

文章编号: 1004-4353(2017)02-0104-06

# 一类非自治差分竞争系统的绝灭性和稳定性

张志敏

( 阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015 )

**摘要:** 在一类非自治差分竞争系统中,通过构造适当的 Lyapunov 绝灭函数,得到了保证系统中某个种群绝灭和另外一个种群全局吸引的充分性条件. 本文所得结果补充了文献[1]的结果.

**关键词:** 非自治差分竞争系统; 绝灭性; 稳定性

**中图分类号:** O175.14

**文献标识码:** A

## Extinction and stability in a nonautonomous difference competitive system

ZHANG Zhimin

( *Department of Basic Teaching and Research, Yango University, Fuzhou 350015, China* )

**Abstract:** In a nonautonomous difference competitive system, sufficient conditions which guarantee the extinction of species and the stability property of another species are obtain by constructing some suitable Lyapunov type extinction functions. The results supplement the results of literature [1].

**Keywords:** nonautonomous difference competitive system; extinction; stability

## 0 引言

对任一非负有界序列  $\{f(n)\}$ , 本文恒设:  $f^L = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\}$ ,  $f^U = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f(n)\}$ .

众所周知,在一个生态系统中,两种群之间的关系有 4 种:捕食者与被捕食者,寄生物与寄生,两种群相互竞争,两种群互惠共存. 近年来,诸多学者开始研究竞争系统的动力学行为,得到了丰富的结果<sup>[1-9]</sup>. 付贞文等在文献[1]中提出并讨论了如下非自治差分竞争系统:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) \exp\{r_1(n) - a_1(n)x_1(n) - b_1(n)x_2(n) - c_1(n)x_2^2(n)\}, \\ x_2(n+1) = x_2(n) \exp\{r_2(n) - a_2(n)x_2(n) - b_2(n)x_1(n) - c_2(n)x_1^2(n)\}, \end{cases} \quad (1)$$

这里  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  分别表示两个竞争种群在第  $n$  代的种群密度,  $r_i(n)$  ( $i=1,2$ ) 表示两种群的内禀增长率,  $a_i(n)$  ( $i=1,2$ ) 为种内竞争率,  $b_i(n)$  ( $i=1,2$ ) 为种间竞争率,  $c_i(n)$  ( $i=1,2$ ) 为扰动系数. 在假设系统(1)的各系数均为有正的上下界的非负序列且恒满足初始条件:  $x_1(0) > 0$ ,  $x_2(0) > 0$  的情况下,通过运用差分方程理论、Brouwer 定理和 Lyapunov 函数方法,付贞文等分别获得了系统的持久性、正周期解的存在性和全局渐近稳定性的充分条件. 唐帆等<sup>[2]</sup>探讨了时滞和反馈控制影响下的系统(1)的持久性、正概周期解的存在性和全局吸引性的充分条件. 余胜斌<sup>[3]</sup>则进一步研究了反馈控制变量对系统(1)持久性的影响. 但是,文献[1-3]均未探讨系统的绝灭性. 已有的研究结果<sup>[4-9]</sup>表明,绝灭性是生态系统研究中的一个重要课题,对物种或者自然资源的保护和开发等有直接的关系,因此本文就系统(1)的

绝灭性进行探讨,类似的工作参见文献[4-9]及其所引文献.由初始条件易知,对于任意的  $n \geq 0$  都有  $x_1(n) > 0, x_2(n) > 0$ .

## 1 绝灭性

**引理 1**<sup>[1]</sup> 系统(1)的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  均满足

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_i(n) \leq \frac{\exp(r_i^M - 1)}{a_i^L} = B_i, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

即系统(1)的任一正解是最终有界的.

**定理 1** 假设如下条件  $(H_1)$  成立:

$$(H_1) \quad \frac{r_2^M}{r_1^L} < \min \left\{ \frac{b_2^L}{a_1^M}, \frac{a_2^L}{b_1^M + c_1^M B_2} \right\},$$

其中  $B_2$  由式(2)所定义,则种群  $x_2$  将绝灭,即对系统(1)的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = 0$ .

