文章编号: 1004-4353(2017)01-0011-04

复模糊线性方程组及其应用

崔建斌[1], 张科[2]
(1. 陇东学院 数学与统计学院, 甘肃 庆阳 745000; 2. 西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 讨论了复模糊线性方程组 $\boldsymbol{Az}=\boldsymbol{w}$,其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 阶实值矩阵,$\boldsymbol{w}$ 是复模糊列向量,$\boldsymbol{z}$ 是模糊复未知向量. 通过使用复模糊数的中心获得了原复模糊线性方程组的模糊复解,并且分析了解的存在性条件,最后用 2 个数值算例验证了本文方法的可行性.

关键词: 模糊数; 复模糊线性系统; 复模糊数; 复模糊数中心; 模糊解
中图分类号: O29　　　**文献标识码:** A

Complex fuzzy linear system of equations and its application

CUI Jianbin[1], ZHANG Ke[2]
(1. *Mathematics and Statistics Institute*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*;
2. *College of Mathematics and Statistics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: In this paper, we studied the complex fuzzy system of linear equation $\boldsymbol{Az}=\boldsymbol{w}$, in which the coefficient matrix $\boldsymbol{A}$ was a rank real valued matrix with $n\times n$, $\boldsymbol{w}$ was a complex fuzzy column vector, and $\boldsymbol{z}$ was an unknown complex fuzzy vector. The fuzzy complex solution of the original complex fuzzy linear equation was expressed by the the complex fuzzy numbers center, and the existence condition of the solution was also discussed. Finally, the feasibility of the method was verified by two numerical examples.

Keywords: fuzzy number; complex fuzzy linear system; fuzzy complex number; complex fuzzy number center; fuzzy solution

线性系统方程(组)在数学、物理和工程等领域具有广泛应用. 在实际应用中,线性系统方程(组)常常涉及参数的不确定性,即表现为一个模糊数[1],因此在解决此类问题时,经常把它转化为一个模糊系统方程去考虑. 模糊线性系统最早由 M. Fridman 等于 1998 年提出[2],之后许多学者对实模糊线性系统进行了研究,并取得了一些研究成果[3-6]. 但在实际应用研究中,许多参数都是复数[8],而且这些复数涉及到不确定性,通常表现为复模糊数. 1989 年,J. J. Buckley 在文献[9]引入了复模糊数; 2009 年,模糊复线性系统的解被 T. Rahgooy 等考虑,并应用在电路分析之中[11]; 2010 年,M. A. Jahantigh 等研究了 $n\times n$ 复模糊线性系统的分析解[12]; 2012 年和 2014 年,D. Behera 等[13-14]讨论了系数矩阵为复数矩阵情形时的模糊线性系统的数值解; 2016 年,Guo 和 Zhang 等[15-16]研究了复模糊线性系统的最小解以及利用 QR -分解方法解复模糊线性方程. 鉴于上述研究,本文讨论了复模糊线性方程组 $\boldsymbol{Az}=\boldsymbol{w}$,其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 阶实值矩阵,$\boldsymbol{w}$ 是一列任意复模糊数向量,并获得了复模糊线性方程组的复解.

1　预备知识

定义 1(模糊数[1])　记 $E^1=\{u: R\to I=[0,1]\}$ 满足以下性质: 1) u 是正规的模糊集; 2) u 是凸模

收稿日期: 2017－01－13　　**基金项目:** 甘肃省科技计划资助项目(1606RJZM092)
作者简介: 崔建斌(1972—),男,副教授,研究方向为数值分析与数据处理.

糊集,即对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $\lambda\in[0,1]$,有 $uy(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min\{u(x),u(y)\}$;3) u 是上半连续函数;4) $[u]^0=\overline{\{x\in\mathbf{R}:u(x)>0\}}$ 是紧集.

