文章编号: 1004-4353(2016)04-0315-03

刮板沉降箱式除尘可修复系统解的存在唯一性

范奕杰[1], 赵志欣[1], 李大勇[2], 李相斌[3], 周艳巍[4*]

(1.长春师范大学 数学学院, 吉林 长春 130032; 2.延边三中, 吉林 敦化 133700;
3.海拉尔第二中学 数学组, 内蒙古 呼伦贝尔 021000; 4.延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 对部件寿命服从指数分布、修理时间服从一般分布条件下的刮板沉降箱式除尘可修复系统进行了分析,并运用积分方程理论讨论了系统非负解的存在唯一性.

关键词: 可修复系统; 积分-微分方程组; 非负解

中图分类号: O29 **文献标识码:** A

The existence and uniqueness of solution of scraper subsidence chamber dust removing reparable system

FAN Yijie[1], ZHAO Zhixin[1], LI Dayong[2], LI Xiangbin[3], ZHOU Yanwei[4*]

(1. *Dept. of Math.*, *Changchun Normal University*, *Changchun* 130032, *China*; 2. *Yanbian No. 3 Middle School*, *Dunhua* 133700, *China*; 3. *The No. 2 Middle School of Hailar*, *Hulun Buir* 021000, *China*; 4. *Dept. of Math.*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Under the conditions of the life time of unit following exponential distribution and repair time subjecting to the general distribution, this paper analyzes the scraper settling chamber Reparable system with dust removing. We discusses the problem of the existence and uniqueness of the system solution by integral equation theory.

Keywords: reparable system; integral differential equations; non-negative solution

近年来,应用广义 Markov 过程建立可修复系统模型的研究取得了很大进展. 1963 年,Gaver[1] 将增补变量法引入可靠性研究之后,B. S. Dhillon 和 N. Yang 等[2-6] 建立了具有冷、热储备系统和人机系统等一系列可修复系统的数学模型. 但是这些研究大多是采用 Laplace 变换和 Laplace-Stieltjes 变换得到系统稳态可用度等可靠性指标,而对于系统解的存在性、唯一性和渐进稳定性等并没有进行进一步地研究. 2011 年,陶有德等[7] 通过算子半群方法分析了一类可修复计算机系统的适定性;2012 年,吕鲲[8] 利用范数指标泛函作为衡量控制变量的标准,采用极小化序列研究了一类可修复人机系统解的最优控制问题;2013 年,赵志欣等[9] 通过算子半群和谱分析的方法分析了刮板沉降箱式可修复系统的稳定性.

刮板沉降箱式除尘系统是指采用箱式管道作为风送主管道,箱体上部设有混合气体入口和沉降气体出口,底部为沉降物出口的一种除尘系统. 其中箱式管道可视为一个尘降箱,并且箱式管道相当于一个恒压真空室,这可以使得各分支吸尘管道吸尘风速恒定. 该系统通过设置在适当位置的压力传感器和 PLC 的计算来适时调整风机的风量和风压,以此达到节能目的,并极大地避免除尘效率低和压力损失较大等问题[10]. 本文在文献[9]的基础上,以刮板沉降箱式除尘系统为研究对象,运用积分方程理论研

收稿日期: 2016-09-23 **基金项目:** 长春师范大学自然科学基金资助项目(2013004)
* **通信作者:** 周艳巍(1983—),男,讲师,研究方向为可靠性研究.

究该系统的非负解存在唯一性问题.

1 数学模型

刮板沉降箱式除尘可修复系统分为节能和除尘两个部分.节能部分由压力传感器、PLC计算机和变频器3个部件组成,除尘部分由排尘风机和刮板沉降箱组成.该系统运行时可能出现以下几种状态:状态 S_0 为节能部分和除尘部分均正常工作,系统处于正常工作状态;状态 S_1 为除尘部分正常工作,节能部分有1个部件出现故障另外2个部件正常工作;状态 S_2 为除尘部分正常工作,节能部分有2个部件出现故障另外1个部件正常工作;状态 S_3 为除尘部分正常工作,节能部分有3个部件出现故障;状态 S_4 为除尘部分出现故障,系统出现故障.