**证明** 由条件  $(H_1)$  可选取足够小的数  $\epsilon_1 > 0$ ,使得  $\frac{r_2^M}{r_1^L} < \min \left\{ \frac{b_2^L}{a_1^M}, \frac{a_2^L}{b_1^M + c_1^M (B_2 + \epsilon_1)} \right\}$  成立.由上式可知,存在正常数  $\alpha, \beta$  使得  $\frac{r_2^M}{r_1^L} < \frac{\beta}{\alpha} < \min \left\{ \frac{b_2^L}{a_1^M}, \frac{a_2^L}{b_1^M + c_1^M (B_2 + \epsilon_1)} \right\}$ ,从而有

$$\alpha r_2^M - \beta r_1^L \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_1 < 0, \quad \beta a_1^M - \alpha b_2^L < 0, \quad \beta b_1^M + \beta c_1^M (B_2 + \epsilon_1) - \alpha a_2^L < 0. \quad (3)$$

对上述  $\epsilon_1$ ,由引理 1 可知存在足够大的自然数  $N > 0$ ,使得当  $n \geq N$  时,有

$$x_i(n) < B_i + \epsilon_1, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

对任意的  $p \geq N$ ,由系统(1)和式(4)可知:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1(p+1)}{x_1(p)} &= r_1(p) - a_1(p)x_1(p) - b_1(p)x_2(p) - c_1(p)x_2^2(p) \geq \\ & r_1^L - a_1^M x_1(p) - b_1^M x_2(p) - c_1^M x_2^2(p), \\ \ln \frac{x_2(p+1)}{x_2(p)} &= r_2(p) - a_2(p)x_2(p) - b_2(p)x_1(p) - c_2(p)x_1^2(p) \leq \\ & r_2^M - a_2^L x_2(p) - b_2^L x_1(p) - c_2^L x_1^2(p). \end{aligned} \quad (5)$$

由不等式(3)–(5)可得,对  $p \geq N$  有

$$\begin{aligned} \alpha \ln \frac{x_2(p+1)}{x_2(p)} - \beta \ln \frac{x_1(p+1)}{x_1(p)} &\leq (\alpha r_2^M - \beta r_1^L) + (\beta a_1^M - \alpha b_2^L)x_1(p) + (\beta b_1^M - \alpha a_2^L)x_2(p) - \\ & \alpha c_2^L x_1^2(p) + \beta c_1^M x_2^2(p) \leq (\alpha r_2^M - \beta r_1^L) + (\beta a_1^M - \alpha b_2^L)x_1(p) + \\ & [\beta b_1^M + \beta c_1^M x_2(p) - \alpha a_2^L]x_2(p) \leq (\alpha r_2^M - \beta r_1^L) + (\beta a_1^M - \alpha b_2^L)x_1(p) + \\ & [\beta b_1^M + \beta c_1^M (B_2 + \epsilon_1) - \alpha a_2^L]x_2(p) < \alpha r_2^M - \beta r_1^L = -\delta_1 < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

对上式两边做从  $N$  到  $n-1$  累加,得  $\alpha \ln \frac{x_2(n)}{x_2(N)} - \beta \ln \frac{x_1(n)}{x_1(N)} < -\delta_1(n-N)$ ,所以

$$x_2(n) < \left[ \left( \frac{x_1(n)}{x_1(N)} \right)^\beta (x_2(N))^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \exp \left( -\frac{\delta_1}{\alpha} (n-N) \right). \quad (7)$$

由式(7)和引理 1 的  $x_1(n)$  的最终有界性可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = 0$ ,从而定理 1 成立.

**注 1** 在系统(1)的其他系数保持不变的情况下,  $r_2^M$  越小则  $B_2$  越小,条件  $(H_1)$  就越容易成立,从而由定理 1 可知种群  $x_2$  越容易绝灭.这是因为在种群  $x_1$  的基本状态不变的情况下,  $r_2^M$  小即种群  $x_2$  的内禀增长率低意味着种群  $x_2$  数量偏少,必然会造成与种群  $x_1$  竞争生存空间而又没有其他食物来源的种群  $x_2$  在竞争中处于不利地位而最终绝灭.

