文章编号: 1004-4353(2016)04-0306-04

一类含有避难所和扩散项的食物链模型的稳定性

庄科俊
(安徽财经大学 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 讨论一类考虑食饵具有避难所的三种群食物链扩散系统. 首先研究解的全局存在性与有界性,其次利用线性化方法研究了非负平衡点的局部稳定性,最后利用 Lyapunov 函数方法研究了其正平衡点的全局渐近稳定性.

关键词: 食物链模型; 避难所; 稳定性
中图分类号: O175.26 **文献标识码:** A

Stability analysis of a food-chain model incorporating prey refuge and diffusive term

ZHUANG Kejun
(*School of Statistics and Applied Mathematics*, *Anhui University of Finance and Economics*, *Bengbu* 233030, *China*)

Abstract: The three-species food-chain model with prey refuge and diffusive term is considered in this paper. First the global existence and boundedness of solutions are studied, then the local asymptotic stability of non-negative equilibrium points is investigated by linearization method, finally the global asymptotic stability of positive equilibrium point is obtained due to the Lyapunov function technique.

Key words: food-chain model; refuge; stability

1 模型的建立

在自然界的生态系统中,捕食与被捕食是最基本的种间关系. 为了避免被捕食者捕获,食饵种群通常会将洞穴、悬崖壁、茂密的植被等场所作为天然的避难所. 研究表明,避难所效应对种群系统的稳定性具有重要作用[1-2]. 然而,目前为止关于食饵避难所在种群系统中的作用的研究大多还只集中在两种群系统[3-5],且各个种群在自然界中的位置并不是固定不变的,大多有着向种群密度较低、自然资源丰富的地区移动的本能. 受文献[1-2,6]启发,本文主要研究如下考虑种群空间移动和食饵具有避难所的三种群食物链系统:

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u = u\left[r\left(1-\dfrac{u}{k}\right) - av\right], \ (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty); \\ v_t - d\Delta v = ac_1uv - b(v-m)w - d_1v, \ (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty); \\ w_t - d\Delta w = w\left[bc_2(v-m) - d_2\right], \ (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}} = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,+\infty); \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \ v(x,0) = \varphi_2(x), \ w(x,0) = \varphi_3(x), \ x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2016-09-14 **作者简介:** 庄科俊(1982—),男,副教授,研究方向为微分方程理论及其应用.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11301001);安徽省高校优秀青年人才支持计划重点项目(gxyqZD2016100)

系统(1)中：$u(x,t)$，$v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 分别表示生物质资源、食饵种群和捕食者种群在位置 x 处在时刻 t 的密度函数；所有系数均为正的常数，d 表示种群的扩散系统，r 表示资源的内禀增长率，k 表示资源的承载能力，a 表示食饵对资源的消耗率，b 表示捕食者对食饵的捕获率，c_1 和 c_2 分别表示相应的转化率，d_1 和 d_2 分别表示食饵、捕食者的自然死亡率，m 表示使用避难所的食饵的恒定数量；$\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$\boldsymbol{\eta}$ 是边界的单位外法向量，Δ 为 Laplace 算子，初值函数 $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3)$ 非负且光滑. 系统遵循 Neumann 边界条件，表示该生态系统是自封的，没有种群的流入和流出.

对系统(1)，文献[1] 研究了扩散系数 $d=0$ 时解的有界性与动力学行为. 由于平衡点是种群系统的常数解，其稳定性有着重要意义，因此本文主要研究反应扩散系统(1) 的解的基本性质、正平衡点的全局稳定性，并进一步研究时滞因素对平衡点稳定性的影响.

2 基本性质

由于空间扩散不改变系统的常数稳态解的存在性，根据文献[1] 中的结果可得如下引理：

引理 1 系统(1) 总有平凡平衡点 $E_0=(0,0,0)$ 和轴平衡点 $E_1=(k,0,0)$；当 $ac_1k>d_1$ 时，系统(1) 有平面平衡点 $E_2=(u_0,v_0,0)=(d_1/(ac_1),r(ac_1k-d_1)/(a^2c_1k),0)$；当 $bc_2r>ad_2+abc_2m$ 且 $ac_1u^*>d_1$ 时，系统(1) 有正平衡点 $E^*=(u^*,v^*,w^*)$，其中 $u^*=k(bc_2r-ad_2-abc_2m)/(bc_2r)$，$v^*=d_2+bc_2m/(bc_2)$，$w^*=c_2v^*(ac_1u^*-d_1)/d_2$.

