified Leslie-Gower Holling-type II schemes[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 384(2):400-408.

[4] Yu Shengbin. Global stability of a modified Leslie-Gower model with Beddington-DeAngelis functional response[J]. Advances in Difference Equations, 2014,84:1-14.

[5] Yu Shengbin, Chen Fengde. Almost periodic solution of a modified Leslie-Gower predator-prey model with Holling-type II schemes and mutual interference[J]. International Journal of Biomathematics, 2014,7(3):1-15.

[6] 朱艳玲. 具有 Leslie-Gower 和 Holling-III 型功能反应的捕食-食饵模型的一致持续生存[J]. 宁夏师范学院学报, 2013,34(3):7-9.

[7] 李忠. 具反馈控制修正 Leslie-Gower 和 Holling-II 功能性反应捕食系统的持久性和全局吸引性[J]. 数学的实践与认识, 2011,41(7):126-130.

[8] Yu Shengbin. Extinction for a discrete competition system with feedback controls[J]. Advances in Difference Equations, 2017,9:1-9.

[9] Chen Jiangbin, Yu Shengbin. Permanence for a discrete ratio-dependent predator-prey system with Holling type III functional response and feedback controls[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013,2013:1-6.

[10] Chen Fengde, Li Zhong, Huang Yunjin. Note on the permanence of a competitive system with infinite delay and feedback controls[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2007,8(2):680-687.

[11] Barbalat I. System d'equations differential d'oscillations nonlinearies[J]. Rev Roumaine Math Pure Appl, 1959,4(2):267-270.