

文章编号: 1004-4353(2017)01-0007-04

一类两体量子系统中无偏的最大纠缠基的构造

秦利丽, 陈馨, 代奇阜, 南华

(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 研究一类两体量子系统中无偏基的构造问题. 在两体量子系统 $C^d \otimes C^{d'}$ 中已知两组无偏的最大纠缠基的条件下, 给出两体系统 $C^d \otimes C^{m \cdot d'}$ 中无偏的最大纠缠基的一种构造方法, 本文结果推广了文献[6] 中的结果.

关键词: 无偏基; 量子纠缠; 最大纠缠态

中图分类号: O177.3

文献标识码: A

Construction of mutually unbiased maximally entangled bases in a class of bipartite quantum system

QIN Lili, CHEN Xin, DAI Qifu, NAN Hua

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: The construction of mutually unbiased maximally entangled bases in a class of bipartite quantum system is studied in this paper. A systematic way of constructing mutually unbiased maximally entangled bases (MUMEBs) in the bipartite quantum system $C^d \otimes C^{m \cdot d'}$ is presented, on condition that a pair of MUMEBs is given in $C^d \otimes C^{d'}$, which generalize the main result in the reference [6].

Keywords: mutually unbiased bases; quantum entanglement; maximally entangled bases

0 引言

对于一个量子系统, 为获知量子态的信息, 需要对大量的全同量子态的备份进行多次基测量. 目前, 测量基有很多种, 其中无偏基是最佳的测量基, 它已被广泛应用于密码协议、量子纠错码、量子摄影术、Wigner 函数以及量子信息处理等方面^[1-2]. Hilbert 空间 C^d 中的两组归一化正交基 $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^d$ 和 $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^d$ 称为无偏基^[3] (简记为 MUB) 当且仅当 $|\langle a_i | b_j \rangle|^2 = \frac{1}{d}$ ($i, j=1, 2, \dots, d$). 在量子系统 C^d 中, 无偏基的最多数目 $N(d)$ 不超过 $d+1$ 个, d 是素数幂时达到 $d+1$ 个, 但 d 是非素数幂时, 即便是对最小的 $d=6$ 的情形, $N(d)$ 也不确定, 因此讨论无偏基的构造问题具有一定的实际意义.

量子纠缠是量子力学、量子信息理论中非常重要的特性, 尤其是最大纠缠在量子信息处理等方面有着重要应用. 在多体量子系统中, 无偏基的构造较为复杂, 可以由直积基、最大纠缠基、不可拓展直积基和不可拓展最大纠缠基等构成^[4-5]. 由于无偏基的构造以及无偏基的纠缠结构是提供最佳量子基测量的有效途径, 所以关于无偏基的研究成为量子信息理论中的重要内容, 也是近年来的研究热点. 在两体量子系统 $C^d \otimes C^{d'}$ 存在一组无偏基的条件下, 文献[6] 给出了在 $C^d \otimes C^{2^l d'}$ 系统中构造无偏基的一种方

法. 本文在相同的条件下, 研究了更为一般的 $C^d \otimes C^{m'd'}$ 系统中无偏的最大纠缠基的构造方法, 进而推广了文献[6]的研究结果.

1 两体量子系统 $C^d \otimes C^d$ 中无偏的最大纠缠基

定义 1^[7] 在两体系统 $A \otimes B$ (A 是 d 维, B 是 d' 维) 中, 称态矢 $|\varphi\rangle$ 为 $d \otimes d'$ 最大纠缠态当且仅当对于任一给定的系统 A 的归一化正交完备基 $\{|i_A\rangle\}$ 总存在子系统 B 的归一化正交基 $\{|i_B\rangle\}$, 使得

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle.$$

定义 2 一个态矢的集合 $\{|\phi_i\rangle \in C^d \otimes C^{d'}; i=1, 2, \dots, dd'\}$ 称为最大纠缠基(简记为 MEB) 当且仅当满足以下条件: (i) $|\phi_i\rangle, i=1, 2, \dots, dd'$, 均为最大纠缠态; (ii) $\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j=1, \dots, dd'$.

