

文章编号: 1004-4353(2017)02-0154-04

基于模糊数对证券投资组合选择模型 有效前沿的动态分析

孙冲¹, 侯为波², 孙敏³

(1. 北京科技大学天津学院 基础部, 天津 301830; 2. 淮北师范大学 数学科学学院, 安徽 淮北 235000;
3. 华北理工大学 经济学院, 河北 唐山 063200)

摘要: 针对金融市场的不确定性, 利用区间数以及 Copula 函数的性质, 建立了在 Copula-CVaR 约束下的投资组合模糊选择模型. 利用几何方法构造了投资选择区间, 从投资者的角度考虑了不同参数下的有效投资策略, 使投资过程更接近于实际情况.

关键词: 区间数; 投资组合; 几何方法

中图分类号: O29; F830.59

文献标识码: A

Dynamic analysis for portfolio selection efficient frontier based on fuzzy number

SUN Chong¹, HOU Weibo², SUN Min³

(1. Tianjin College, University of Science and Technology Beijing, Tianjin 301830, China;

2. School of Mathematical Sciences, Huaibei Normal University, Huaibei 235000, China;

3. School of Economics, North China University of Science and Technology, Tangshan 063200, China)

Abstract: Considering the uncertainty of the financial market, a fuzzy portfolio selection model is established under the Copula-CVaR constraint based on interval number and Copula function. The effective scheme based on the different parameters is considered by the investor. Therefore, the investment process is more closer and flexible to the real condition.

Keywords: interval number; portfolio selection; geometric method

0 引言

1952 年, 美国经济学家、金融学家 Markowitz^[1] 在传统 M-V 模型中首次提出了证券投资组合选择模型的有效边界. 侯为波等^[2] 对传统有效边界进行了优化, 提出了有效边缘动态分析. 在证券投资选择模型中, 方差作为风险测度方法, 是在标准正态分布的前提下进行的研究, 但在金融市场中的分布与标准正态分布存在较大的差异, 因此风险测度方法存在不足. 刘志东等^[3-9] 对传统风险测度进行了研究, 提出相对 CVaR 的风险测度以及 Copula 函数下的 VaR 的 3 种算法. 本文利用 Copula 函数的性质对 CVaR 进行研究, 提出了更贴近市场不确定性分布情况下的风险测度方法. 在传统投资组合选择模型中, 利用期望收益率描述预期收益率, 存在内含主观性的概率的不足. 本文利用模糊数的区间分析法, 处理了主观性所带来的问题, 较好地改进了对预期收益率的测度, 并给出了动态的有效前沿和有效投资区间, 使

投资者可以拥有适合自己的投资策略.

1 基于区间数的相关介绍

区间数是处理不确定性问题的一个有力工具,其定义为: $a = [a^-, a^+] = \{x: a^- \leq x \leq a^+, x \in \mathbf{R}\}$, 其中 a^- 是区间数的下界, a^+ 是区间数的上界^[10]. 假设 n 种资产的收益率向量为 $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_n)$

且 $\hat{\mu}_i = [\mu_i^-, \mu_i^+]$, ω_i 表示第 i 种资产的权重,且 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, 则组合收益的中心值为

$$C_\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\mu_i^- + \mu_i^+] \omega_i.$$

由于方差是偏离中心值的程度,则方差为:

$$\begin{aligned} \delta_\omega &= \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i^- - C_\omega \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i^+ - C_\omega \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i (\mu_i^- - \mu_i^+) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i (\mu_i^- - \mu_i^+) \right]^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i (\mu_i^- - \mu_i^+) \right]^2. \end{aligned}$$

资产 i 与资产 j 的协方差为 $\sigma_{i,j} = (\mu_i^+ - \mu_i^-)(\mu_j^+ - \mu_j^-)$, 协方差阵为 $\mathbf{V} = [\sigma_{i,j}]_{n \times n}$, 在标准正态分布下的 VaR 和 CVaR 分别为

$$\text{VaR}_\alpha(\omega) = \beta_1(\alpha) \delta_\omega - \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i \omega_i,$$

$$\text{CVaR}_\alpha(\omega) = \beta_2(\alpha) \delta_\omega - \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i \omega_i.$$

其中: $\beta_1(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的 α 下侧分位数, $\Phi(x)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数; $\beta_2(\alpha) = \frac{\Psi(\beta_1(\alpha))}{1 - \alpha}$, $\Psi(x)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的概率密度函数.

2 基于区间数的均值-CCVaR 模型

针对分布不能够满足标准正态分布的情况,本文利用 Copula 函数构造多元分布函数,在对边缘分布没有限制的情况下,将非标准的正态分布通过一定的 Copula 函数转化为一个有效的标准正态分布.

Copula 函数是将多个随机变量 y_1, y_2, \dots, y_n 的联合分布函数 $p(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 与它们各自的边缘分布函数 $F_1(y_1), F_2(y_2), \dots, F_n(y_n)$ 连接在一起的函数,即任意给出各个变量的边缘分布函数,存在一个 Copula 函数 $C(\cdot)$, 使得 $p(y_1, y_2, \dots, y_n) = C(F_1(y_1), F_2(y_2), \dots, F_n(y_n))$.

