文章编号：1004-4353(2017)02-0110-03

数列组的强广义仿射线性相关性

冯志新
(吉林师范大学 数学学院，吉林 四平 136000)

摘要： 推广和加强了数列组的广义线性相关性、数列组之间的广义等价等概念，给出了数列组的强广义仿射线性相关、数列组之间强广义仿射线性表出和强广义仿射等价的概念. 通过探讨这些概念之间的关系，得到一些判断数列组的强广义仿射线性相关性与强仿射线性相关性的充分与必要条件，同时给出了几个性质定理；最后用一个反例，证明了强广义仿射线性表出和强仿射线性表出不具有传递性.

关键词： 数列组；强广义仿射线性相关；强仿射线性相关；强广义仿射等价；强仿射等价
中图分类号： O151　　**文献标识码：** A

The generalized affine linear correlation of sequence group

FENG Zhixin
(*College of Mathematics*, *Jilin Normal University*, *Siping* 136000, *China*)

Abstract: In this paper, we generalize and reinforce the concepts of the generalized linear correlation of sequence group and the generalized equivalence between sequence groups, and we also present the concepts of the strongly generalized affine equivalence and strongly affine equivalence between several sequence groups, then we discuss their relationship and obtain some judgement and property theorems. Finally, a counter example is used to illustrate whether the strongly generalized affine linear representation and the strongly affine linear representation have transitivity.

Keywords: sequence group; strongly generalized affine linear correlation; strongly affine linear correlation; strongly generalized affine equivalence; strongly affine equivalence

文献[1]和[2]给出了向量组的(强)线性相关性的概念，并给出了一些重要结论. 文献[3]和[4]将仿射和强仿射的概念引入到向量组中. 文献[5]将广义线性相关性引入到数列组中. 文献[6]将强仿射的概念引入到贝尔巴拿赫空间中，并给出强仿射函数类. 文献[7]和[8]研究了数理统计中的线性相关性. 文献[9]给出了基于线性相关的一种校准方法. 文献[10]探索了怎样深刻理解线性相关性与线性无关性. 由上述研究可以看出，将向量组的有限维的情形推广至数列组的无穷维，将仿射线性相关性质与强仿射线性相关性质引入到数列组上并将其扩充到广义情形，这些工作是十分必要的.

1　概念与定义

为了叙述方便，将文中所有的数、数列和数列组定义在数域 **R** 上.

定义 1　对于数列$\{y_n\}$与数列组 A：$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，…，$\{x_{mn}\}$，若存在常数 a，以及一组全不为零的 m 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $y_j=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ij}+a$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，$j=1,2,3,\cdots$，则称数列$\{y_n\}$可由数列组 A 强广义仿射线性表出，或称数列$\{y_n\}$为数列组 A 的一个强广义仿射线性组合. 当 $a=0$ 时，称数列$\{y_n\}$为数列

收稿日期： 2017－04－28　　**作者简介：** 冯志新(1979—)，女，副教授，研究方向为基础数学.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(71501082)；四平市科技局项目(2014064)

组 A 的一个齐次强广义仿射线性组合，或强仿射线性组合；当 $a\neq 0$ 时，称数列 $\{y_n\}$ 为数列组 A 的一个非齐次强广义仿射线性组合.

定义 2 设数列组 A：$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，…，$\{x_{mn}\}$，若存在常数 a，以及一组全不为零的 m 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ij}+a=0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=0$，$j=1,2,3,\cdots$，则称数列组 A 强广义仿射线性相关. 当 $a=0$ 时，称数列组 A 齐次强广义仿射线性相关，或强仿射线性相关；当 $a\neq 0$ 时，称数列组 A 非齐次强广义仿射线性相关.

定义 3 对于数列组 A 与 B，若 B 中的任一数列都可以由 A 强广义仿射线性表出，则称数列组 B 可以由数列组 A 强广义仿射线性表出.

定义 4 对于数列组 A 与 B，若 A 与 B 可以互相强广义仿射线性表出，则称数列组 A 与 B 强广义仿射等价.

定义 5 对于数列 $\{y_n\}$ 与数列组 A：$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，…，$\{x_{mn}\}$，若存在常数 a，以及一组不全为零的 m 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $y_j=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ij}+a$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，$j=1,2,3,\cdots$，则称数列 $\{y_n\}$ 可由数列组 A 广义仿射线性表出，或称数列 $\{y_n\}$ 为数列组 A 的一个广义仿射线性组合数列. 当 $a=0$ 时，称数列 $\{y_n\}$ 为数列组 A 的一个齐次广义仿射线性组合，或仿射线性组合；当 $a\neq 0$ 时，称数列 $\{y_n\}$ 为数列组 A 的一个非齐次广义仿射线性组合.

