

文章编号: 1004-4353(2017)02-0137-07

# 激活控制不同维混沌系统的修正函数投影同步

李德奎

(甘肃中医药大学 理科教学部, 甘肃 定西 743000)

**摘要:** 利用激活控制研究了不同维混沌系统的修正函数投影同步问题. 首先根据错位与非错位两种同步策略, 将不同维混沌系统中维数较高的系统进行降阶; 然后利用激活控制原理, 设计两种同步控制器, 分别实现一个新四维超混沌系统和三维 Lü 系统的错位与非错位修正函数投影同步; 最后对错位与非错位修正函数投影同步进行数值仿真, 仿真结果表明在激活控制原理下设计的控制器不仅有效, 而且驱动系统和受控的响应系统同步到更加复杂的混沌吸引子.

**关键词:** 不同维混沌系统; 错位修正函数投影同步; 激活控制

中图分类号: O322

文献标识码: A

## Active control modified function projection synchronization of different dimensional chaotic systems

LI Dekui

(Department of Science Teaching, Gansu University of Chinese Medicine, Dingxi 743000, China)

**Abstract:** Modified function projection synchronization of different dimensional chaotic systems is studied by using active control in this paper. First of all, according to two synchronization strategies about the no dislocation and dislocation, the higher dimension chaotic system are reduced order in different dimension systems; and then using the active control principle, two synchronization controllers are designed to realize no dislocation and dislocation modified function projective synchronization for a new 4 dimension hyperchaotic system and 3 dimension Lü system respectively; finally, the numerical simulations are done for no dislocation and dislocation modified function projective synchronization, the simulation results show that the designed controller under the active control principle is effective, and drive system and the controlled response system are synchronous to the more complex chaotic attractor.

**Keywords:** different dimension chaotic system; dislocation modified function projection synchronization; active control

1990年, Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>首次提出了混沌系统的同步概念, 混沌同步概念的建立为混沌在保密通信的应用奠定了理论基础. 随后, 混沌同步问题得到许多学者的广泛研究, 完全同步<sup>[2]</sup>、广义同步<sup>[3]</sup>、投影同步<sup>[4]</sup>等混沌同步方式先后被学者提出, 其中投影同步由于其比例特性使得保密通信更加安全, 所以混沌投影同步近年来得到了广泛的研究<sup>[5-7]</sup>. 文献[8-9]研究了混沌系统的广义投影同步, 文献[10-11]中通过自适应控制策略实现了动态网络模型的函数投影同步, 文献[12]研究了不同维混沌系统的函数投影同步问题, 文献[13-15]研究了混沌系统的修正函数投影同步, 该同步方式不仅是其他同步方式的更一般情况, 而且由于其同步方式更加复杂, 使得保密通信的信息更加安全.

收稿日期: 2017-05-22

作者简介: 李德奎(1979—), 男, 副教授, 研究方向为混沌及复杂网络的同步与控制.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161027); 甘肃省自然科学基金资助项目(1610RJZA080)

激活控制是通过设计适当的控制器,将同步误差系统控制成为一个系数矩阵的所有特征值都具有负实部的误差线性系统. 激活控制的同步控制器容易设计,且同步误差能够快速趋向于零,同时激活控制不需要构造误差系统的李雅普洛夫函数. 文献[16]通过激活控制研究了异结构混沌同步,异结构混沌系统是两个维数不同的混沌系统. 不同维混沌系统是两个维数不同的混沌系统,研究问题更加一般化.

非错位同步是驱动系统的状态变量与受控的响应系统的状态变量按顺序配对同步,反之,驱动系统的状态变量与受控的响应系统的状态变量不按顺序配对同步称之为错位同步. 相对于非错位同步,错位同步增大了保密通信的密钥空间,能够使保密通信的信息更加安全,更具有潜在的应用价值.

基于以上讨论,本文利用激活控制实现不同维数混沌系统的错位与非错位修正函数投影同步,在错位与非错位两种方式下,分别设计两种同步控制器,实现不同维混沌系统的修正函数投影同步并进行数值仿真.

## 1 模型的描述及激活控制

驱动系统的动力学方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

式中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$  为系统的状态变量,  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续的非线性向量函数. 受控响应系统的动力学方程为

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = g(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{u}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T \in \mathbf{R}^m$  是响应系统的状态变量,  $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  是连续的非线性向量函数,  $\mathbf{u}$  为实现系统同步输入的控制函数. 当  $n = m$ ,  $f = g$  时,驱动系统和响应系统是相同动力系统;当  $m \neq n$ ,  $f \neq g$  时,驱动系统和响应系统是不同的维数的不同动力系统.