定义 1(Copula-CVaR 风险测度方法) 设 λ 为投资者满意度,则基于 Copula 函数的风险测度方法 CVaR 即 CCVaR 为

$$\text{CCVaR}_\alpha(\omega, \lambda) = \beta'_2(\alpha) \delta_\omega - \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i.$$

其中: $\beta'_1(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ 为 Copula 函数下的标准正态分布 $N(0, 1)$ 的 α 下侧分位数, $\Phi(x)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数; $\beta'_2(\alpha) = \frac{\Psi(\beta'_1(\alpha))}{1 - \alpha}$, $\Psi(x)$ 为 Copula 函数下的标准正态分布 $N(0, 1)$ 的概率密度函数.

假设 λ 为投资者的满意度,则区间数 $\hat{\mu}_i = [\mu_i^-, \mu_i^+]$ 可以转化为清晰数 μ_i , 且 $\mu_i = (1 + \lambda)\mu_i^- + (1 - \lambda)\mu_i^+$. 假设 R_0 为投资者给定的最低收益,向量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 分别表示期望收益率与权重,令 $\mathbf{e}_n = (1, 1, \dots, 1)$ 为单位向量,则有

$$\begin{cases} \min \text{CCVaR}_a(\omega, \lambda) = \beta'_2(\alpha) \delta_\omega - \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i, \\ \mu \omega' = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = R_0, \\ e \omega' = 1. \end{cases}$$

由以上可得到均值-CCVaR 有效边界的曲面方程：

$$\frac{\{[\text{CCVaR}_a(\omega, \lambda) + R_0] \frac{1}{\beta'_2(\alpha)}\}^2}{\frac{1}{C}} - \frac{(R_0 - \frac{A}{C})^2}{\frac{D}{C^2}} = 1.$$

其中 $A = eV^{-1}\mu'$, $B = \mu V^{-1}\mu'$, $C = eV^{-1}e'$, $D = BC - A^2$. 得到的有效前沿以及投资选择区间如图 1 所示.

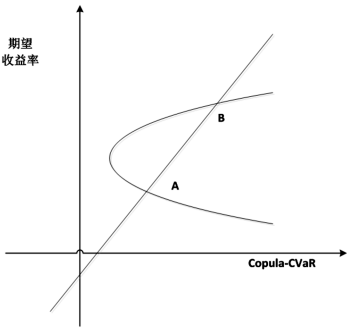


图 1 有效前沿以及投资选择区间

3 模型的几何解法

在给定投资者的满意度 λ 情况下,无论传统的模型或基于区间数的模型,只需求解出 A 和 B 处的权重 ω_A 和 ω_B , 即可得适合个人的最优投资组合策略. 本文利用几何方法求解^[10].

设第 i 种资产的收益率为 μ_i , 则向量 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, 权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, $e_n = (1, 1, \cdots, 1)$, 组合的期望收益率为 $\mu(\omega, \lambda)$, 于是有 $\mu(\omega, \lambda) = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i$, $\delta_\omega^2 = \omega V \omega'$, 其中 V 为协方差阵.

$$\begin{aligned} \mu(\omega, \lambda) &= \omega_1 \mu_1 + \cdots + \omega_{n-1} \mu_{n-1} + (1 - \omega_1 - \cdots - \omega_{n-1}) \mu_n, \\ \delta_\omega^2 &= \omega_1^2 \sigma_{11} + \cdots + (1 - \omega_1 - \cdots - \omega_{n-1})^2 \sigma_{n,n} + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{12} + \cdots + 2\omega_{n-1} (1 - \omega_1 - \cdots - \omega_{n-1}) \sigma_{n-1,n}, \end{aligned}$$

则在点 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1})$ 处的法向量分别为：

$$\begin{aligned} &(\mu_1 - \mu_n, \mu_2 - \mu_n, \cdots, \mu_{n-1} - \mu_n), \\ &((\sigma_{1,1} + \sigma_{n,n} - 2\sigma_{1,n})\omega_1 + \cdots + (\sigma_{1,n-1} + \sigma_{n,n} - \sigma_{1,n} - \sigma_{n-1,n})\omega_{n-1} + \sigma_{1,n} - \sigma_{n,n}, \cdots, (\sigma_{1,n-1} + \sigma_{n,n} - \sigma_{1,n} - \sigma_{n-1,n})\omega_1 + \cdots + (\sigma_{n-1,n-1} \sigma_{n,n} - 2\sigma_{n-1,n})\omega_{n-1} + \sigma_{n-1,n} - \sigma_{n,n}). \end{aligned}$$

设 $P_1 = [1, 0, 0, \cdots, 0, 0, -1]$, $P_2 = [0, 1, 0, \cdots, 0, 0, -1]$, \cdots , $P_{n-1} = [0, 0, \cdots, 0, 1, -1]$,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \tau_{w_1} \\ \vdots \\ \tau_{w_{n-1}} \\ 1 \end{bmatrix},$$