定义 6 对于数列组 A：$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，…，$\{x_{mn}\}$，若存在常数 a，以及一组不全为零的 m 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ij}+a=0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=0$，$j=1,2,3,\cdots$，则称数列组 A 广义仿射线性相关. 当 $a=0$ 时，称数列组 A 齐次广义仿射线性相关，或仿射线性相关；当 $a\neq 0$ 时，称数列组 A 非齐次广义仿射线性相关.

有关广义仿射线性表出、广义仿射等价等定义省略.

2 定理及其证明

定理 1 数列组 A：$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，…，$\{x_{mn}\}$ $(m\geqslant 2)$ 强广义仿射线性相关当且仅当 A 中任意一个数列可以由其他的 $m-1$ 个数列强广义仿射线性表出.

证明 首先证明定理的必要性. 设数列组 A：$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，…，$\{x_{mn}\}$ $(m\geqslant 2)$ 强广义仿射线性相关，则对于 $j=1,2,3,\cdots$，总存在常数 a 与一组全不为零的 m 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ij}+a=0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=0$，并且有 $\lambda_k=-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{k-1}-\lambda_{k+1}-\cdots-\lambda_m$，于是 $\lambda_k x_{kj}=(-\lambda_1)x_{1j}+(-\lambda_2)x_{2j}+\cdots+(-\lambda_{i-1})x_{k-1,j}+(-\lambda_{k+1})x_{k+1,j}+\cdots+(-\lambda_m)x_{mj}+(-a)$，$x_{kj}=(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k})x_{1j}+(-\frac{\lambda_2}{\lambda_k})x_{2j}+\cdots+(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k})x_{k-1,j}+(-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k})x_{k+1,j}+\cdots+(-\frac{\lambda_m}{\lambda_k})x_{mj}+(-\frac{a}{\lambda_k})$，而 $-\frac{\lambda_1}{\lambda_k},-\frac{\lambda_2}{\lambda_k},\cdots,-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k},-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k},\cdots,-\frac{\lambda_m}{\lambda_k}$ 全不为零，且 $(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k})+(-\frac{\lambda_2}{\lambda_k})+\cdots+(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k})+(-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k})+\cdots+(-\frac{\lambda_m}{\lambda_k})=1$. 又 $-\frac{a}{\lambda_k}$ 为常数，于是定理 1 的必要性得证.

其次证明定理的充分性. 任取一数列 $\{x_{in}\}$，$i=1,2,3,\cdots,m$，根据定义 1，对于 $j=1,2,3,\cdots$，总存在常数 a 与一组全不为零的 $m-1$ 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_m$，使得 $x_{kj}=\lambda_1 x_{1j}+\lambda_2 x_{2j}+\cdots+\lambda_{k-1}x_{k-1,j}+\lambda_{k+1}x_{k+1,j}+\cdots+\lambda_m x_{mj}+a$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k-1}+\lambda_{k+1}+\cdots+\lambda_m=1$，于是有 $\lambda_1 x_{1j}+\lambda_2 x_{2j}+\cdots+\lambda_{k-1}x_{k-1,j}+(-1)x_{kj}+\lambda_{k+1}x_{k+1,j}+\cdots+\lambda_m x_{mj}+a=0$. 若令 $\lambda_k=-1$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=0$，并且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全不为零，故 A 强广义仿射线性相关.

定理 2 数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$($m\geqslant 2$)强广义仿射线性相关,则任取 A 中两个由 $m-1$ 个数列所组成的数列组一定广义仿射等价.

证明 任取 A 中的 $m-1$ 个数列,作数列组 B:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{k-1,n}\}$,$\{x_{k+1,n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$,下面证明数列组 B 与 C:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{m-1,n}\}$ 广义仿射等价.

对于$\{x_{1n}\}$,$\{x_{1n}\}=1\{x_{1n}\}+0\{x_{2n}\}+\cdots+0\{x_{m-1,n}\}+0$ 成立,即$\{x_{1n}\}$可由C广义仿射线性表出.同理,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{k-1,n}\}$,$\{x_{k+1,n}\}$,…,$\{x_{m-1,n}\}$ 均可由C广义仿射线性表出.由定义 5 可知$\{x_{mn}\}$可由C广义仿射线性表出,所以 B 可由 C 广义仿射线性表出.