定理 1 对任意的 $t\in[0,+\infty)$，系统(1) 存在唯一且一致有界的非负解.

证明 利用文献[7] 中的方法，容易证得系统(1) 在$[0,T_{\max})$ 上存在唯一的局部解$(u(x,t),v(x,t),w(x,t))$，其中 $T_{\max}$ 是解的最大存在时间. 此外，$(0,0,0)$ 是系统(1) 的一个下解，从而解是非负的[8]. 如果该解是一致有界的，即解的上下界与时间变量 t 无关，则可得 $T_{\max}=+\infty$，即得解的全局存在性.

下面证明解的一致有界性. 首先记 $\|\varphi_i\|_\infty=\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}}\varphi_i(x)$，$i=1,2,3$. 由系统(1) 的第 1 个方程及解的非负性，有 $u_t-d\Delta u\leqslant ru(1-u/k)$，根据抛物型微分方程的比较原理，可以得到 $u(x,t)\leqslant\max\{k,\|\varphi_1\|_\infty\}\triangleq M_1$. 再由系统(1)，有$(c_1c_2u+c_2v+w)_t-d\Delta(c_1c_2u+c_2v+w)\leqslant c_1c_2kr-\mu(c_1c_2u+c_2v+w)$，其中 $\mu=\min\{r,d_1,bc_2d_2\}$，根据比较原理得：

$$v(x,t)\leqslant\max\left\{\frac{c_1kr}{\mu},c_1\|\varphi_1\|_\infty+\|\varphi_2\|_\infty+\frac{1}{c_2}\|\varphi_3\|_\infty\right\}\triangleq M_2,$$

$$w(x,t)\leqslant\max\left\{\frac{c_1c_2kr}{\mu},c_1c_2\|\varphi_1\|_\infty+c_2\|\varphi_2\|_\infty+\|\varphi_3\|_\infty\right\}\triangleq M_3.$$

综上，定理 1 得证.

定理 2 如果 $bc_1c_2kr\leqslant\mu(bc_2m+d_2)$，则系统(1) 是非持续的.

证明 根据定理 1 的证明过程可知，存在正数 T，当 $t>T$ 时，有 $w_t-d\Delta w\leqslant w(\frac{c_1kr}{\mu}bc_2-bc_2m-d_2)$. 因此，若 $bc_1c_2kr\leqslant\mu(bc_2m+d_2)$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup w(x,t)\leqslant 0$，从而系统(1) 是非持久的.

3 平衡点的稳定性

类似于文献[9]，设 $0=\mu_1<\mu_2<\cdots\to+\infty$ 是 Ω 上 $-\Delta$ 算子在无流边界条件下的特征值，并且 $E(\mu_i)$ 是由 μ_i 相应的特征函数组成的特征空间，定义空间分解：

(i) $X_{ij}=\{c\cdot\phi_{ij}:c\in\mathbf{R}^3\}$，其中对于每个 $i,j=1,\cdots,\dim E(\mu_i)$，$\{\phi_{ij}\}$ 是 $E(\mu_i)$ 的标准正交基.

(ii) $X=\{U\in[C^1(\bar{\Omega})]^3:\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\eta}}=\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\eta}}=\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\eta}}=0,x\in\partial\Omega\}$，这样空间可分解为 $X=\bigoplus_{i=1}^{+\infty}X_i$，其中 $X_i=\bigoplus_{j=1}^{\dim E(\mu_i)}X_{ij}$.

对系统(1) 在非负平衡点处线性化，得到其特征方程. 通过分析特征方程根的分布情况，可以得到

如下关于平衡点局部稳定性的结果:

定理 3 对系统(1),有:

(i) 平衡点 E_0 总是不稳定的.

(ii) 当 $ack_1 < d_1$ 时,平衡点 E_1 是稳定的;当 $ack_1 > d_1$ 时,平衡点 E_1 是不稳定的.