设 $\{|k\rangle\}_{k=0}^{d-1}$ 是系统 C^d 的一组标准正交基, 其中 $|k\rangle$ 表示第 k 个分量为 1, 其余分量为 0 的单位态矢. 由任意酉矩阵 A 可以得到不同于 $\{|k\rangle\}_{k=0}^{d-1}$ 的另一组标准正交基 $\{|\varepsilon_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$:

$$(|\varepsilon_0\rangle, |\varepsilon_1\rangle, \dots, |\varepsilon_{d-1}\rangle) = (|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle) A. \quad (1)$$

运用文献[8] 中构造最大纠缠基的方法, 在 $C^d \otimes C^d$ 中可以得到如下两组最大纠缠基:

$$|\phi_{n,m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \zeta_d^{nj} |j \oplus m\rangle |j\rangle, \quad n, m=0, 1, \dots, d-1; \quad (2)$$

$$|\psi_{n,m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \zeta_d^{nj} |j \oplus m\rangle |\varepsilon_j\rangle, \quad n, m=0, 1, \dots, d-1, \quad (3)$$

其中 $\zeta_d = e^{\frac{2\pi i}{d}}$, $j \oplus m$ 表示 $(j+m) \bmod d$. 上述两组基彼此无偏的充要条件是

$$|\langle \phi_{n_1, m_1} | \psi_{n_2, m_2} \rangle| = \frac{1}{d}, \quad n_1, m_1, n_2, m_2 = 0, 1, \dots, d-1. \quad (4)$$

由于式(4) 等价于对任意的 $j, n=0, 1, \dots, d-1$, 有 $|\langle \varepsilon_j | \beta_n \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}$ 成立, 这里 $|\beta_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{p=0}^{d-1} \zeta_d^{np} |p\rangle$. 由此

可知无偏的关键在于找到式(1) 中适当的过渡矩阵 A .

设 $|\varepsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} (1, e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_{d-1}})^T$, 其中 $\alpha_p \in [0, 2\pi]$ ($p=1, 2, \dots, d-1$) 是实参数. 令 $\alpha_0 = 0$,

$$\left| \sum_{p=0}^{d-1} \zeta_d^{np} e^{i\alpha_p} \right| = \sqrt{d}, \quad n=0, 1, \dots, d-1, \quad (5)$$

则 $|\langle \varepsilon | \beta_n \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}$. 解式(5) 对应的方程组, 其任意一组解就对应 C^d 系统的一组基, 记作 $\{|\varepsilon_p\rangle (p=0, 1,$

$\dots, d-1)\}$. 以 $|\varepsilon_p\rangle$ 作为列向量作成的矩阵 A (显然是一个酉矩阵) 就是本文需要的过渡矩阵. 下面仅列出 $2 \leq d \leq 5$ 时量子系统 $C^d \otimes C^d$ 中过渡矩阵 A 的实例.

注 1 以下仅列出每个系统中的一个过渡矩阵, 当然过渡矩阵不只存在一个. 利用列出的过渡矩阵 A , 由式(1) 和式(3) 显然可以在 $C^d \otimes C^d$ 中得到与式(2) 无偏的另一组最大纠缠基; 当 $d > 5$ 时, 过渡矩阵仍然可求得, 只是计算量偏大.

系统 1 $C^2 \otimes C^2$ 中过渡矩阵: $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

系统 2 $C^3 \otimes C^3$ 中过渡矩阵: $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega & 1 & 1 \\ \omega & \bar{\omega} & \omega \\ \omega & \omega & \bar{\omega} \end{pmatrix}$, 其中 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

$$\text{系统 3 } \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \text{ 中过渡矩阵: } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{系统 4 } \mathbb{C}^5 \otimes \mathbb{C}^5 \text{ 中过渡矩阵: } \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \lambda & \lambda^3 \\ 1 & \lambda^3 & \lambda & \lambda^4 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^4 & \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

2 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{m^{l d'}}$ 中无偏的最大纠缠基系统

文献[9]给出了在 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'}$ ($d' = kd$) 中构造无偏的最大纠缠基的方法,该方法对维数相对低的系统效果较好,但在 2 个子系统维数很大时该方法不易操作. 在两体系统 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'}$ 无偏的最大纠缠基存在的条件下,本文考虑在更高维的系统 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{m^{l d'}}$ 中无偏的最大纠缠基系统的构造问题.