则在点 $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1})$ 处的法向量为 $(P_1 V Q W', P_2 V Q W', \cdots, P_k V Q W', \cdots, P_{n-1} V Q W')$, 临界线为

$$\frac{P_1 V Q W'}{\mu_1 - \mu_n} = \frac{P_2 V Q W'}{\mu_2 - \mu_n} = \cdots = \frac{P_k V Q W'}{\mu_k - \mu_n} = \cdots = \frac{P_{n-1} V Q W'}{\mu_{n-1} - \mu_n}.$$

故可以得到 $n - 2$ 个方程构成的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{1,1} \omega_1 + \cdots + a_{1,n-1} \omega_{n-1} = b_1, \\ a_{2,1} \omega_1 + \cdots + a_{2,n-1} \omega_{n-1} = b_2, \\ \vdots \\ a_{n-2,1} \omega_1 + \cdots + a_{n-2,n-1} \omega_{n-1} = b_{n-2}. \end{cases}$$

由于 $a_{i,j}$, b_i 分别为：

$$\begin{cases} a_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j} + \sigma_{n,n} - \sigma_{i,n} - \sigma_{j,n}}{\mu_i - \mu_n} - \frac{\sigma_{j,n-1} + \sigma_{n,n} - \sigma_{j,n} - \sigma_{n-1,n}}{\mu_{n-1} - \mu_n}, \\ b_i = -\frac{\sigma_{i,n} - \sigma_{n,n}}{\mu_i - \mu_n} + \frac{\sigma_{n-1,n} - \sigma_{n,n}}{\mu_{n-1} - \mu_n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n - 2, \quad j = 1, 2, \cdots, n - 1. \end{cases} \tag{1}$$

又由 $CCVaR_a(\omega, \lambda) = \beta_2'(\alpha)\delta_\omega - \mu(\omega, \lambda)$, 则 $[CCVaR_a(\omega, \lambda) + \mu(\omega, \lambda)]^2 = \beta_2^2(\alpha)\delta_\omega^2$, 又 $\mu(\omega, \lambda) = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i$, $\delta_\omega^2 = \omega V \omega'$, 故有

$$\omega V \omega' = \frac{1}{\beta_2^2(\alpha)} (CCVaR_a^2(\omega, \lambda) + 2CCVaR_a(\omega, \lambda) \omega \mu'(\omega, \lambda) + (\omega \mu'(\omega, \lambda))^2). \tag{2}$$

由于方程组(1)的秩的 $n-1$, 所以基础解系的个数是 1, 即 $\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{n-1}$ 都可以由 ω_1 线性表示. 由于 $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, 则 ω_n 也可以由 ω_1 表示. 将 $\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$ 带入方程(2)可以得到一个关于 ω_1 的一元二次方程(消元法), 由此可求出 ω_1 及 $\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$ 的值. 由于 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 有两组解, 因此可以求出点 A, B 处的投资组合策略以及投资有效区间. 给定 A, B 两点之间的收益偏爱因子 λ' , 则可以得到有效边界上具体的一个投资策略 C 点 $\mu_C(\omega, \lambda, \lambda')$. C 点由 A, B 以及收益偏爱因子 λ' 所确定, 即

$$\mu_C(\omega, \lambda, \lambda') = (1 - \lambda')\mu_A(\omega, \lambda, \lambda') + (1 + \lambda')\mu_B(\omega, \lambda, \lambda').$$

4 结论

本文研究了不确定环境下的证券投资组合选择模型, 利用模糊数的性质对预期收益率的测度以及利用 Copula 函数性质对分布函数进行标准正态分布化. 利用几何方法求解, 构造了投资选择区间, 使得投资者的投资策略更具有柔性.

参考文献:

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952(1):77-91.
[2] 侯为波,徐成贤. 证券组合 M-V 有效边缘动态分析[J]. 系统工程学报,2000,15(1):26-31.
[3] 刘志东. 不同均值-风险准则下的资产组合有效前沿比较研究[J]. 经济数学,2006,23(12):6-35.
[4] 张春梅,陈志平. 基于 CVaR 的相对鲁棒投资组合问题研究[J]. 工程数学学报,2013,30(4):525-534.
[5] 魏法明. 基于随机规划动态投资组合中的情境生成研究[D]. 上海:同济大学,2008.
[6] 马林,刘小茂. 有交易成本的均值-CVaR 有效前沿[J]. 系统工程学报,2008,23(3):362-366.
[7] 徐成贤,薛宏刚. 金融工程-计算技术与方法[M]. 北京:科学出版社,2010.
[8] 柏满迎,孙禄杰. 三种 Copula-VaR 计算方法与传统 VaR 方法的比较[J]. 数量经济技术经济研究,2007(2):154-160.
[9] 刘小茂,李楚霖,王建华. 风险资产组合的均值-CVaR 有效前沿[J]. 管理工程学报,2003(1):29-33.
[10] 杨纶标,高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州:华南理工大学出版社,2005.
[11] 王春峰. 金融市场风险管理[M]. 天津:天津大学出版社,2001:487-492.