**定理 2** 假设如下条件  $(H_2)$  成立:

$$(H_2) \quad \frac{r_2^L}{r_1^M} > \max \left\{ \frac{a_2^M}{b_1^L}, \frac{b_2^M + c_2^M B_1}{a_1^L} \right\},$$

其中  $B_1$  由式(2) 所定义, 则种群  $x_1$  将绝灭, 即对系统(1) 的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1(n) = 0$ .

**证明** 由条件  $(H_2)$  可选取足够小的数  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得  $\frac{r_2^L}{r_1^M} > \max \left\{ \frac{a_2^M}{b_1^L}, \frac{b_2^M + c_2^M (B_1 + \varepsilon_2)}{a_1^L} \right\}$  成立. 由上式可知, 存在正常数  $\alpha, \beta$  使得  $\frac{r_2^L}{r_1^M} > \frac{\beta}{\alpha} > \max \left\{ \frac{a_2^M}{b_1^L}, \frac{b_2^M + c_2^M (B_1 + \varepsilon_2)}{a_1^L} \right\}$ , 从而有

$$\beta r_1^M - \alpha r_2^L \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_2 < 0, \quad \alpha a_2^M - \beta b_1^L < 0, \quad \alpha b_2^M + \alpha c_2^M (B_1 + \varepsilon) - \beta a_1^L < 0. \quad (8)$$

对任意的  $p \geq N$ , 由系统(1) 和式(4) 可知:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1(p+1)}{x_1(p)} &\leq r_1^M - a_1^L x_1(p) - b_1^L x_2(p) - c_1^L x_2^2(p), \\ \ln \frac{x_2(p+1)}{x_2(p)} &\geq r_2^L - a_2^M x_2(p) - b_2^M x_1(p) - c_2^M x_1^2(p). \end{aligned} \quad (9)$$

由不等式(4)、(8) 和(9) 可知, 当  $p \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned} \beta \ln \frac{x_1(p+1)}{x_1(p)} - \alpha \ln \frac{x_2(p+1)}{x_2(p)} &\leq (\beta r_1^M - \alpha r_2^L) + (\alpha b_2^M - \beta a_1^L) x_1(p) + (\alpha a_2^M - \beta b_1^L) x_2(p) - \\ &\quad \beta c_1^L x_2^2(p) + \alpha c_2^M x_1^2(p) \leq (\beta r_1^M - \alpha r_2^L) + [\alpha b_2^M + \alpha c_2^M x_1(p) - \beta a_1^L] x_1(p) + \\ &\quad (\alpha a_2^M - \beta b_1^L) x_2(p) \leq (\beta r_1^M - \alpha r_2^L) + [\alpha b_2^M + \alpha c_2^M (B_1 + \varepsilon) - \beta a_1^L] x_1(p) + \\ &\quad (\alpha a_2^M - \beta b_1^L) x_2(p) < \beta r_1^M - \alpha r_2^L = -\delta_2 < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

余下的证明与定理 1 的证明类似, 证明略.

**注 2** 在系统(1) 的其他系数保持不变的情况下,  $r_1^M$  越小则  $B_1$  越小, 条件  $(H_2)$  越容易满足, 从而由定理 2 可知种群  $x_1$  越容易绝灭, 这是与实际生活是相一致的. 因为在种群  $x_2$  的基本状态不变的情况下,  $r_1^M$  小即种群  $x_1$  的内禀增长率低意味着种群  $x_1$  数量偏少, 必然会造成与种群  $x_2$  竞争生存空间而又没有其他食物来源的种群  $x_1$  在竞争中处于不利地位而最终绝灭.

## 2 稳定性

**引理 2**<sup>[10]</sup> 假设  $a(n)$  和  $b(n)$  为有正的上下界的非负序列,  $\{x(n)\}$  满足  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq x^*$  且当  $n \geq N_0$  时, 有  $x(n+1) \geq x(n) \exp\{a(n) - b(n)x(n)\}$ , 其中  $N_0 \in \mathbf{N}$  且  $x(N_0) > 0$ , 则  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \geq \min \left\{ \frac{a^L}{b^M} \exp\{a^L - b^M x^*\}, \frac{a^L}{b^M} \right\}$ .