引理 1^[10] 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ 为酉矩阵的充分必要条件是 \mathbf{A} 的 d 个行向量与 d 个列向量都是 \mathbb{C}^d 的一组标准正交基.

引理 2 若 \mathbf{A} 是一个 d 阶酉矩阵,则矩阵列 $\{\mathbf{A}_n\}$ 是酉矩阵列,其中 $\mathbf{A}_n = \overbrace{\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}}^{n \uparrow}$.

证明 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 d 阶酉矩阵,由 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{A} & a_{12}\mathbf{A} & \cdots & a_{1d}\mathbf{A} \\ a_{21}\mathbf{A} & a_{22}\mathbf{A} & \cdots & a_{2d}\mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}\mathbf{A} & a_{d2}\mathbf{A} & \cdots & a_{dd}\mathbf{A} \end{pmatrix}$ 和引理 1 有

$$\mathbf{A}_2^\dagger \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^* \mathbf{A} & a_{12}^* \mathbf{A} & \cdots & a_{1d}^* \mathbf{A} \\ a_{12}^* \mathbf{A} & a_{22}^* \mathbf{A} & \cdots & a_{2d}^* \mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1d}^* \mathbf{A} & a_{2d}^* \mathbf{A} & \cdots & a_{dd}^* \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{A} & a_{12}\mathbf{A} & \cdots & a_{1d}\mathbf{A} \\ a_{21}\mathbf{A} & a_{22}\mathbf{A} & \cdots & a_{2d}\mathbf{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}\mathbf{A} & a_{d2}\mathbf{A} & \cdots & a_{dd}\mathbf{A} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{d^2},$$

因此由数学归纳法很容易证得 \mathbf{A}_n ($n \in \mathbb{N}^+$) 都是酉矩阵.

设 $\{|\mathbf{p}\rangle\}_{p=0}^{d'-1}$ 与 $\{|\mathbf{v}_p\rangle\}_{p=0}^{d'-1}$ 是 $\mathbb{C}^{d'}$ 中两组标准正交基,由于已知在 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{d'}$ ($d' = kd$) 中一定存在这样的两组最大纠缠基:

$$|\boldsymbol{\phi}_{n,m}'\rangle = (\mathbf{U}_{nm} \otimes \mathbf{I}_{d'}) |\boldsymbol{\phi}'\rangle, \quad |\boldsymbol{\psi}_{n,m}'\rangle = (\mathbf{U}_{nm} \otimes \mathbf{I}_{d'}) |\boldsymbol{\psi}'\rangle, \quad (6)$$

其中: $n, m = 0, 1, \dots, d-1$; $t = 0, 1, \dots, k-1$; $\mathbf{U}_{nm} = \sum_{j=0}^{d-1} \zeta_d^{nj} |j \oplus m\rangle |j\rangle$; $|\boldsymbol{\phi}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{p=0}^{d-1} |\mathbf{p}\rangle |(p+dt)'\rangle$;

$|\boldsymbol{\psi}'\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{p=0}^{d-1} |\mathbf{p}\rangle |\mathbf{v}'_{(p+dt)}\rangle$. 若这两组最大纠缠基无偏,则必存在 $\{|\mathbf{p}\rangle\}_{p=0}^{d'-1}$ 到 $\{|\mathbf{v}_p\rangle\}_{p=0}^{d'-1}$ 的过渡矩阵 \mathbf{M} :

$$(|\mathbf{v}_0\rangle, |\mathbf{v}_1\rangle, \dots, |\mathbf{v}_{d'-1}\rangle) = (|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d'-1\rangle) \mathbf{M},$$

使得下式成立:

$$|\langle \boldsymbol{\phi}'_{n_1, m_1} | \boldsymbol{\psi}'_{n_2, m_2} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{dd'}} \quad n_1, n_2, m_1, m_2 = 0, 1, \dots, d-1; \quad t_1, t_2 = 0, 1, \dots, k-1. \quad (7)$$