利用全概率分析方法,由积分-微分方程组描述上述系统模型如下:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(3\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)+\mu_1p_1(t)+\int_0^{\infty}p_4(x,t)\mu_4(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t}=-(2\lambda_1+\lambda_3+\mu_1)p_1(t)+3\lambda_1p_0(t)+\mu_2p_2(t), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda_1+\lambda_4+\mu_2)p_2(t)+2\lambda_1p_1(t)+\mu_3p_3(t), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_3(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda_5+\mu_3)p_3(t)+\lambda_1p_2(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial p_4(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial p_4(t,x)}{\partial x}=-\mu_4(x)p_4(t,x). \tag{5}$$

边界条件和初始条件为:

$$p_4(0,t)=\lambda_2p_0(t)+\lambda_3p_1(t)+\lambda_4p_2(t)+\lambda_5p_3(t), \tag{6}$$

$$p_0(0)=1,\ p_i(0)=0,\ p_4(0,x)=0,\ i=1,2,3. \tag{7}$$

其中:$p_0(t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 S_0 的概率;$p_1(t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 S_1 的概率;$p_2(t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 S_2 的概率;$p_3(t)$ 表示 t 时刻系统处于状态 S_3 的概率;$p_4(t,x)$ 表示 t 时刻系统处于状态 S_4、修复时间为 x 的概率;λ_1 表示节能部分单个部件的失效率;$\lambda_{i+2}(i=0,1,2,3)$ 表示在状态 i 的除尘部分故障率;$\mu_j(j=1,2,3)$ 表示节能部分有 j 个部件失效时的修复率;$\mu_4(x)$ 表示除尘部分失效时的修复率.

2 主要结果及其证明

为方便起见,记 $\pi_0=3\lambda_1+\lambda_2$, $\pi_1=2\lambda_1+\lambda_3+\mu_1$, $\pi_2=\lambda_1+\lambda_4+\mu_2$, $\pi_2=\lambda_3+\lambda_5$,并且由 $\mu_4(x)$ 的物理意义做以下假设:$\mu_4(x)$ 是非负可测函数,且 $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}\mu_4(x)<0$, $\int_0^{\infty}\mu_4(x)\mathrm{d}x=\infty$.由方程(5)可以解得 $p_4(t,x)$ 的解析表达式为

$$p_4(t,x)=p_4(0,t-x)\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}, \tag{8}$$

将式(8)带入式(1)可得:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}x}=-\pi_0p_0(t)+\mu_1p_1(t)+\int_0^t p(0,t-x)\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}\mu_4(x)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}x}=-\pi_0p_0(t)+\mu_1p_1(t)+\int_0^t p(0,\tau)\mathrm{e}^{-\int_0^{t-\tau}\mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}\mu_4(t-\tau)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

结合 $p_0(0)=1$,得到

$$p_0(t)=\mathrm{e}^{-\pi_0t}+\int_0^t\mathrm{e}^{-\pi_0(t-s)}\left[\mu_1p_1(s)+\int_0^s p_4(0,\tau)\mathrm{e}^{-\int_0^{s-\tau}\mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}\mu_4(s-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s=$$

$$\mathrm{e}^{-\pi_0t}+\int_0^t\mathrm{e}^{-\pi_0(t-s)}\mu_1p_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^t p_4(0,\tau)\mathrm{d}\tau\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\pi_0(t-s)-\int_0^{s-\tau}\mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}\mu_4(s-\tau)\mathrm{d}s=$$

$$\mathrm{e}^{-\pi_0 t}+\int_0^t \mathrm{e}^{-\pi_0(t-s)}\mu_1 p_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t p_4(0,\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^{t-\tau}\mathrm{e}^{-\pi_0(t-\tau)}\mathrm{e}^{\pi_0 v-\int_0^v \mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}\mu_4(v)\mathrm{d}v=$$

$$\mathrm{e}^{-\pi_0 t}+\int_0^t k_1(t-\tau)p_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t k_4(t-\tau)p_4(0,\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

其中 $v=s-\tau$, $k_1(t-\tau)=\mathrm{e}^{-\pi_0(t-\tau)}\mu_1$, $k_4(t-\tau)=\mathrm{e}^{-\pi_0(t-\tau)}\int_0^{t-\tau}\mathrm{e}^{\pi_0 v-\int_0^v\mu_4(\eta)\mathrm{d}\eta}\mu_4(v)\mathrm{d}v$. 同样由式(2)—(4) 和式(6) 可以得到:

$$p_1(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\pi_1(t-\tau)}[3\lambda_1 p_0(\tau)+\mu_2 p_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=\int_0^t k_2(t-\tau)p_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t k_3(t-\tau)p_2(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{12}$$

$$p_2(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\pi_2(t-\tau)}[2\lambda_1 p_1(\tau)+\mu_3 p_3(\tau)]\mathrm{d}\tau=\int_0^t k_5(t-\tau)p_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t k_6(t-\tau)p_3(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{13}$$

$$p_3(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\pi_3(t-\tau)}\lambda_1 p_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t k_7(t-\tau)p_2(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

