文章编号：1004-4353(2017)01-0015-04

不可扩展的最大纠缠基和无偏基

乔金兰， 沈鑫， 向朝参， 吴海佳
(后勤工程学院 管理科学与工程系，重庆 401331)

摘要：讨论了 $C^3 \otimes C^4$ 量子系统中不可扩展的最大纠缠基和无偏基. 首先在 $C^3 \otimes C^4$ 空间上研究了不可扩展的最大纠缠基；其次通过改变 C^4 中的正交基，构造出另外一组不可扩展的最大纠缠基；最后对这两组不可扩展的最大纠缠基分别进行完备化，并证明了这两组基是相互无偏的.

关键词：量子系统；不可扩展的最大纠缠基；无偏基；最大纠缠态
中图分类号：O413.1　　　　**文献标识码：**A

Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases

QIAO Jinlan, SHEN Xin, XIANG Chaocan, WU Haijia
(*Department of Management Science and Engineering*, *Logistics Project Academy*, *Chongqing* 401331, *China*)

Abstract: The unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $C^3 \otimes C^4$ quantum system are discussed. The unextendible maximally entangled bases in $C^3 \otimes C^4$ are studied firstly; then another unextendible maximally entangled bases are constructed by changing the orthonormal basis in C^4; finally, the two unextendible maximally entangled bases are completed and are proved to be unbiased.

Keywords: quantum system; unextendible maximally entangled bases; mutually unbiased bases; maximally entangled state

量子纠缠作为一种基本物理资源，被广泛应用于量子计算、量子通信、量子隐形传态、量子超密编码、量子纠错等方面. 近年来，学者们对量子纠缠态进行了大量的研究，其中包括无偏基(MUBs)以及其他类型的基，如基(PB)、不可扩充的积态基(UPBs)、最大纠缠基(MEB)等[1-4]. UPB 是一个不完全的正交积态基，由它张成的子空间的正交补空间中的态都是纠缠态. 在任意的 Hilbert 空间 $C^n \otimes C^m$ 中都存在 UPB，结合 UPB 中的不可扩充性与最大纠缠态，Bravyi 和 Smolin[5]首次提出并定义了 Hilbert 空间 $C^d \otimes C^d$ 中的不可扩充的最大纠缠基(UMEB)，还构造出部分 Hilbert 空间中的 UMEB. 此后，陈斌等[6]通过 UMEB 构造出了两组无偏的完备 UMEB. 无偏基在量子信息处理、密码协议、多路干涉仪中波粒二象性的量化等方面都有重要应用. 在无偏基的相关研究中，给定维数的 Hilbert 空间中存在 MUBs 的最大个数倍受关注. 目前，对于非素数方幂中 MUBs 的最大个数虽然还未能确定，但自从引进 UMEB 之后，有学者成功地通过 UMEB 构造出了 $C^2 \otimes C^3$ 中的两个 MUBs[7-9].

本文将探讨 $C^3 \otimes C^4$ 量子系统中相互无偏的不可扩展的最大纠缠基. 通过改变 C^4 中的标准正交基，构造了 $C^3 \otimes C^4$ 中两个新的完备的不可扩充的最大纠缠基，并证明了这两组基分别与文献[10]中的完备的不可扩充的最大纠缠基是相互无偏的.

收稿日期：2017－01－20　　　　**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(61502520)
作者简介：乔金兰(1990—)，女，助教，研究方向为应用数学.

1 预备知识

定义 1[5] 在两体系统 $A\otimes B$(A 是 d 维,B 是 d' 维)中,称态 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ 是最大纠缠态,若成立以下条件:对系统 A 中任意给定的一个标准正交基 $\{|\boldsymbol{i}_{\mathrm{A}}\rangle\}$,总存在子系统 B 的一个标准正交基 $\{|\boldsymbol{i}_{\mathrm{B}}\rangle\}$ 使得态 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ 能表示为 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle=\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=0}^{d-1}|\boldsymbol{i}_{\mathrm{A}}\rangle\otimes|\boldsymbol{i}_{\mathrm{B}}\rangle$.

