

文章编号: 1004-4353(2017)02-0125-03

扭摆法测转动惯量摆长最佳值的探究

张大伟, 王丽, 滕继慧, 孙炳全

(营口理工学院, 辽宁 营口 115014)

摘要: 通过改变摆线的长度来分析摆线变化对于刚体转动惯量不确定度的影响, 得出扭摆法实验中刚体转动惯量 J_0 以及不确定度随摆长变化的特性. 利用与摆长有关的扭转模量 K 的计算方法, 通过改变摆长将实验值 J'_0 与计算值 J_0 相对比, 总结出摆长变化与转动惯量值之间满足非完全线性关系, 最后通过优化摆长确定了该实验中摆长的最佳位置. 本文的研究结果对优化实验条件具有一定的指导意义.

关键词: 摆长; 转动惯量; 相对不确定度; 扭转模量

中图分类号: O313.3

文献标识码: A

The exploration of rotational inertia for optimal length by torsion pendulum method

ZHANG Dawei, WANG Li, TENG Jihui, SUN Bingquan

(Yingkou Institute of Technology, Yingkou 115014, China)

Abstract: We analyze the influence for uncertainty by changing the variation length of rotational inertia, and obtain the characteristic of rotational inertia J_0 and uncertainty which are changed by variation length of pendulum. The calculation method of rotational modulus K also be considered in this scheme, and we compared the experimental value J'_0 with calculated value J_0 , so we summarize the incomplete linear relationship between the change of length of pendulum and the rotational inertia. Then, we determine the optimal value by optimized the length of pendulum in finally. The conclusion has a certain significance to optimize the condition of experiment.

Keywords: length of pendulum; rotational inertia; relative uncertainty; rotational modulus

转动惯量是衡量刚体转动时惯性大小的量度, 是表征刚体特性的物理量. 扭摆法要求在理想条件下研究刚体转动的规律, 具有即简单又直观的特点, 是目前实验室中测量刚体转动惯量所普遍采用的一种方法. 但在实际的实验操作过程中, 由于受到阻尼或者空气阻力等因素的影响, 给实验结果带来偏差^[1-5]. 对于该问题, 张天洋等在其方案中就空气阻尼对于周期的影响进行了分析, 得出优化的空气阻力条件^[4]; 邓锂强指出, 引起实验误差的一个主要原因就是阻力矩随着实验条件的变化而改变^[5]. 就扭摆而言, 从能量损失的角度

来说摆线的过长或者过短都会对实验产生一定的影响, 而摆线的长短对实验结果的影响却一直被大多数人所忽略; 因此, 如何找到阻力矩和拉力矩之间最优的比例关系是实验成功的关键之一. 本文就这一问题进行探讨, 从不确定度随摆长变化的特性出发, 将实验曲线与真值曲线进行拟合对比, 找出满足实验条件的摆长最优值.

1 扭摆法测量实验原理

1.1 实验原理

如图 1 所示, 将一金属丝上端固定, 下端悬挂

收稿日期: 2017-03-17

作者简介: 张大伟(1983—), 男, 讲师, 研究方向为量子调控.

一物体(本实验中悬挂物体为圆盘)即构成实验所采用的扭摆。

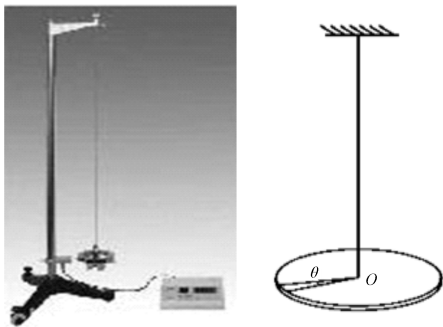


图 1 扭摆示意图

在圆盘上施加一个外力矩的作用,使其扭转一个角度 θ ($\theta < 5^\circ$). 由于摆线上端是固定的,摆线则因为扭转而产生弹性恢复力矩. 当撤去外力矩后,在弹性恢复力矩 M 作用下圆盘做周期性的往复运动. 由胡克定律可得,转角 θ 与恢复力矩 M 的关系为

$$M = -K\theta, \tag{1}$$

其中 K 是扭转模量. 当忽略空气阻尼力矩作用时,根据刚体转动定理有

$$M = J_0\beta, \tag{2}$$

其中 J_0 是刚体对摆线轴的转动惯量, β 为角加速度. 扭摆做角简谐振动的运动微分方程为

$$\beta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{K\theta}{J_0} = -\omega^2\theta, \tag{3}$$

式中 $\omega = \sqrt{\frac{K}{J_0}}$ 是角简谐振动的圆频率,周期 $T_0 =$

$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{K}}$. 若扭转模量 K 未知,可利用一个对其质心轴的转动惯量 J_1 已知的圆环组成复合体.