这里 $k_2(t-\tau)=\mathrm{e}^{-\pi_1(t-\tau)}3\lambda_1$, $k_3(t-\tau)=\mu_2\mathrm{e}^{-\pi_1(t-\tau)}$, $k_5(t-\tau)=2\lambda_1\mathrm{e}^{-\pi_2(t-\tau)}$, $k_6(t-\tau)=\mu_3\mathrm{e}^{-\pi_2(t-\tau)}$, $k_7(t-\tau)=\lambda_1\mathrm{e}^{-\pi_3(t-\tau)}$. 由式(6)、式(11)—(14) 可得

$$\begin{aligned}
p_4(0,t)=&\lambda_2\left(\mathrm{e}^{-\pi_0 t}+\int_0^t k_1(t-\tau)p_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t k_4(t-\tau)p_4(0,\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\\
&\lambda_3\left(\int_0^t k_2(t-\tau)p_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t k_3(t-\tau)p_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\\
&\lambda_4\left(\int_0^t k_5(t-\tau)p_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t k_3(t-\tau)p_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\lambda_5\int_0^t k_7(t-\tau)p_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\\
&\lambda_2\mathrm{e}^{-(2\lambda_1+\lambda_2)t}+\int_0^t\{\lambda_3 k_2(t-\tau)p_0(\tau)+[\lambda_2 k_1(t-\tau)+\lambda_4 k_5(t-\tau)]p_1(\tau)+\\
&[\lambda_3 k_3(t-\tau)+\lambda_5 k_7(t-\tau)]p_2(\tau)+\lambda_4 k_6(t-\tau)p_3(\tau)+\lambda_2 k_4(t-\tau)p_4(0,\tau)\}\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{15}$$

联立式(11)—(15),则可以得到 Volterra 算子方程

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\int_0^t \boldsymbol{K}(t-\tau)\boldsymbol{P}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{16}$$

其中:

$$\boldsymbol{P}(t)=(p_0(t),p_1(t),p_2(t),p_3(t),p_4(0,t)),$$

$$\boldsymbol{f}(t)=(\mathrm{e}^{-(3\lambda_1+\lambda_2)t},0,0,0,\lambda_2\mathrm{e}^{-(2\lambda_1+\lambda_2)t})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{K}(t-\tau)=$$

$$\begin{pmatrix}
0 & k_1(t-\tau) & 0 & 0 & k_4(t-\tau)\\
k_2(t-\tau) & 0 & k_3(t-\tau) & 0 & 0\\
0 & k_5(t-\tau) & 0 & k_6(t-\tau) & 0\\
0 & 0 & k_7(t-\tau) & 0 & 0\\
\lambda_3 k_2(t-\tau) & \lambda_2 k_1(t-\tau)+\lambda_4 k_5(t-\tau) & \lambda_3 k_3(t-\tau)+\lambda_5 k_7(t-\tau) & \lambda_4 k_6(t-\tau) & \lambda_2 k_4(t-\tau)
\end{pmatrix}.$$

定理 1 对于 $\forall\, T>0$, Volterra 积分方程(16) 在 $C[0,T]$ 上存在唯一的非负解.

证明 对于 $\forall\, T>0$, 由 $\boldsymbol{f}(t)$ 和 $\boldsymbol{K}(t-\tau)$ 的表达式可知,向量 $\boldsymbol{f}(t)$ 的每一个分量和矩阵 $\boldsymbol{K}(t-\tau)$ 中每一个分量均为非负有界函数,且每一个分量在 $C[0,T]$ 上都是平方绝对可积的. 由文献[11] 可知, Volterra 积分方程(16) 在 $C[0,T]$ 上存在唯一的非负解.

定理 2 对于 $\forall\, T>0$, 系统(1)—(7) 在 $C[0,T]$ 上的非负解存在唯一.