本文通过激活控制实现不同维混沌系统的修正函数投影同步问题,不妨研究  $m < n$  的情况,因为  $m < n$ ,所以需要先将驱动系统(1)分成两部分:

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = f_m(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = f_s(\mathbf{x}), \quad (4)$$

式中  $\mathbf{x}_m \in \mathbf{R}^m$ ,  $f_m: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ ,  $m + s = n$ . 设驱动系统(1)和响应系统(2)之间的修正函数投影同步误差为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t)\mathbf{x}_m(t), \quad (5)$$

式中  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \text{diag}(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t))$ , 且  $\alpha_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$  为不全相同的函数. 当  $t \rightarrow \infty$  时,有  $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ ,由此驱动系统(1)和响应系统(2)实现了修正函数投影同步.

激活控制不同维混沌系统同步问题就是寻找合适的控制函数  $\mathbf{u}$ ,使误差系统满足

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t), \quad (6)$$

其中系数矩阵  $\mathbf{A}$  的所有特征值  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  都具有负实部,则  $\mathbf{e}(t)$  有形如  $e^{\lambda_i t} \mathbf{T}_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$  的指数衰减形式解 ( $\mathbf{T}_i$  为  $\lambda_i$  的特征向量),这表明误差在原点是渐近稳定的,即驱动系统与响应系统实现修正函数投影同步.

文献[17]以经典 Lorenz 系统为基础,利用状态反馈控制方法构造了一个新超混沌系统,其微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = bx_1 - x_1x_3 - x_2 + cx_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \theta x_3, \\ \dot{x}_4 = -kx_1. \end{cases} \quad (7)$$

当系统参数  $a = 10, b = 28, c = 2, \theta = 4, k = 8$  时,系统(7)处于超混沌状态,具有图 1 所示的奇怪吸引子.

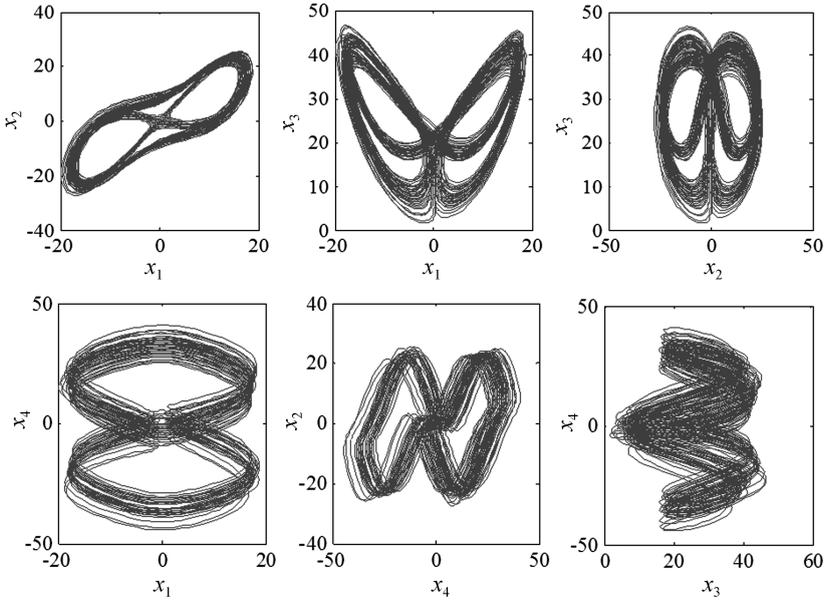


图 1 新超混沌系统的奇怪吸引子

2002 年,陈关荣和吕金虎提出了一个与 Lorenz 系统和 Chen 系统都不拓扑等价的混沌系统,即 Lü 系统<sup>[18]</sup>,该系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = a_1(v_2 - v_1), \\ \dot{v}_2 = -v_1v_3 + b_1v_2, \\ \dot{v}_3 = v_1v_2 - c_1v_3. \end{cases} \quad (8)$$

当参数  $a_1 = 36, b_1 = 20, c_1 = 3$  时,Lü 系统处于混沌状态.受控的 Lü 系统的动力学方程描述为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 + b_1y_2 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - c_1y_3 + u_3. \end{cases} \quad (9)$$

## 2 修正函数投影同步的实现

为了实现三维响应系统(Lü 系统)和四维驱动系统(新超混沌系统)的修正函数投影同步,首先根据式(3),将驱动系统(新超混沌系统)降阶分成两部分.