**引理 3** 假设  $(H_1)$  成立, 则系统(1) 的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  均满足  $A_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \leq B_1$ , 这里  $A_1 = \frac{r_1^L}{a_1^M} \exp\{r_1^L - a_1^M B_1\}$ ,  $B_1$  如式(2) 所定义.

**证明** 由引理 1 和定理 1 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \leq B_1. \quad (11)$$

进一步地, 因为  $r_1^L > 0$ , 故可选取足够小的数  $\varepsilon > 0$ , 使得

$$A_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} r_1^L - c_1^M \varepsilon^2 > 0. \quad (12)$$

由式(11) 知, 对上述  $\varepsilon > 0$ , 存在足够大的  $N_1 > 0$ , 使得对任意的  $n \geq N_1$ , 有

$$x_1(n) \leq B_1 + \varepsilon, \quad x_2(n) \leq \varepsilon. \quad (13)$$

从而由系统(1) 的第 1 个方程可知,

$$x_1(n+1) \geq x_1(n) \exp\{r_1^L - a_1^M x_1(n) - c_1^M \varepsilon^2\}. \quad (14)$$

由引理2和式(12)、(14)可知  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \geq \min \left\{ \frac{A_\epsilon}{a_1^M} \exp\{A_\epsilon - a_1^M B_1\}, \frac{A_\epsilon}{a_1^M} \right\}$ . 令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \geq \min \left\{ \frac{r_1^L}{a_1^M} \exp\{r_1^L - a_1^M B_1\}, \frac{r_1^L}{a_1^M} \right\}. \quad (15)$$

因为  $r_1^L - a_1^M B_1 = r_1^L - a_1^M \frac{\exp(r_1^M - 1)}{a_1^L} \leq r_1^L - \exp(r_1^M - 1) \leq r_1^L - r_1^M \leq 0$ , 故由式(15)得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \geq \frac{r_1^L}{a_1^M} \exp\{r_1^L - a_1^M B_1\} \stackrel{\text{def}}{=} A_1.$$

引理3证毕.

**引理4** 假设(H<sub>2</sub>)成立, 则系统(1)的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  均满足  $A_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_2(n) \leq$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_2(n) \leq B_2$ , 这里  $A_2 = \frac{r_2^L}{a_2^M} \exp\{r_2^L - a_2^M B_2\}$ ,  $B_2$  如式(2)所定义.

**证明** 类似于引理3的证明可以得到引理4的证明, 故在此省略.

考虑如下 Logistic 方程:

$$x(n+1) = x(n) \exp\{r_1(n) - a_1(n)x(n)\}, \quad (16)$$

这里  $r_1(n)$  和  $a_1(n)$  为非负有界序列, 由文献[4]的引理3.2可得:

**引理5** 方程(16)的任一正解  $x(n)$  均满足  $A_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq B_1$ , 这里  $A_1$  和  $B_1$

如引理3所定义.

对如下 Logistic 方程:

$$x(n+1) = x(n) \exp\{r_2(n) - a_2(n)x(n)\}, \quad (17)$$

与引理5类似的有如下结论:

**引理6** 方程(17)的任一正解  $\tilde{x}(n)$  均满足  $A_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}(n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}(n) \leq B_2$ , 这里  $A_2$  和  $B_2$

如引理4所定义.

**定理3** 假设(H<sub>1</sub>)成立, 且如下条件(H<sub>3</sub>)成立:

$$(H_3) \quad \frac{a_1^M}{a_1^L} \exp(r_1^M - 1) < 2,$$

则系统(1)的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  和方程(16)的任一正解  $x(n)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1(n) - x(n)) = 0$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = 0$ .