复合体对以摆线为轴的转动惯量为 $J_0 + J_1$,摆动

周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_1}{K}}$, 圆环对摆线轴的转动惯

量 $J_1 = \frac{m_1}{8}(D_1^2 + D_2^2)$, 其中 m_1 是圆环的质量, D_1 和 D_2 分别为圆环的内直径和外直径. 由上式可得刚体对摆线轴的转动惯量为

$$J_0 = \frac{m_1 T_0^2 (D_1^2 + D_2^2)}{8(T^2 - T_0^2)}. \tag{4}$$

在该方法中,转动惯量 J_0 与摆长无关.

1.2 实验数据处理中的不确定度

不确定度是衡量实验结果的重要组成部分, 由于式(4)中 J_0 由多个实验参量计算求得,因此必须要对 J_0 进行间接不确定度评定. 相对不确定度公式为

$$\frac{u_{J_0}}{J_0} = \left[\left(\frac{u_{m_1}}{m_1} \right)^2 + \left(\frac{2D_1 u_{D_1}}{D_1^2 + D_2^2} \right)^2 + \left(\frac{2D_2 u_{D_2}}{D_1^2 + D_2^2} \right)^2 + \left(\frac{2T u_T}{T^2 - T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2T^2 u_{T_0}}{T_0 (T^2 - T_0^2)} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{5}$$

标准不确定度公式为

$$u_{J_0} = \bar{J}_0 \cdot \frac{u_{J_0}}{J_0}. \tag{6}$$

通过对标准不确定度的分析,可以得出实验结果的误差范围. 在公式(5)和(6)中并未出现摆长 L , 理论上可以认为转动惯量 J_0 和标准不确定度 u_{J_0} 都不随摆长的改变而发生变化.

2 实例计算

以线长 $L = 0.36 \text{ m}$ 为例,选择 20 个周期作为计数时间点,其他条件不变,实验所得数值如表 1 所示.

表 1 20 个周期下的实验数据记录值 ($m = 0.538 \text{ kg}$)

	圆环内径 $D_1/10^{-3} \text{ mm}$	圆环外径 $D_2/10^{-3} \text{ mm}$	圆盘 $20T_0/\text{s}$	圆盘 T_0/s	圆盘+圆环 $20T_s/\text{s}$	圆盘+圆环 T/s
1	99.90	120.21	38.13	1.91	65.12	3.26
2	99.88	120.22	38.13	1.91	65.12	3.26
3	99.90	120.22	38.14	1.91	65.13	3.26
4	99.90	120.20	38.15	1.91	65.11	3.26
5	99.90	120.22	38.12	1.91	65.11	3.26
6	99.90	120.20	38.13	1.91	65.12	3.26
平均值	99.90	120.21	38.13	1.91	65.12	3.26

可求得 $J_0=8.575\times10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 相对不确定度 $\frac{u_{J_0}}{J_0}\approx2.68\%$, $u_{J_0}=\bar{J}_0\cdot\frac{u_{J_0}}{J_0}\approx2.30\times10^{-5}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. 以此为基准值, 通过改变摆线的长度 L 来对比试验结果, 得到相应的摆长 L 与 J_0 以及 u_{J_0} 的对比计算结果如表 2 所示.