### 2.1 状态变量的非错位同步

非错位同步是指驱动系统的状态变量  $x_i$  和响应系统的状态变量  $y_i$  对应同步,其中  $i = 1, 2, 3$ . 与非错位同步相对立的错位同步,错位同步是驱动系统和响应系统中的所有状态变量,至少有一对不是按照  $x_i$  对应  $y_i$  同步,也就是说  $x_i$  对应  $y_j$  同步且  $i \neq j$ . 为了研究驱动系统与响应系统的状态变量非错位修正函数投影同步,先将系统(7)分成如下两部分:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = bx_1 - x_1x_3 - x_2 + cx_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \theta x_3; \end{cases} \quad (10)$$

$$\dot{x}_4 = -kx_1. \quad (11)$$

根据误差系统的定义式(5)和驱动系统(7)的分法式(10),驱动系统(7)和响应系统(9)状态变量的非错位同步误差为

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - \alpha_1(t)x_1, \\ e_2 = y_2 - \alpha_2(t)x_2, \\ e_3 = y_3 - \alpha_3(t)x_3. \end{cases} \quad (12)$$

结合式(9)和式(10),得到驱动系统和响应系统的修正函数投影同步误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -a_1 e_1 + a_1 y_2 - \alpha_1(t)ax_2 + \alpha_1(t)(a - a_1)x_1 - \dot{\alpha}_1(t)x_1 + u_1, \\ \dot{e}_2 = b_1 e_2 - y_1 y_3 - b\alpha_2(t)x_1 + \alpha_2(t)x_1 x_3 + (b_1 + 1)\alpha_2(t)x_2 - c\alpha_2(t)x_4 - \dot{\alpha}_2(t)x_2 + u_2, \\ \dot{e}_3 = -c_1 e_3 + y_1 y_2 - \alpha_3(t)x_1 x_2 + (\theta - c_1)\alpha_3(t)x_3 - \dot{\alpha}_3(t)x_3 + u_3. \end{cases} \quad (13)$$

选取激活控制的控制器为

$$\begin{cases} u_1 = -a_1 y_2 + \alpha_1(t)ax_2 - \alpha_1(t)(a - a_1)x_1 + \dot{\alpha}_1(t)x_1 + V_1, \\ u_2 = y_1 y_3 + b\alpha_2(t)x_1 - \alpha_2(t)x_1 x_3 - (b_1 + 1)\alpha_2(t)x_2 + c\alpha_2(t)x_4 + \dot{\alpha}_2(t)x_2 + V_2, \\ u_3 = -y_1 y_2 + \alpha_3(t)x_1 x_2 - (\theta - c_1)\alpha_3(t)x_3 + \dot{\alpha}_3(t)x_3 + V_3, \end{cases} \quad (14)$$

式中  $V_1, V_2, V_3$  为控制输入. 选取控制输入为

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中不妨选取矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 - 1 \end{pmatrix}$ . 这样,在激活控制式(14)和(15)下,误差系统系数

矩阵的特征值为  $-1, -1, -1$ , 因此当  $t \rightarrow \infty$  时, 误差变量  $e_1, e_2, e_3$  均收敛于 0, 从而实现了新超混沌系统(7)和受控 Lü 系统(9)的非错位修正函数投影同步.

## 2.2 状态变量的错位同步

为了研究驱动系统与响应系统的状态变量的错位修正函数投影同步, 先将系统(7)分成如下两部分(系统(7)还有其他一些分法):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - \theta x_3, \\ \dot{x}_4 = -kx_1; \end{cases} \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = bx_1 - x_1 x_3 - x_2 + cx_4. \quad (17)$$

根据误差系统的定义式(5)和式(16),驱动系统(7)和响应系统(9)状态变量的错位修正函数投影同步误差为(当然还有其他搭配方式):

$$\begin{cases} \eta_1 = y_1 - \alpha_1(t)x_1, \\ \eta_2 = y_2 - \alpha_2(t)x_3, \\ \eta_3 = y_3 - \alpha_3(t)x_4. \end{cases} \quad (18)$$