定义 2[5] 一组态集 $\{|\boldsymbol{\phi}_i\rangle\in \mathrm{C}^d\otimes \mathrm{C}^d,\ i=1,2,3,\cdots,n;\ n<d^2\}$ 称为 $\mathrm{C}^d\otimes \mathrm{C}^d$ 中的 n-员不可扩展的最大纠缠基(简称“n-员 UMEBS”),如果下列条件成立:

(i) $|\boldsymbol{\phi}_i\rangle$ 是最大纠缠态,$i=1,2,3,\cdots,n$;

(ii) $\langle\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\phi}_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0,\ i\neq j;\\1,\ i=j,\end{cases}$ 即 $\{|\boldsymbol{\phi}_i\rangle\}$ 两两正交;

(iii) 若有态 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 满足 $\langle\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\psi}\rangle=0,\forall i=1,2,3,\cdots,n$,那么 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 一定不是最大纠缠态,即不存在与所有 $|\boldsymbol{\phi}_i\rangle$ 正交的最大纠缠态.

2013 年,陈斌等[6] 将不可扩展的最大纠缠基的概念推广到两个不同维数的两体系统 $\mathrm{C}^d\otimes \mathrm{C}^{d'}$ 中:

定义 3[6] 一组态集 $\{|\boldsymbol{\phi}_i\rangle\in \mathrm{C}^d\otimes \mathrm{C}^{d'},\ i=1,2,3,\cdots,n;\ n<dd'\}$ 称为 $\mathrm{C}^d\otimes \mathrm{C}^{d'}(d'>d)$ 中 n-员不可扩展的最大纠缠基(简称“n-员 UMEBS”),如果下列条件成立:

(i) $|\boldsymbol{\phi}_i\rangle$ 是最大纠缠态,$i=1,2,3,\cdots,n$;

(ii) $|\boldsymbol{\phi}_i\rangle$ 是一个标准的正交向量组;

(iii) 不存在与所有 $|\boldsymbol{\phi}_i\rangle$ 正交的最大纠缠态,若有态 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 满足 $\langle\boldsymbol{\phi}_i|\boldsymbol{\psi}\rangle=0,\forall i=1,2,3,\cdots,n$,那么 $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ 一定不是最大纠缠态.

定义 4[11] 设 Hilbert 空间 C^d 的两个标准正交基分别是:

$$B_1=\{|\boldsymbol{\varphi}_1\rangle,|\boldsymbol{\varphi}_2\rangle,\cdots,|\boldsymbol{\varphi}_d\rangle\},\ B_2=\{|\boldsymbol{\psi}_1\rangle,|\boldsymbol{\psi}_2\rangle,\cdots,|\boldsymbol{\psi}_d\rangle\},$$

若这两个基满足 $|\langle\boldsymbol{\varphi}_i|\boldsymbol{\psi}_j\rangle|=\frac{1}{\sqrt{d}}(\forall i,j=1,2,\cdots,d)$,则称 B_1 和 B_2 是无偏基(MUBs).

设 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是 Hilbert 空间 C^d 上的 m 个标准正交基的集合,若集合中任意两个基 B_i 和 B_j 都是相互无偏的,那么称该集合是最大无偏集.

2 $\mathrm{C}^3\otimes \mathrm{C}^4$ 中不可扩展的最大纠缠基

在 $\mathrm{C}^d\otimes \mathrm{C}^{d'}(d'=qd+r,\ q,r\in\mathbf{N}^+$ 且 $0<r<d)$ 中不可扩展的最大纠缠基含有 qd^2 个成员[10],由此不难给出 $\mathrm{C}^3\otimes \mathrm{C}^4$ 中的一个不可扩展的最大纠缠基:

$$|\boldsymbol{\psi}_{n,m}\rangle=(\boldsymbol{U}_{n,m}\otimes \boldsymbol{I}_4)|\boldsymbol{\psi}\rangle,\ n,m=0,1,2. \tag{1}$$

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|00'\rangle+|11'\rangle+|22'\rangle),\ \boldsymbol{U}_{n,m}=\sum_{j=0}^{2}\xi_3^{nj}|\boldsymbol{j}\oplus\boldsymbol{m}\rangle\langle\boldsymbol{j}|,\ n,m=0,1,2.$$

其中 $\{|0\rangle,|1\rangle,|2\rangle\}$ 和 $\{|0'\rangle,|1'\rangle,|2'\rangle,|3'\rangle\}$ 分别是 C^3 和 C^4 上的标准正交基,$\xi_3=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$,$j\otimes m$ 表示模 3 加法.