引理 1[10] 对 $u\in E^1$,以 $\underline{u}(r)$,$\overline{u}(r)$ 记$[u]^r$ 的上、下端点,则 $\underline{u}(r)$ 和 $\overline{u}(r)$ 均为$[0,1]$上的函数,且满足:1) $\underline{u}(r)$ 单调非降左连续;2) $\overline{u}(r)$ 单调非增左连续;3) $\underline{u}(1)\leqslant\overline{u}(1)$;4) $\underline{u}(r)$ 和 $\overline{u}(r)$ 在 $r=0$ 处右连续. 反之,若对任何满足上述条件 1)—4) 的$[0,1]$上的函数 $a(r)$ 和 $b(r)$,存在唯一的模糊数 $u\in E^1$,使得$[u]^r=[a(r),b(r)]$, $r\in[0,1]$.

基于 Zadeh 的扩张定理,Dubois[10] 就模糊数的加法、减法和数乘给出了如下的计算公式. 设 $x=(\underline{x}(r),\overline{x}(r))$, $y=(\underline{y}(r),\overline{y}(r))$, $0\leqslant r\leqslant 1$ 和任意实数 k,有:

1) $x=y$ 当且仅当 $\underline{x}(r)=\underline{y}(r)$, $\overline{x}(r)=\overline{y}(r)$;

2) $x+y=(\underline{x}(r)+\underline{y}(r),\overline{x}(r)+\overline{y}(r))$;

3) $x-y=(\underline{x}(r)-\overline{y}(r),\overline{x}(r)-\underline{y}(r))$;

4) $kx=\begin{cases}(k\underline{x},k\overline{x}), & k\geqslant 0;\\ (k\overline{x},k\underline{x}), & k<0;\end{cases}$

5) $x\times y=\begin{pmatrix}\min(\underline{x}(r)\times\underline{y}(r),\underline{x}(r)\times\overline{y}(r),\overline{x}(r)\times\underline{y}(r),\overline{x}(r)\times\overline{y}(r))\\ \max(\underline{x}(r)\times\underline{y}(r),\underline{x}(r)\times\overline{y}(r),\overline{x}(r)\times\underline{y}(r),\overline{x}(r)\times\overline{y}(r))\end{pmatrix}$.

定义 2[13] 对任意模糊数 $u=[\underline{u}(r),\overline{u}(r)]$, $r\in[0,1]$,称 $u^c=\dfrac{\underline{u}(r)+\overline{u}(r)}{2}$, $r\in[0,1]$ 为模糊数 u 的模糊中心.

定义 3[13-14] 任意复模糊数可以表示为 $X=p+\mathrm{i}q$,其中 $p=(\underline{p}(r),\overline{p}(r))$, $q=(\underline{q}(r),\overline{q}(r))$, $r\in[0,1]$ 是模糊数. 于是复模糊数 $X=(\underline{X}(r),\overline{X}(r))=(\underline{p}(r)+\mathrm{i}\underline{q}(r),\overline{p}(r)+\mathrm{i}\overline{q}(r))$.

设任意复模糊数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$(其中 x_1,y_1,x_2,y_2 是模糊数),则复模糊数的加法和数乘计算如下:

1) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$;

2) $z_1\times z_2=\{(x_1\times x_2)-(y_1\times y_2)\}+\mathrm{i}\{(x_1\times y_2)+(y_1\times x_2)\}$.

定义 4[13] 对任意复模糊 $X=(\underline{X}(r),\overline{X}(r))=(\underline{p}(r)+\mathrm{i}\underline{q}(r),\overline{p}(r)+\mathrm{i}\overline{q}(r))$,称 $X^c=\dfrac{\underline{X}+\overline{X}}{2}=\dfrac{(\underline{p}(r)+\overline{p}(r))}{2}+\mathrm{i}\dfrac{(\underline{q}(r)+\overline{q}(r))}{2}=p^c+\mathrm{i}q^c$(其中 p^c,q^c 是模糊数 p,q 的模糊中心)为复模糊数 X 的中心.