根据式(18),并结合式(9)和式(16),得到驱动响应系统错位修正函数投影同步的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -a_1 \eta_2 + a_1 y_2 - \alpha_1(t)ax_2 + \alpha_1(t)(a - a_1)x_1 - \dot{\alpha}_1(t)x_1 + u_1, \\ \dot{\eta}_2 = b_1 \eta_2 - y_1 y_3 - \alpha_2(t)x_1 x_2 + \alpha_2(t)(b_1 + \theta)x_3 - \dot{\alpha}_2(t)x_3 + u_2, \\ \dot{\eta}_3 = -c_1 \eta_3 + y_1 y_2 - c_1 \alpha_3(t)x_4 + k\alpha_3(t)x_1 - \alpha_3(t)x_4 + u_3. \end{cases} \quad (19)$$

根据激活控制策略,选取控制器为

$$\begin{cases} u_1 = -a_1 y_2 + \alpha_1(t)ax_2 - \alpha_1(t)(a - a_1)x_1 + \dot{\alpha}_1(t)x_1 + W_1, \\ u_2 = y_1 y_3 + \alpha_2(t)x_1 x_2 - \alpha_2(t)(b_1 + \theta)x_3 + \dot{\alpha}_2(t)x_3 + W_2, \\ u_3 = -y_1 y_2 + c_1 \alpha_3(t)x_4 - k\alpha_3(t)x_1 + \dot{\alpha}_3(t)x_4 + W_3, \end{cases} \quad (20)$$

式中  $W_1, W_2, W_3$  为控制输入. 选取控制输入为

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中矩阵  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 - 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 - 0.5 \end{pmatrix}$ . 在激活控制式(20)和(21)下, 误差系统系数矩阵的特征

值为  $-1, -0.8, -0.5$ , 因此当  $t \rightarrow \infty$  时, 误差变量  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  均收敛于 0, 从而新超混沌系统(7)和受控 Lü 系统(9)实现了错位修正函数投影同步.

### 3 数值仿真

利用 MATLAB 软件进行数值仿真, 不妨选取修正函数投影同步的比例函数矩阵  $\alpha(t) = \text{diag}(1 + \sin x, 1 - \cos x, \sin x)$ , 驱动系统(7)和响应系统(9)的初值条件分别为  $[x_1(0); x_2(0); x_3(0); x_4(0)] = [-5.5; 1; -3.1; 1.2]$  和  $[y_1(0); y_2(0); y_3(0)] = [0.5; 3.02; 2.1]$ .

#### 3.1 非错位修正函数投影同步

仿真驱动系统(7)和受控响应系统(9)状态变量的非错位修正函数投影同步, 验证激活控制的有效性, 非错位修正函数投影同步误差如图 2 所示. 由图 2 可知, 驱动系统(7)和受控响应系统(9)的非错位修正函数投影同步误差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  都快速趋向 0, 说明在激活控制式(14)和(15)下, 驱动系统(新超混沌系统)和响应系统(受控 Lü 混沌系统)实现了非错位修正函数投影同步.

由非错位修正函数投影同步的相图(图 3)可知, 驱动系统和受控的响应系统按照对角矩阵  $\alpha(t) = \text{diag}(1 + \sin x, 1 - \cos x, \sin x)$  实现同步. 由于同步因子是 3 个不同的函数  $(1 + \sin x, 1 - \cos x, \sin x)$ , 故可知在激活控制式(14)和(15)下, 驱动系统和受控的响应系统实现了状态变量的非错位修正函数投影同步, 并且它们同步到更加复杂的混沌轨线上.