同理可证 C 可由 B 广义仿射线性表出,于是 B 与 C 广义仿射等价,命题成立.

推论 1 数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$($m\geqslant 2$)强仿射线性相关,则任取 A 中的 $m-1$ 个数列所组成的新的 m 个数列组一定仿射等价.

定理 3 对于数列组 A:$\{x_{1n}\}$,$\{x_{2n}\}$,…,$\{x_{mn}\}$($m\geqslant 2$),若 A 强广义仿射线性相关,则数列组 B:$\{x_{1n}-x_{kn}\}$,$\{x_{2n}-x_{kn}\}$,…,$\{x_{k-1,n}-x_{kn}\}$,$\{x_{k+1,n}-x_{kn}\}$,…,$\{x_{mn}-x_{kn}\}$ 强广义仿射线性相关,其中$\{x_{kn}\}$为 A 中任意一个数列.

证明 设数列组 A,对于 $j=1,2,3,\cdots$,总存在常数 a 与一组全不为零的 m 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x_{ij}+a=0$,$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=0$.在 A 中任取数列$\{x_{kn}\}$,则有 $\lambda_k=-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{k-1}-\lambda_{k+1}-\cdots-\lambda_m$,于是 $\lambda_1x_{1j}+\lambda_2x_{2j}+\cdots+\lambda_{k-1}x_{k-1,j}+(-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{k-1}-\lambda_{k+1}-\cdots-\lambda_m)x_{kj}+\lambda_{k+1}x_{k+1,j}+\cdots+\lambda_mx_{mj}+a=0$,$\lambda_1(x_{1j}-x_{kj})+\lambda_2(x_{2j}-x_{kj})+\cdots+\lambda_{k-1}(x_{k-1,j}-x_{kj})+\lambda_{k+1}(x_{k+1,j}-x_{kj})+\cdots+\lambda_m(x_{mj}-x_{kj})+a=0$,而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_m$ 全不为零,即数列组 B 强广义仿射线性相关.

以下举例说明强广义仿射线性相关性是否具有传递性.

令$\{z_n\}=0,1,0,0,\cdots$,$\{x_{1n}\}=\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\cdots$,$\{x_{2n}\}=-\frac{1}{2},\frac{3}{2},0,0,\cdots$,$\{y_{1n}\}=1,0,0,0,\cdots$,$\{y_{2n}\}=0,1,0,0,\cdots$,有$\{z_n\}=\frac{1}{2}\{x_{1n}\}+\frac{1}{2}\{x_{2n}\}$,$\{x_{1n}\}=\frac{1}{2}\{y_{1n}\}+\frac{1}{2}\{y_{2n}\}$,$\{x_{2n}\}=-\frac{1}{2}\{y_{1n}\}+\frac{3}{2}\{y_{2n}\}$ 成立.同时,$\{z_n\}=0\{y_{1n}\}+1\{y_{2n}\}$,即$\{z_n\}$可以由$\{y_{1n}\}$和$\{y_{2n}\}$仿射线性表出,而不是强仿射线性表出,由此表明强广义仿射线性表出不具有传递性.

参考文献:

[1] 北京大学数学系.高等代数[M].北京:高等教育出版社,2013:164-167.
[2] 杨闻起.强线性相关性与弱无关性[J].宝鸡文理学院学报,2009,29(2):1-3.
[3] 香花.关于仿射线性相关性的探讨[J].数学实践与认识,2012,42(7):219-225.
[4] 香花.强仿射线性相关性与强线性相关性[J].安徽师范大学学报(自然科学版),2013,36(3):211-215.
[5] 杨建华.数列组的广义线性相关性[J].武汉工程大学学报,2009,31(12):79-81.
[6] Jirí Spurny. Baire classes of Banach spaces and strongly affine functions[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2009,362(3):1659-1680.
[7] WANG Ting, ZHANG Shiqiang. Study on linear correlation coefficient and nonlinear correlation coefficient in mathematical statistics[J]. Studies in Mathematical Sciences, 2011,3(1):58-63.
[8] Stahlecker P, Knautz H, Trenkler G. Hypothesis testing using affine linear estimators[J]. Acta Applicandae Mathematics, 1996,43(1):153-158.
[9] Galbács Gábor, Gornushkin Igor B, Winefordner James D. Generalization of a new calibration method based on linear correlation[J]. Talanta, 2008,63(2):351-357.
[10] Sinan Aydin. Using example generation to explore students' understanding of the concepts of linear dependence/independence in linear algebra[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2014,45(6):813-826.