设 \mathbf{A} 是 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m$ 系统中形如式(2)和式(3)的两组无偏的最大纠缠基对应的过渡矩阵,当 $2 \leq m \leq 5$ 时, \mathbf{A} 就是上述列出的 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 到 $\mathbb{C}^5 \otimes \mathbb{C}^5$ 中过渡矩阵. 根据引理 2,再利用 \mathbf{A} 和 \mathbf{M} 可以得到 $\mathbb{C}^{m^{l d'}}$ 上不同于标准正交基 $\{|\mathbf{p}\rangle\}_{p=0}^{m^{l d'}-1}$ 的标准正交基 $\{|\boldsymbol{\mu}_p\rangle\}_{p=0}^{m^{l d'}-1}$:

$$(|\mu_0\rangle, |\mu_1\rangle, \cdots, |\mu_{m^l d'-1}\rangle) = (|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |m^l d'-1\rangle) B,$$

其中 $B = A_l \otimes M$, $A_l = \overbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}^{l \uparrow}$.

对于 $n, m = 0, 1, \cdots, d-1$; $s = 0, 1, \cdots, m^l-1$; $t = 0, 1, \cdots, k-1$, 设

$$|\phi_{n,m}^{st}\rangle = (U_{nm} \otimes I_{m^l d'}) |\phi^{st}\rangle, \quad |\psi_{n,m}^{st}\rangle = (U_{nm} \otimes I_{m^l d'}) |\psi^{st}\rangle, \tag{8}$$

其中 $|\phi^{st}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{p=0}^{d-1} |p\rangle |(d's + p + dt)'\rangle$, $|\psi^{st}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{p=0}^{d-1} |p\rangle |v'_{(d's+p+dt)}\rangle$.

定理 1 若两体量子系统 $C^d \otimes C^{d'}$ ($d' = kd$) 中存在形如式(6)的一组无偏的最大纠缠基, 则式(8)中的两个最大纠缠基就是系统 $C^d \otimes C^{m^l d'}$ 的一组无偏基.

证明 显然式(8)中的两组基全都是由 $C^d \otimes C^{m^l d'}$ 系统中最大纠缠态构成的. 另外, 对于 $n_1, n_2, m_1, m_2 = 0, 1, \cdots, d-1$; $s_1, s_2 = 0, 1, \cdots, m^l-1$; $t_1, t_2 = 0, 1, \cdots, k-1$, 由式(7)有

$$|\langle \phi_{n_1, m_1}^{t_1 t_1} | \psi_{n_2, m_2}^{s_2 t_2} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{m^l}} |\langle \phi_{n_1, m_1}^{t_1} | \psi_{n_2, m_2}^{t_2} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{m^l}} \frac{1}{\sqrt{dd'}}.$$

注 2 当 $m = 2$ 时, 定理 1 的结果就是文献[6]中的主要结论.

参考文献:

[1] Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H, et al. Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80:3891-3894.

[2] Bennett C H, Brassard G, Popescu S, et al. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels[J]. Phys Rev Lett, 1996, 76:722-725.

[3] 雷丽霞, 王天娇, 南华. $C^2 \otimes C^6$ 中的最大纠缠基与无偏基[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2014, 40(4):311-313.

[4] Bravyi S, Smolin J A. Unextendible maximally entangled bases[J]. Phys Rev A, 2011, 84:042306.

[5] 王天娇, 南华. $C^2 \otimes C^4$ 中无偏的最大纠缠基的构造[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2015, 41(2):132-135.

[6] Zhang Jun, Tao Yuanhong, Nan Hua, et al. Construction of mutually unbiased bases in $C^d \otimes C^{2^l d'}$ [J]. Quantum Inf Process, 2015, 14:2635-2644.

[7] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, et al. Mixed maximally entangled states[J]. Quant Inf Comput, 2012, 12(1/2):63-73.

[8] Tao Y H, Nan H, Zhang J, et al. Mutually unbiased maximally entangled bases in $C^d \otimes C^{kd}$ [J]. Quant Inf Process, 2015, 14:2291-2300.

[9] Nan H, Tao Y H, Li L S, et al. Unextendible maximally entangled bases and mutually unbiased bases in $C^d \otimes C^{d'}$ [J]. Int J Theor Phys, 2015, 54:927-932.

[10] 苏育才, 姜翠波, 张跃辉. 矩阵理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006:97-108.