2 复模糊线性方程组的解法

定义 5[12] $n\times n$ 模糊线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}z_1+a_{12}z_2+\cdots+a_{1n}z_n=w_1,\\ a_{21}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{2n}z_n=w_2,\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}z_1+a_{n2}z_2+\cdots+a_{nn}z_n=w_n,\end{cases}\tag{1}$$

其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 阶实矩阵,并且 $w_i=b_i+\mathrm{i}d_i$, $1\leqslant i\leqslant n$ 是复模糊数,称方程组(1) 为复模糊线性方程组.

方程(1) 用矩阵表示为

$$\boldsymbol{Az}=\boldsymbol{w},\tag{2}$$

于是,方程(2) 可表示为

$$A(e+\mathrm{i}f)=b+\mathrm{i}d\text{(其中 } x_j=e_j+\mathrm{i}f_j\text{)}. \tag{3}$$

定理 1 复模糊线性方程组(2)可转化为如下分明线性方程组:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^c=\boldsymbol{w}^c,\text{ 即}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j^c=b_i^c,\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j^c=d_i^c \tag{4}$$

和 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j),(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]=(\underline{w}_i,\overline{w}_i)$,即

$$\sum_{a_{ij}\geqslant 0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]+\sum_{a_{ij}<0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]=\underline{w}_i; \tag{5}$$

$$\sum_{a_{ij}\geqslant 0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]+\sum_{a_{ij}<0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]=\overline{w}_i. \tag{6}$$

证明 方程(3)可写成如下形式:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(e_j+\mathrm{i}f_j)=w_i, \tag{7}$$

则根据定义 4,有 $z_j=(\underline{z}_j,\overline{z}_j)=(\underline{e}_j+\mathrm{i}\underline{f},\overline{e}+\mathrm{i}\overline{f})=((e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j),(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j))$.

设 $z_j^c=e_j^c+\mathrm{i}f_j^c$, $\Delta z_j=\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j$ 和 $w=(\underline{w},\overline{w})$,则方程(7)可化为方程

$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j),(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]=(\underline{w}_i,\overline{w}_i)$. 接下来,利用模糊数 e,f,w 的中心方程(7)变为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j^c=b_i^c,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j^c=d_i^c. \tag{8}$$

将通过方程(8)获得的 e_j^c,f_j^c 值代入方程(7)可得:

$$\sum_{a_{ij}\geqslant 0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]+\sum_{a_{ij}<0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]=\underline{w}_i;$$

$$\sum_{a_{ij}\geqslant 0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]+\sum_{a_{ij}<0}a_{ij}\left[(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)\right]=\overline{w}_i.$$

由以上方程能得到 $\Delta e_j,\Delta f_j$. 于是,可得到解为

$$z_j=(\underline{z}_j,\overline{z}_j)=(\underline{e}_j+\mathrm{i}\underline{f},\overline{e}+\mathrm{i}\overline{f})=((e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)-(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j),(e_j^c+\mathrm{i}f_j^c)+(\Delta e_j+\mathrm{i}\Delta f_j)).$$

定理 2 如果 $\boldsymbol{z}$ 是复模糊方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}$ 的一个复模糊解,那么 $\boldsymbol{z}=(\underline{z},\overline{z})$ 是复模糊线性方程组(1)的解.

证明 由 $\begin{cases}z^c=\dfrac{\underline{z}+\overline{z}}{2}\\ \Delta z=\dfrac{\overline{z}-\underline{z}}{2}\end{cases}$,可得到 $\begin{cases}\underline{z}=z^c-\Delta z\\ \overline{z}=z^c+\Delta z\end{cases}$,于是得到 $\boldsymbol{z}=(\underline{z},\overline{z})$. 又因为 $\boldsymbol{z}$ 是复模糊方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}$ 的一个复模糊解,所以 $\boldsymbol{z}=(\underline{z},\overline{z})=(z^c-\Delta z,z^c+\Delta z)$ 是复模糊线性方程组(1)的解.

推论 1 如果 $\boldsymbol{w}$ 是对称复模糊向量,那么 $\boldsymbol{z}$ 也是对称复模糊向量.