**证明** 由条件(H<sub>1</sub>)和定理1可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = 0$ . 令  $y(n) = \ln x_1(n) - \ln x(n)$ , 则由系统(1)的第1个方程和式(16)得

$$y(n+1) = y(n) - a_1(n)x(n)(\exp\{y(n)\} - 1) - b_1(n)x_2(n) - c_1(n)x_2^2(n). \quad (18)$$

由微分中值定理知, 存在  $\theta(n) \in (0, 1)$ , 使得  $\exp\{y(n)\} - 1 = \exp\{\theta(n)y(n)\} y(n)$ . 从而式(18)可化为

$$y(n+1) = [1 - a_1(n)x(n)\exp\{\theta(n)y(n)\}] y(n) - b_1(n)x_2(n) - c_1(n)x_2^2(n). \quad (19)$$

因(H<sub>3</sub>)隐含着  $-1 < 1 - a_1^M B_1$ , 故可选取足够小的数  $\epsilon > 0$ , 使得  $-1 < 1 - a_1^M (B_1 + \epsilon)$ . 由引理3、引理5和  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = 0$  可知, 对上述  $\epsilon$ , 存在足够大的  $N > 0$ , 使得当  $n \geq N$  时, 有

$$A_1 - \epsilon \leq x_1(n) \leq B_1 + \epsilon, \quad x_2(n) \leq \epsilon, \quad A_1 - \epsilon \leq x(n) \leq B_1 + \epsilon. \quad (20)$$

由  $\theta(n) \in (0, 1)$  易知  $x(n)\exp\{\theta(n)y(n)\}$  位于  $x(n)$  和  $x_1(n)$  之间, 从而由式(19)和式(20)知, 当  $n \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned} |y(n+1)| &\leq \max\{|1 - a_1^M (B_1 + \epsilon)|, |1 - a_1^L (A_1 - \epsilon)|\} |y(n)| + (b_1^M + c_1^M \epsilon) \epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\lambda_\epsilon |y(n)| + (b_1^M + c_1^M \epsilon) \epsilon, \end{aligned} \quad (21)$$

这里  $\lambda_\epsilon = \max\{|1 - a_1^M (B_1 + \epsilon)|, |1 - a_1^L (A_1 - \epsilon)|\}$ . 从而当  $n \geq N$  时, 有

$$|y(n)| \leq \lambda_\epsilon^{n-N} |y(N)| + \frac{1 - \lambda_\epsilon^{n-N}}{1 - \lambda_\epsilon} (b_1^M + c_1^M \epsilon) \epsilon.$$

(22)

由  $1 - a_1^M(B_1 + \epsilon) \leq 1 - a_1^L(A_1 - \epsilon) < 1$  可知  $0 < \lambda_\epsilon < 1$ , 从而由式 (22) 可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1(n) - x(n)) = 0$ . 证毕.

类似地, 可以得到如下定理:

**定理 4** 假设  $(H_2)$  成立, 且如下条件  $(H_4)$  成立:

$$(H_4) \quad \frac{a_2^M}{a_2^L} \exp(r_2^M - 1) < 2,$$

则系统 (1) 的任一正解  $(x_1(n), x_2(n))^T$  和方程 (17) 的任一正解  $\tilde{x}(n)$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1(n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_2(n) - \tilde{x}(n)) = 0$ .

3 应用举例

**例 1** 考虑如下系统:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) \exp\{1.6 - 1.5x_1(n) - (1 + 0.2\sin(\sqrt{5}n))x_2(n) - \\ \quad (0.4 + 0.2\cos(\sqrt{3}n))x_2^2(n)\}, \\ x_2(n+1) = x_2(n) \exp\{0.8 - 3.6x_2(n) - (4 + 2\cos(\sqrt{11}n))x_1(n) - \\ \quad (0.6 + 0.2\sin(\sqrt{7}n))x_1^2(n)\}. \end{cases}$$

(23)

对于系统 (23), 经过验证发现条件  $(H_1)$  和  $(H_3)$  成立, 从而由定理 3 可知  $x_2$  绝灭而  $x_1$  全局吸引, 数值模拟 (图 1) 也说明了这一结果.