证明 由 $p_4(t,x)$ 形式解的表达式可知, $p_4(t,x)$ 在 $C[0,T]$ 上也是存在唯一的解. 再结合定理 1 可知,系统(1)—(7) 在 $C[0,T]$ 上存在唯一的非负解.

(下转第 346 页)

厚度比齿根圆上的最小油膜厚度大. 2)最小弹流油膜厚与蜗轮齿数、模数均呈递增关系,可见蜗轮直径较大时,能减轻齿面的胶合和磨损,有利于润滑传动;蜗杆头数越大,最小弹流油膜厚度也越大. 3)蜗杆输入功率越大,越容易导致蜗轮蜗杆磨损,因此在保证较高的传动效率下,应尽量减小输入功率. 4)蜗杆传动应尽量处于均匀且冲击小的状态,以此减少机器零件的碰撞;蜗杆转速越大,最小油膜厚度也越大. 5)本文提出的蜗杆传动的摩擦学设计模型,不仅可以满足齿面疲劳强度的设计原则,也可以满足最小油膜厚度的润滑要求,有利于提高蜗杆传动的使用寿命. 6)本文只对蜗杆传动的最小弹流油膜厚和摩擦学设计公式进行了研究,油膜压力和摩擦系数对蜗杆传动的影响有待于进一步研究.

参考文献:

[1] 秦大同,张光辉. 蜗杆传动发热及齿面摩擦与润滑研究的调查[J]. 机械传动,1994(3):40-43.

[2] 张有忱,孟惠荣,张立仁. 蜗杆传动的弹流润滑研究[J]. 机械设计,1999(10):24-25.

[3] 邱昕洋,张光辉,秦大同. 钢制平面蜗轮传动弹流润滑分析[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2010(3):24-29.

[4] 张宇,谢里阳,胡智勇,等. 弹性流体动力润滑状态下滚动轴承摩擦的分析[J]. 东北大学学报(自然科学版),2015(7):1000-1004.

[5] 叶友东,周哲波. 基于弹流润滑理论的斜齿圆柱齿轮油膜厚度参数影响研究[J]. 机械传动,2012(10):16-19.

[6] Hamrock BJ, Jacobson BO. Elastohydrodynamic lubrication of line contacts[J]. ALSE Transactions, 1984,27(4):275-287.

[7] 柳剑. 弹流润滑状态下的滚动轴承摩擦副动力学特性研究[D]. 武汉:华中科技大学,2014.

[8] 温诗铸,杨沛然. 弹性流体动力润滑[M]. 北京:清华大学出版社,1992:106-127.

[9] 濮良贵,纪名刚. 机械设计[M]. 北京:高等教育出版社,2008:250-256.

[10] 罗良清. 渐开线蜗杆接触应力及传动效率的研究[D]. 武汉:武汉理工大学,2006.

(上接第 317 页)

参考文献:

[1] Gaver D P. Time to failure and availability of paralleled system with repair[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1963,12:30-38.

[2] Dhillon B S, Yang N. Reliability and availability of warm standby systems with common-cause failures and human errors[J]. Microelectron Reliab, 1992,32(4):561-575.

[3] Dhillon B S, Yang N. Stochastic analysis of standby system with common-cause and human errors[J]. Microlectron Reliab, 1992,32(10):1511-1521.

[4] Dhillon B S, Yang N. Availability of a man-machine system with critical and non-human error[J]. Microlectron Reliab, 1992,33(10):1511-1521.

[5] Yang N, Dhillon B S. Stochastic analysis of a general standby system with constant human error and arbitrarily system repair rates[J]. Microelectron Reliab, 1995,35:1037-1045.

[6] Yang N, Dhillon B S. Stochastic analysis of a repairable standby human-machine system[J]. Microelectron Reliab, 1995,35:1401-1411.

[7] 陶有德,于景元,朱广田. 一类可修复计算机系统的适定性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2011,36(5):35-39.

[8] 吕鲲. 一类可修复人机系统的最优控制[J]. 吉林大学学报(理学版),2012,50(2):284-287.

[9] 赵志欣,唐慧,王传安,等. 节能刮板沉降箱式除尘可修复系统的稳定性分析[J]. 数学的实践与认识,2013,43(24):164-168.

[10] 闫希军,李凤玲. 箱式管道除尘系统的应用[J]. 中国人造板,2008(2):28-29.

[11] 陈传璋,侯宗义,李忠明. 积分方程及其应用[M]. 上海:上海科技出版社,1987.