(iii) 当 $ac_1k > d_1$ 且 $ac_1u^* < d_1$ 时,平衡点 E_2 是稳定的;当 $ac_1k > d_1$ 且 $ac_1u^* > d_1$ 时,平衡点 E_2 是不稳定的.

(iv) 当 $bc_2r > ad_2 + abc_2m$ 且 $ac_1u^* > d_1$ 时,正平衡点 E^* 是稳定的.

证明 这里主要对系统(1)进行线性化,讨论在相应平衡点处特征方程根的分布情况,进而可得平衡点的稳定性结论.因此,在此仅证明(iv)情形即可,其他类似可得.在正平衡点 E^* 处的线性化系统的特征方程为

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{2}$$

其中 $a_2 = 3d\mu_i + \frac{r}{k}u^* + \frac{bmw^*}{v^*} > 0$,$a_1 = 3d^2\mu_i^2 + 2d\mu_i\left(\frac{r}{k}u^* + \frac{bmw^*}{v^*}\right) + \frac{bmru^*w^*}{kv^*} + a^2c_1u^*v^* + bd_2w^* > 0$,$a_0 = d^3\mu_i^3 + d^2\mu_i^2\left(\frac{r}{k}u^* + \frac{bmw^*}{v^*}\right) + d\mu_i\left(bd_2w^* + \frac{bmru^*w^*}{kv^*} + a^2c_1u^*v^*\right) + \frac{bd_2ru^*w^*}{k} > 0$.

事实上,如果对任意的 $i \geqslant 0$,特征方程的所有根都具有负实部,则对应的平衡点是局部渐近稳定的;如果存在某个 $i \geqslant 0$,使得特征方程至少含有 1 个具正实部的根,则对应的平衡点不稳定.通过计算,在(iv)的条件下,$a_0 - a_1a_2 > 0$ 成立.再根据 Routh-Hurwitz 准则知,方程(2)的所有根都具有严格负实部,从而知正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.定理 3 得证.

下面,通过构造 Lyapunov 函数,利用 LaSalle 不变原理来证明正平衡点 E^* 的全局渐近稳定性.

定理 4 当 $bc_2r > ad_2 + abc_2m$ 且 $ac_1u^* > d_1$ 时,正平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

证明 首先构造 Lyapunov 函数:

$$V = \int_\Omega \left[k_1\left(u - u^* - u^*\ln\frac{u}{u^*}\right) + k_2\left(v - v^* - v^*\ln\frac{v}{v^*}\right) + k_3\left(w - w^* - w^*\ln\frac{w}{w^*}\right)\right]\mathrm{d}x,$$

其中 k_1、k_2、k_2 均为待定的正数.对上式两边关于变量 t 求导,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \int_\Omega\left[k_1\frac{u-u^*}{u}\frac{\partial u}{\partial t} + k_2\frac{v-v^*}{v}\frac{\partial v}{\partial t} + k_3\frac{w-w^*}{w}\frac{\partial w}{\partial t}\right]\mathrm{d}x = \\ &d\int_\Omega\left[k_1\frac{u-u^*}{u}\Delta u + k_2\frac{v-v^*}{v}\Delta v + k_3\frac{w-w^*}{w}\Delta w\right]\mathrm{d}x + \\ &\int_\Omega\Big\{k_1(u-u^*)\left[r\left(1-\frac{u}{k}\right) - av\right] + k_3(w-w^*)\left[bc_2(v-m) - d_2\right] + \\ &k_2(v-v^*)\left[ac_1u - b(v-m)\frac{w}{v} - d_1\right]\Big\}\mathrm{d}x \triangleq I_1 + I_2,\end{aligned}$$

其中:$I_1 = -d\int_\Omega\left[k_1\frac{u^*}{u^2}|\nabla u|^2 + k_2\frac{v^*}{v^2}|\nabla v|^2 + k_3\frac{w^*}{w^2}|\nabla w|^2\right]\mathrm{d}x \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega\Big\{k_1(u-u^*)\left[-\frac{r(u-u^*)}{k} - a(v-v^*)\right] + bc_2k_3(v-v^*)(w-w^*) + \\ &k_2(v-v^*)\left[ac_1(u-u^*) + b\frac{vv^*(w^*-w) + m(v^*w - vw^*)}{vv^*}\right]\Big\}\mathrm{d}x = \\ &\int_\Omega\Big\{-\frac{rc_1k_1(u-u^*)^2}{k} + (u-u^*)(v-v^*)(ac_1k_2 - ak_1) + \\ &(v-v^*)(w-w^*)\left[bc_2k_3 - \frac{k_2(v^*-m)}{v^*}\right] - \frac{mk_3w(v-v^*)^2}{vv^*}\Big\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