表 2 L, J_0 和 u_{J_0} 的数据计算对比值			
	L/m	$J_0/(10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)$	$u_{J_0}/(10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)$
1	0.28	8.547	0.292
2	0.30	8.559	0.273
3	0.32	8.563	0.258
4	0.34	8.573	0.244
5	0.36	8.575	0.230
6	0.38	8.564	0.220
7	0.40	8.580	0.201
平均值	0.34	8.566	0.245

从表 2 可以看出:随着摆长 L 的不断增加, 标准不确定度 u_{J_0} 有下降的趋势. 即摆长越长, 相对不确定度越小; 转动惯量 J_0 值无明显变化(绝对误差不超过 1%). 这说明改变摆长的大小对实验结果的不确定度有一定的影响:摆线越长, 标准不确定度就越小. 但从能量损失的角度来说, 摆长越长, 物体发生摆动的可能性就越大, 物体的摆动使得系统的部分能量用于物体的振动而非整体摆动, 这就有可能增大实验误差, 由此说明并不是摆长越长实验效果越好, 因此需要对摆长进行优化处理. 考虑与摆长直径 d 和摆线长度 L 有关的扭转模量 K , 其表达式为 $K=\pi G(\frac{d}{2})^4/(2L)$. 根据周期公式变换 $T_0=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{J_0/K}$, 可求得转动惯量 J'_0 的计算公式 $J'_0=\frac{Gd^4}{128\pi L}T_0^2$. 本文实验所用摆线材质为碳钢, 由材料力学可知碳钢的切向模量 $G=79\text{ GPa}$, 应用与表 1 相同的数据, 经过计算得到一组相同摆长 L 与转动惯量理论值 J'_0 和计算值 J_0 相对应的对比数据(20 周期为一次计数), 如表 3 所示. 将计算出的转动惯量 J'_0 与不含扭转模量计算出的转动惯量 J_0 相比较, 结果如图 2 所

示. 从图 2 中的两条曲线可明显地看出, 在摆长相对较短和相对较长区域的转动惯量值均有较大范围的波动, 而摆长 L 在 $0.32\sim0.36\text{ m}$ 之间时, 两种情况下所得出的转动惯量计算值和曲线特征相近, 即两条曲线特性拟合得较好. 由此证明, 在扭摆法测刚体转动惯量试验中, 摆长 L 对实验结果确实存在一定的影响. 就本实验结果来说, 最佳的摆长值大约在有效摆长最大值的 $3/7\sim5/7$ 处.

表 3 L, J'_0 和 J_0 的数据计算对比值			
	L/m	$J'_0/(10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)$	$J_0/(10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)$
1	0.28	8.584	8.547
2	0.30	8.609	8.559
3	0.32	8.550	8.563
4	0.34	8.559	8.573
5	0.36	8.560	8.575
6	0.38	8.476	8.564
7	0.40	8.520	8.580
平均值	0.34	8.566	8.566

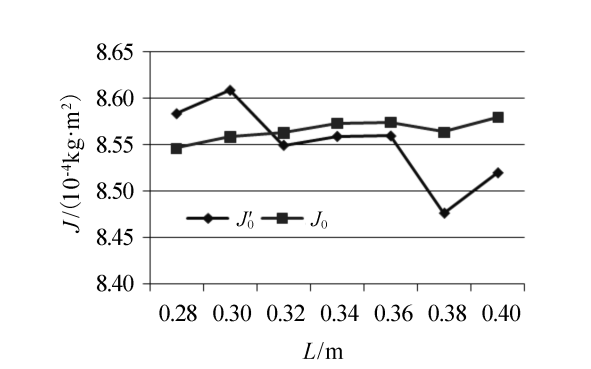


图 2 不同摆长计算刚体转动惯量 J'_0 与 J_0 对比图

参考文献:

[1] 孙炳全,赵涛,刘凤智,等. 大学物理实验[M]. 北京: 化学工业出版社,2016:54-58.

[2] 丁红伟,魏英智,张琳. 关于传统扭摆方法测量刚体转动惯量实验的改进[J]. 大学物理实验,2010,23(4):53-55.

[3] 池红岩,丁红伟. 关于扭摆法测量刚体转动惯量实验的改进[J]. 物理通报,2011(1):51-52.

[4] 张天洋,王艳辉,曲光伟,等. 空气阻力对复摆振动周期的影响[J]. 物理实验,2008,28(11):42-45.

[5] 邓锂强. 刚体转动惯量试验仪实验的误差分析[J]. 实验室科学,2013,6(4):27-31.