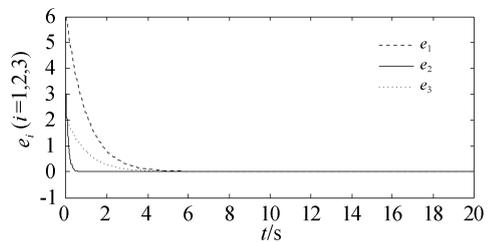


图 2 非错位修正函数投影同步误差图

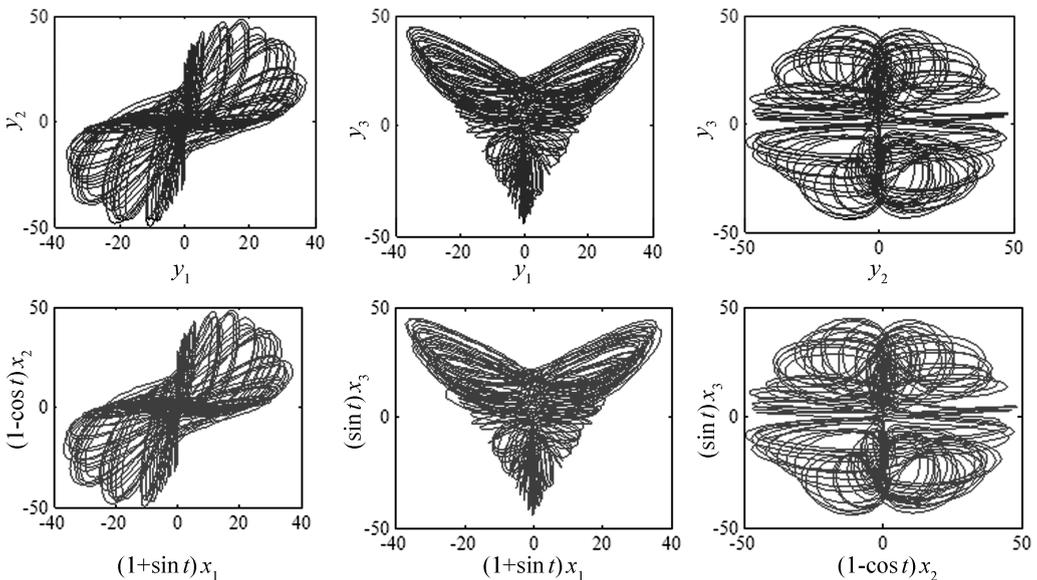


图 3 非错位修正函数投影同步的相图

### 3.2 错位修正函数投影同步

仿真驱动系统(7)和受控响应系统(9)的错位修正函数投影同步,验证激活控制的有效性,错位修正函数投影同步误差如图4所示.由图4可知,驱动系统(7)和受控响应系统(9)的错位修正函数投影同步误差 $\eta_i$  ( $i=1,2,3$ )都快速趋向0,说明在激活控制式(20)和(21)下,新超混沌系统和受控 Lü 混沌系统实现了状态变量的错位修正函数投影同步.

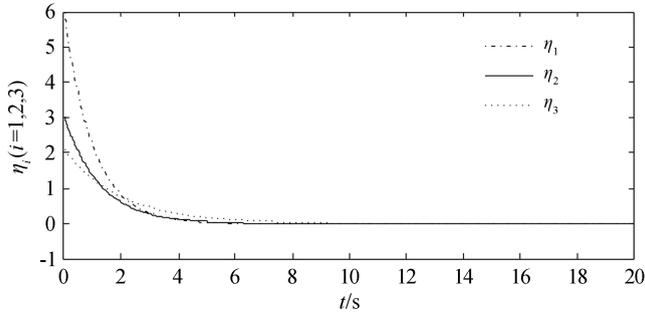


图4 错位修正函数投影同步误差图

由错位修正函数投影同步的相图(图5)可知,驱动系统和受控的响应系统按照对角矩阵 $\alpha(t) = \text{diag}(1 + \sin x, 1 - \cos x, \sin x)$ 实现同步.由于同步因子是3个不同的函数 $(1 + \sin x, 1 - \cos x, \sin x)$ ,故可知在激活控制下,驱动系统和受控的响应系统实现了状态变量的错位修正函数投影同步,并且它们同步到更加复杂的混沌轨线上.