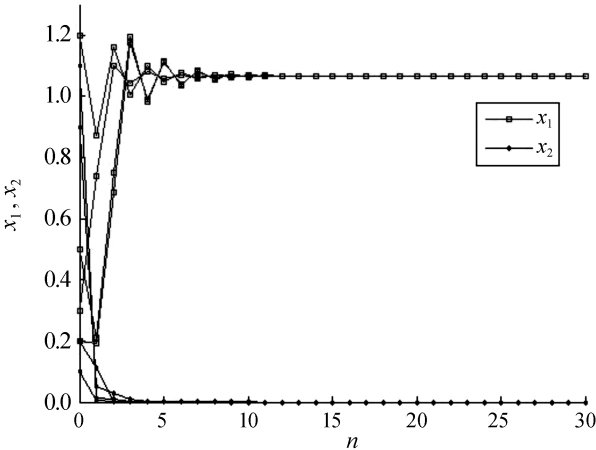


图 1 具初始条件  $(0.3, 0.2)^T, (1.2, 0.1)^T, (0.5, 1.1)^T$  和  $(0.2, 0.9)^T$  的系统 (23) 的数值模拟

**例 2** 考虑如下系统:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) \exp\{0.7 - 1.5x_1(n) - (3 + 0.2\sin(\sqrt{5}n))x_2(n) - \\ \quad (0.4 + 0.2\cos(\sqrt{3}n))x_2^2(n)\}, \\ x_2(n+1) = x_2(n) \exp\{1.4 - 3.6x_2(n) - (1 + 0.2\cos(\sqrt{11}n))x_1(n) - \\ \quad (0.6 + 0.2\sin(\sqrt{7}n))x_1^2(n)\}. \end{cases}$$

(24)

对于系统 (24), 经过验证发现条件  $(H_2)$  和  $(H_4)$  成立, 从而由定理 3 可知  $x_1$  绝灭而  $x_2$  全局吸引, 数值模拟 (图 2) 也说明了这一结果.

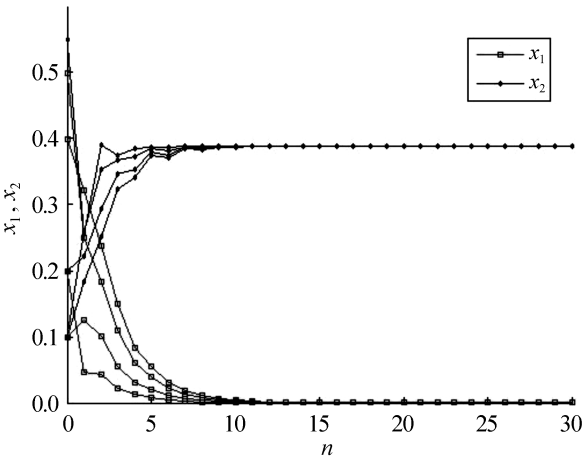


图 2 具初始条件 $(0.5,0.2)^T$ ,  $(0.4,0.1)^T$ ,  $(0.1,0.1)^T$  和  $(0.2,0.55)^T$  的系统(24)的数值模拟

参考文献：

[1] 付贞文,向会立. 一类非自治差分竞争系统的持久性及正周期解的全局渐近稳定性[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版),2013,31(3):267-270.

[2] 唐帆,刘志军. 一类具有反馈控制的概周期时滞差分竞争系统(英文)[J]. 生物数学学报,2016,31(1):28-46.

[3] 余胜斌. 具反馈控制和时滞的离散竞争系统的持久性[J]. 皖西学院学报,2017,33(2):38-41.

[4] Li Z, Chen F D. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances[J]. Dyn Contin Discrete Impul Syst, Ser B, Appl Algorithms, 2008,15(2):165-178.

[5] Chen F D, Gong X J, Chen W L. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances (II)[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst, Ser B, Appl Algorithms, 2013,20(4/5): 449-461.

[6] 余胜斌. 一类离散非自治竞争系统的绝灭性和稳定性[J]. 延边大学学报(自然科学版),2015,41(4):279-284.

[7] 余胜斌. 具毒素影响的连续型竞争系统的绝灭性和稳定性[J]. 延边大学学报(自然科学版),2016,42(3):196-202.

[8] Chen F D, Xie X D, Miao Z S, et al. Extinction in two species nonautonomous nonlinear competitive system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016,274(1):119-124.

[9] 余胜斌. 一类连续型非自治竞争系统的绝灭性和稳定性[J]. 宁夏大学学报(自然科学版),2016,37(4):400-404.

[10] Chen F D. Permanence for the discrete mutualism model with time delays[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2008,47(3/4):431-435.