3 利用 $\mathrm{C}^3\otimes \mathrm{C}^4$ 中的 UMEB 构造 MUBs

将式(1)进行完备化,即需添加 3 个保证彼此规范正交的直积态:

$$|\boldsymbol{\psi}_{3,0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|03'\rangle+|13'\rangle+|23'\rangle).$$

$$|\boldsymbol{\psi}_{3,1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|03'\rangle+w|13'\rangle+\overline{w}|23'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\psi}_{3,2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|03'\rangle+\overline{w}|13'\rangle+w|23'\rangle),\tag{2}$$

其中 $w=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$.经简单验算可知,式(1)和式(2)中的 12 个态正好构成了 $C^3\otimes C^4$ 的一组完备正交基,记 $\boldsymbol{I}_1=\{|\boldsymbol{\psi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$.

保持 C^3 中的标准正交基不变,改变 C^4 中的标准正交基,如下所示:

$$|\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle=\frac{1}{2}(|0'\rangle-w|1'\rangle+|2'\rangle+|3'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle=\frac{1}{2}(w|0'\rangle+\overline{w}|1'\rangle-w|2'\rangle+w|3'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle=\frac{1}{2}(-|0'\rangle+|1'\rangle+\overline{w}|2'\rangle+|3'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle=\frac{1}{2}(\overline{w}|0'\rangle+\overline{w}|1'\rangle+w|2'\rangle-\overline{w}|3'\rangle).$$

根据这一组基,重复用文献[10]中的构造方法,便可得到 $C^3\otimes C^4$ 中的另外一组 UMEB:

$$|\boldsymbol{\phi}_{n,m}\rangle=(\boldsymbol{U}_{n,m}\otimes\boldsymbol{I}_4)|\boldsymbol{\phi}\rangle,\ n,m=0,1,2,$$

其中 $|\boldsymbol{\phi}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+|1\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+|2\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)$.

再添加如下 3 个积态对其进行完备化,便可得到 $C^3\otimes C^4$ 中的另外一组完备正交基:

$$|\boldsymbol{\phi}_{3,0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{w}|0\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle+w|1\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle+\overline{w}|2\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\phi}_{3,1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{w}|0\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle+|1\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle+|2\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\phi}_{3,2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle+|1\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle+\overline{w}|2\rangle|\boldsymbol{\varepsilon}'_3\rangle),$$

记 $\boldsymbol{I}_2=\{|\boldsymbol{\phi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$.

经过直接计算可知,上述两组完备的不可扩展的最大纠缠基 $\boldsymbol{I}_1=\{|\boldsymbol{\psi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$ 与 $\boldsymbol{I}_2=\{|\boldsymbol{\phi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$ 是无偏的,即在两组基中分别任取两个态做内积,都满足

$$|\langle\boldsymbol{\psi}_{n,m}|\boldsymbol{\phi}_{n',m'}\rangle|=\frac{1}{\sqrt{12}},\ n,m,n',m'=0,1,2.$$

证明　$\langle\boldsymbol{\psi}_{0,0}|\boldsymbol{\phi}_{1,0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 00'|+\langle 11'|+\langle 22'|)\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+w|1\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+w^2|2\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)=$

$$\frac{1}{3}(\langle 0'|\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+w\langle 1'|\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+w^2\langle 2'|\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)=\frac{1}{6}(1+w\overline{w}+w^2\overline{w})=\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}.$$

$$\langle\boldsymbol{\psi}_{0,2}|\boldsymbol{\phi}_{0,0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 02'|+\langle 10'|+\langle 21'|)\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+|1\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+|2\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)=$$

$$\frac{1}{3}(\langle 2'|\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+\langle 0'|\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+\langle 1'|\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)=\frac{1}{6}(1+w+1)=\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}.$$

$$\langle\boldsymbol{\psi}_{3,0}|\boldsymbol{\phi}_{2,0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(\langle 03'|+\langle 13'|+\langle 23'|)\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+w^2|1\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+w|2\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)=$$

$$\frac{1}{3}(\langle 3'|\boldsymbol{\varepsilon}'_0\rangle+w^2\langle 3'|\boldsymbol{\varepsilon}'_1\rangle+w\langle 3'|\boldsymbol{\varepsilon}'_2\rangle)=\frac{1}{6}(1+w^2w+w)=\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}.$$