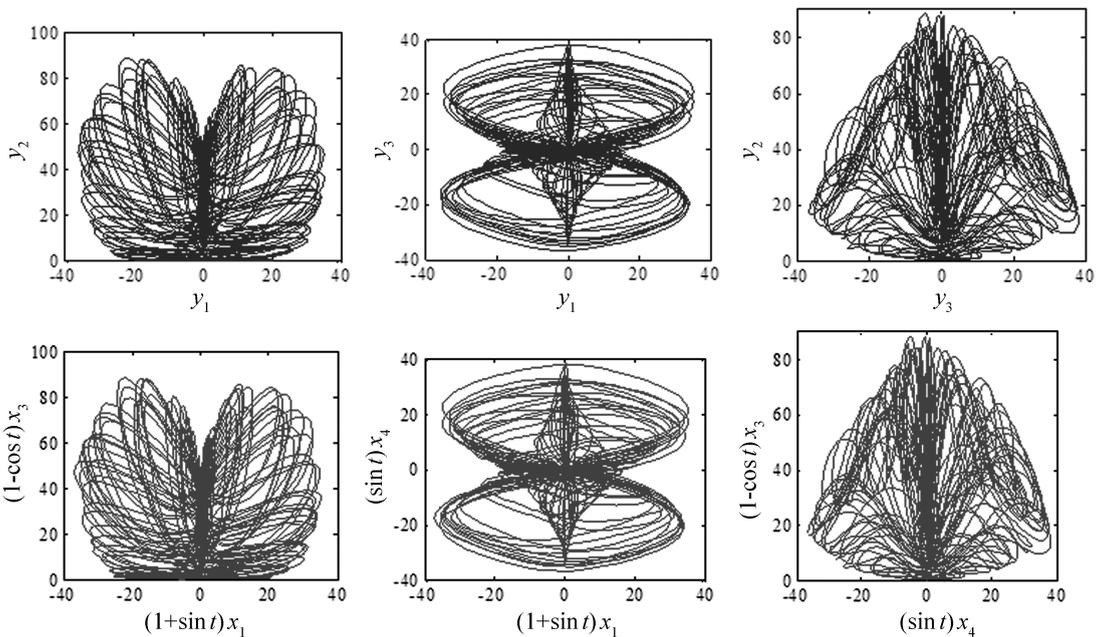


图5 错位修正函数投影同步的相图

## 4 结论

本文利用激活控制原理分别设计两种同步控制器,在错位与非错位两种方式下,分别实现一个新四维超混沌系统和三维 Lü 系统的修正函数投影同步;对错位与非错位修正函数投影同步仿真发现,在激活控制理论下设计的控制器不仅有效,而且驱动系统和受控的响应系统同步到更加复杂的混沌吸引子.本文结果是对激活控制相同维数混沌系统同步的进一步延伸,对混沌保密通信具有一定的理论和现实意义.

**参考文献:**

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system[J]. Physical Review Letters, 1990,64(4):821-824.
- [2] Agiza H N. Chaos synchronization of Lü dynamical system[J]. Nonlinear Analysis, 2004,58(1/2):11-20.
- [3] WANG Yanwu, GUAN Zhihong. Generalized synchronization of continuous chaotic system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006,27(1):97-101.
- [4] LI Guohui. Modified projective synchronization of chaotic system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007,32(5):1786-1790.
- [5] LI Zhigang, XU Daolin. Stability criterion for projective synchronization in three-dimensional chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 2001,282(3):175-179.
- [6] LI Guohui. Generalized projective synchronization of two chaotic systems by using active control[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006,30(1):77-82.
- [7] LI Changpin, YAN Jianping. Generalized projective synchronization of chaos: the cascade synchronization approach [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2006,30(1):140-146.
- [8] HU Mangfeng. Full state hybrid projective synchronization of a general class of chaotic maps[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008,13(4):782-789.
- [9] HU Mangfeng, XU Zhenyuan, ZHANG Rong. Full state hybrid projective synchronization in continuous-time chaotic systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008,13(2):456-464.
- [10] 李德奎,张建刚. 时滞和非时滞耦合的驱动响应网络的函数投影同步[J]. 太原理工大学学报,2013,44(2):162-168.
- [11] 李德奎,李玉龙,张建刚,等. 修正时滞驱动响应动力学网络的函数投影同步[J]. 河南科技大学学报,2011,32(6):64-68.
- [12] 李德奎,连玉平. 不同维混沌系统的修正函数投影同步及参数辨识[J]. 青岛理工大学学报,2013,34(3):95-101.
- [13] 李建芬,李农. 一类混沌系统的修正函数投影同步[J]. 物理学报,2011,60(8):1-7.
- [14] 方洁,姜长生,邓玮. 混沌修正函数投影同步研究及其在保密通信中的应用[J]. 郑州大学学报(工学版),2011,32(5):61-65.
- [15] 毛北行,程春蕊,卜春霞. Lurie 混沌系统的修正函数投影同步[J]. 数学杂志,2013,33(4):717-720.
- [16] 蔡绍洪,杨洋,郭长睿. 统一混沌系统的 active control 同步性研究[J]. 贵州大学学报(自然科学版),2007,24(2):129-133.
- [17] 李德奎. 一个新超混沌 Lorenz 系统的 Hopf 分岔及电路实现[J]. 宁夏大学学报(自然科学版),2016,37(3):294-301.
- [18] 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京:科学出版社,2003:1-10.