定义 6 设 $\boldsymbol{z}=(\underline{z}_i(r),\overline{z}_i(r))$, $1\leqslant r\leqslant n$ 表示 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}$ 的一个解,模糊数向量 $\boldsymbol{U}=(\underline{u}_i(r),\overline{u}(r))$, $1\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant r\leqslant 1$ 有如下表示:

$$\underline{u}_i(r)=\min\{\underline{x}_i(r),\overline{x}_i(r),\underline{x}_i(1)\},\quad \overline{u}_i(r)=\max\{\underline{x}_i(r),\overline{x}_i(r),\underline{x}_i(1)\}.$$

若 $(\underline{z}_i(r),\overline{z}_i(r))$, $1\leqslant i\leqslant n$ 都是复模糊数,并且 $\underline{u}_i(r)=\underline{x}_i(r)$, $\overline{u}_i(r)=\overline{x}_i(r)$,那么 $\boldsymbol{U}$ 称为强复模糊解;否则,$\boldsymbol{U}$ 为弱复模糊解.

3 算例分析

例 1 考虑系数矩阵 2×2 阶复模糊线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = (r + \mathrm{i}(1 + r), (2 - r) + \mathrm{i}(3 - r)), \\ x_1 + 3x_2 = ((4 + r) + \mathrm{i}(r - 4), (7 - 2r) + \mathrm{i}(-1 - 2r)), \end{cases}$$

利用方程(4),有 $\begin{cases} e_1^c + e_2^c = 1, \\ e_1^c + 3e_2^c = \dfrac{11 - r}{2} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} f_1^c + f_2^c = 2, \\ f_1^c + 3f_2^c = \dfrac{-5 - r}{2}, \end{cases}$ 解得 $e_1^c = \dfrac{17 - r}{8}$, $e_2^c = \dfrac{9 - r}{8}$, $f_1^c = \dfrac{7 - r}{8}$, $f_2^c = \dfrac{-9 - r}{8}$. 将 $e_1^c, e_2^c, f_1^c, f_2^c$ 代入方程(5),得

$$\begin{cases} (\Delta e_1 + \Delta e_2) + \mathrm{i}(\Delta f_1 + \Delta f_2) = (1 - r) + \mathrm{i}(1 - r), \\ (\Delta e_1 + 3\Delta e_2) + \mathrm{i}(\Delta f_1 + 3\Delta f_2) = \dfrac{3 - 3r}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{3 - 3r}{2}, \end{cases}$$

解得 $\Delta e_1 = \dfrac{3 - 3r}{4}$, $\Delta e_2 = \dfrac{1 - r}{4}$, $\Delta f_1 = \dfrac{3 - 3r}{4}$, $\Delta f_2 = \dfrac{1 - r}{4}$. 于是有 $e_1 = \left(\dfrac{11 + 5r}{8}, \dfrac{23 - 7r}{8}\right)$; $e_2 = \left(\dfrac{1 + 5r}{8}, \dfrac{13 - 7r}{8}\right)$; $f_1 = \left(\dfrac{7 + r}{8}, \dfrac{11 - 3r}{8}\right)$; $f_2 = \left(\dfrac{-11 + r}{8}, \dfrac{-7 - 3r}{8}\right)$. 因此,

$$\begin{cases} x_1 = e_1 + \mathrm{i} f_1 = \left(\dfrac{11 + 5r}{8} + \mathrm{i}\,\dfrac{1 + 5r}{8}, \dfrac{23 - 7r}{8} + \mathrm{i}\,\dfrac{13 - 7r}{8}\right), \\ x_2 = e_2 + \mathrm{i} f_2 = \left(\dfrac{7 + r}{8} + \mathrm{i}\,\dfrac{-11 + r}{8}, \dfrac{11 - 3r}{8} + \mathrm{i}\,\dfrac{-7 - 3r}{8}\right). \end{cases}$$

例 2 考虑如图 1 所示的电路问题.