对上述结果分别取模可得 $|\langle \boldsymbol{\psi}_{3,0}|\boldsymbol{\phi}_{2,0}\rangle| = |\langle \boldsymbol{\psi}_{0,2}|\boldsymbol{\phi}_{0,0}\rangle| = |\langle \boldsymbol{\psi}_{0,0}|\boldsymbol{\phi}_{1,0}\rangle| = \frac{1}{\sqrt{12}}$. 事实上,满足这种关系的完备的不可扩展的最大纠缠基并不唯一,还可以找到其他满足无偏条件的基. 例如,设空间 C^4 中的标准正交基为:

$$|\boldsymbol{\zeta}'_0\rangle = \frac{1}{2}(|0'\rangle - |1'\rangle + w|2'\rangle + w|3'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\zeta}'_1\rangle = \frac{1}{2}(w|0'\rangle + |1'\rangle - \overline{w}|2'\rangle + w|3'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\zeta}'_2\rangle = \frac{1}{2}(-|0'\rangle + \overline{w}|1'\rangle + w|2'\rangle + |3'\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle = \frac{1}{2}(-\overline{w}|0'\rangle - \overline{w}|1'\rangle - |2'\rangle + |3'\rangle).$$

由此同样可得到 $C^3 \otimes C^4$ 中的一组新的 UMEB: $|\boldsymbol{\varphi}_{n,m}\rangle = (\boldsymbol{U}_{n,m} \otimes \boldsymbol{I}_4)|\boldsymbol{\varphi}\rangle$, $n,m=0,1,2$. 其中 $|\boldsymbol{\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_0\rangle + |1\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_1\rangle + |2\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_2\rangle)$. 添加如下 3 个积态进行完备化,便可得到一组不同于上面两组的新的完备的不可扩展的最大纠缠基.

$$|\boldsymbol{\varphi}_{3,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{w}|0\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle + |1\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle + \overline{w}|2\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\varphi}_{3,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(w|0\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle + |1\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle + |2\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle),$$

$$|\boldsymbol{\varphi}_{3,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle + |1\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle + w|2\rangle|\boldsymbol{\zeta}'_3\rangle).$$

记 $\boldsymbol{I}_3 = \{|\boldsymbol{\varphi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$. 可以验证,完备的不可扩展的最大纠缠基 $\boldsymbol{I}_3 = \{|\boldsymbol{\varphi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$ 与 $\boldsymbol{I}_1 = \{|\boldsymbol{\psi}_{n,m}\rangle, n=0,1,2,3; m=0,1,2\}$ 也是无偏的.

参考文献:

[1] DiVincenzo D P, Mor T, Shor P W, et al. Unextendible product bases, uncompletable product bases and bound entanglement[J]. Commun Math Phys, 2003,238(3):379-410.

[2] Guo Yu, Du Shuanping, Li Xiulan, et al. Entangled bases with fixed schmidt number[J]. J Phys A: Math Theor, 2015,48(24):245301.

[3] Baumgartner B, Hiesmayr B C, Narnhofer H. The state space for two qutrits has a phase structure in its core[J]. Phys Rev A, 2006,74(3):032327.

[4] Baumgartner B, Hiesmayr B, Narnhofer H. A special simplex in the state space for entangled qudits[J]. J Phys A: Math Theor, 2007,40(28):7919-7938.

[5] Bravyi S, Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases[J]. Phys Rev A, 2009,84(4):042306.

[6] Chen B, Fei S M. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases[J]. Phys Rev A, 2013,88(3):169-172.

[7] Nizamidin H, Ma T, Fei S M. A note on mutually unbiased unextendible Maximally entangled bases in $C^2 \otimes C^3$[J]. Int J Theor Phys , 2015,54(1):326-333.

[8] Tao Yuanhong, Nan Hua, Zhang Jun, et al. Mutually unbiased maximally entangled bases in $C^d \otimes C^{kd}$[J]. Quantum Inf Process, 2015,14(6):2291-2300.

[9] 杨强,陶元红,南华,等. $C^2 \otimes C^3$ 中 Bell 基型不可扩展的最大纠缠基和互不偏基[J]. 吉林大学学报(理学版),2015,53(5):547-552.

[10] Nan Hua, Tao Yuanhong, Li Linsong, et al. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $C^d \otimes C^{d'}$[J]. Int J Theor Phys, 2015,54(3):927-932.

[11] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. New York: Cambridge University Press, 2000.