由图 1 电路可得到如下方程组:

$$\begin{cases} 3I_1 - I_2 = [(4 + r, 6 - r) + \mathrm{i}(-1 + r, 1 - r)] - \\ \qquad [(r, 2 - r) + \mathrm{i}(1 - r, 3 - r)], \\ -I_1 + 4I_2 = [(r, 2 - r) + \mathrm{i}(1 - r, 3 - r)] + \\ \qquad [(-2 + r, -r) + \mathrm{i}(-3 + r, -1 - r)], \end{cases}$$

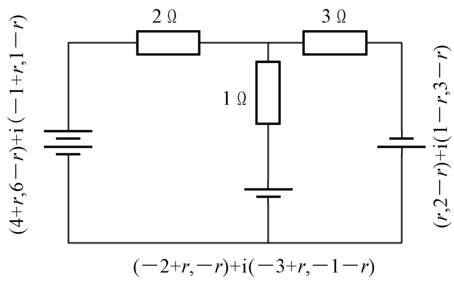

图 1 模糊电流-电压电路图

其等价方程组为

$$\begin{cases} 3I_1 - I_2 = (2r + 2, 6 - 2r) + \mathrm{i}(2r - 4, 0), \\ -I_1 + 4I_2 = (2r - 2, 2 - 2r) + \mathrm{i}(-2, 2 - 2r). \end{cases}$$

利用方程(4),得到 $\begin{cases} 3e_1^c - e_2^c = 4, \\ -e_1^c + 4e_2^c = 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3f_1^c - f_2^c = r - 2, \\ -f_1^c + 4f_2^c = r, \end{cases}$ 解得 $e_1^c = 11$, $e_2^c = \dfrac{4}{11}$, $f_1^c = \dfrac{-8 - 7r}{11}$, $f_2^c = \dfrac{-2r - 2}{11}$. 将 $e_1^c, e_2^c, f_1^c, f_2^c$ 代入方程(5)中,解得 $\Delta e_1 = \dfrac{1\,431 - 66r}{121}$, $\Delta e_2 = \dfrac{-586 - 44r}{121}$, $\Delta f_1 = \dfrac{42 - 163r}{121}$, $\Delta f_2 = \dfrac{44 + 38r}{121}$. 于是,

$$\begin{cases} \mathrm{I}_1 = \left(\dfrac{-1\,310 + 66r}{121} + \mathrm{i}\,\dfrac{-130 + 86r}{121}, \dfrac{1\,552 - 66r}{121} + \mathrm{i}\,\dfrac{-46 - 240r}{121}\right), \\ I_2 = \left(\dfrac{630 + 44r}{121} + \mathrm{i}\,\dfrac{16r + 22}{121}, \dfrac{-542 - 44r}{121} + \mathrm{i}\,\dfrac{-60r - 66}{121}\right). \end{cases}$$

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Inform Control, 1965,8:338-353.

[2] Friedman M, Ming M, Kandel A. Fuuzy linear systems[J]. Fuzzy Sets Syst, 1998,96:201-209.

[3] Asady B, Abbasbandy S, Alavi M. Fuzzy general linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 169:34-40.

[4] Dehghan M, Hashemi B, Ghatee M. Computational methods for solving fully fuzzy linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,179:328-343.

(下转第 67 页)

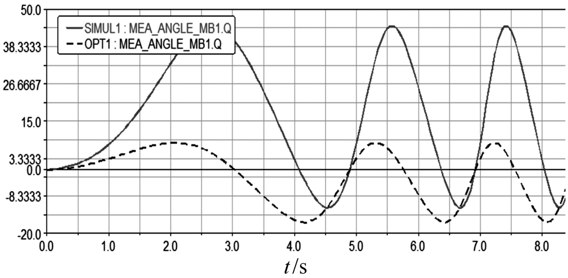

图 6　优化前后的压力角变化曲线

3　结论

本文利用 ADAMS 仿真软件对肘杆式机械压力机的参数化模型进行了仿真优化，结果表明：优化后压力机工作过程中的最大压力角较优化前减小了 36.6169°，优化效果明显，表明压力机的传力性能获得了显著提升. 本文的研究结果对压力机传动机构的参数设计具有一定的参考价值，达到了预期的优化目的. 本文在研究中未能对机构中刚性较高的构件进行柔性化处理，所以会对计算结果的精确度有一定的影响，今后将对此做进一步研究，以提高本文方法的优化性能.

参考文献：

［1］ 李烨健，孙宇，胡峰峰. 多杆高速机械压力机机构优化设计［J］. 中国机械工程，2015，26（1）：31-36.

［2］ 赵升吨，邵中魁，盛朝辉. 机械压力机工作机构合理性探讨［J］. 锻压装备与制造技术，2013，48（3）：14-18.

［3］ 孙昕煜，孙宇，彭斌彬. 多连杆压力机优化设计［J］. 机械制造与自动化，2015，44（2）：29-32.

［4］ 程永奇，张鹏，魏良模. 伺服压力机肘杆机构优化设计［J］. 机械工程师，2010（5）：60-61.

［5］ 莫健华，张正斌，吕言，等. 三角肘杆式伺服压力机传动机构的仿真与优化［J］. 锻压装备与制造技术，2011，46（1）：21-24.

［6］ 张晨，黄健华，闫辉，等. 伺服压力机三角连杆式传动机构的仿真与优化［J］. 锻压装备与制造技术，2013，48（3）：28-32.

［7］ Ham K C，Jang D H. Kinematical analysis on the several linkage drives for mechanical presses［J］. Journal of Mechanical and Technology，2009，23：512-524.

［8］ 徐元. 基于 ADAMS 的双曲柄压力机七杆机构的运动仿真及优化设计［J］. 重庆工商大学学报（自然科学版），2010，27（5）：509-512.

（上接第 14 页）

［5］ Dehghan M，Hashem B. Solution of the fully fuzzy linear systems using the decomposition procedure［J］. Applied Mathematics and Computation，2006，182：1568-1580.

［6］ Allahviranloo T. Numerical methods for fuzzy system of linear equation［J］. Appl Math，2005，162：189-196.［7］ Wu Cong-Xin，Ma Ming. Embedding problem of fuzzy number space：part I［J］. Fuzzy Sets and Systems，1991，44：33-38.

［8］ Filev D. Fuzzy modeling of complex systems［J］. Int J Approx Reason，1991，5：281-290.

［9］ Buckley J J. Fuzzy complex number［J］. Fuzzy Sets and Systems，1989，33：333-345.

［10］ Dubois D，Prade H. Operations on fuzzy numbers［J］. International Journal of Systems Science，1978，9：613-626.

［11］ Rahgooy T，Yazdi H S，Monsefi R. Fuzzy complex system of linear equation applied to circuit analysis［J］. Int J Comput Electr Eng，2009，1：535-541.

［12］ Jahantigh M A，Khezerloo S，Khezerloo M. Complex fuzzy linear systems［J］. Int J Indust Math，2010，2：21-28.

［13］ Behera D，Chakraverty S. A new method for solving real and complex fuzzy system of linear equation［J］. Comput Math Model，2012，23（4）：507-518.

［14］ Behera D，Chakraverty S. Solving fuzzy complex system of linear equation［J］. Information Sciences，2014，277：154-162.

［15］ Guo X，Zhang K. Minimal solution of complex fuzzy linear systems［J］. Advances in Fuzzy Systems，2016，1：1-9.

［16］ Zhang K，Guo X. Solving complex fuzzy linear system of equations by using QR-decomposition method［J］. International Journal of Engineering Research and Science，2016，2：54-63.

［17］ Guo X，Zhang K. Solving fuzzy matrix equation of the form $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$［J］. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，2017，32：2771-2778.

［18］ 张贤达. 矩阵分析与应用［M］. 北京：清华大学出版社，2004：10-30.