选取 $k_1 = k_2c_1$,$bc_2k_3v^* = k_2(v^* - m)$,则

$$I_2 = -\int_\Omega\left[\frac{rc_1k_1(u-u^*)^2}{k}\right]\mathrm{d}x - \int_\Omega\left[\frac{mk_3w(v-v^*)^2}{vv^*}\right]\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

由此，根据 LaSalle 不变原理可以得到正平衡点 E^* 的全局渐近稳定性.

5 结束语

本文研究了一类考虑食饵具有避难所的食物链反应扩散系统.根据本文中的定理 3 和定理 4 可知，只要系统(1) 存在正平衡点，则一定是全局渐近稳定的.对照文献[1] 的相关结果发现，仅考虑种群的自由扩散因素，忽略时滞或交错扩散，系统的稳定性不受影响.因此，为了探究系统(1) 更复杂的动力学行为，今后将进一步考虑具有时滞或交错扩散的食物链系统，以期得到不同于常微分系统的结果.

参考文献：

[1] Debasis Mukherjee. The effect of prey refuges on a three species food chain model[J]. Differ Equ Dyn Syst, 2014, 22(4):413-426.

[2] Yang Ruizhi, Zhang Chunrui. Dynamics in a diffusive predator-prey system with a constant prey refuge and delay [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2016,31:1-22.

[3] Debaldev Jana, Rashmi Agrawal, Ranjit Kumar Upadhyay. Dynamics of generalist predator in a stochastic environment effect of delayed growth and prey refuge[J]. Appl Math Comput, 2015,268:1072-1094.

[4] Swarnali Sharma, Samanta G P. A Leslie-Gower predator-prey model with disease in prey incorporating a prey refuge[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2015,70:69-84.

[5] Jai Prakash Tripathi, Syed Abbas, Manoj Thakur. A density dependent delayed predator-prey model with Beddington-DeAngelis type function response incorporating a prey refuge[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2015,22(1/3):427-450.

[6] Wang Jinfeng, Wei Junjie, Shi Junping. Global bifurcation analysis and pattern formation in homogeneous diffusive predator-prey systems[J]. J Differential Equations, 2016,260:3495-3523.

[7] Zhang Xueli, Huang Yehui, Weng Peixuan. Permanence and stability of a diffusive predator-prey model with disease in the prey[J]. Comput Math Appl, 2014,68(10):1431-1445.

[8] 林支桂.数学生态学导引[M].北京：科学出版社，2013.

[9] Peter Y H Pang, Wang Mingxin. Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model[J]. J Differential Equations, 2004,200(2):245-273.

(上接第 280 页)

[6] Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D. Oscillation theory for difference and functional differential equations[M]. Springer Netherlands, 2000:657-662.

[7] Aiello W D, Freedman H I, Wu J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay[J]. SIAM J Appl Math, 1992,52:855-869.

[8] Bainov D, Simeonov P. Positive solutions of a superlinear first order differential equations with delay depending on the unknown function[J]. J Comput Appl Math, 1998,88:95-101.

[9] Bainov D, Markova N, Simeonov P. Asymptotic behavior of non-oscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown function[J]. J Comput Appl Math, 1998,91:87-96.

[10] Domoshnitsky A, Drakhlin M, Litsyn E. On equations of second order with delay depending on solution[J]. Nonlinear Anal, 2002,49:689-671.

[11] Hartung F, Turi J. On the asymptotic behavior of the solutions of a state dependent delay equation[J]. Differential and Integral Equations, 1995,8:1867-1872.

[12] Li W, Zhang S. Classifications and extence of positive solutions of higher order iterative functional differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2002,139:351-367.

[13] Lou J. Asymptotic behavior of solutions of second order quasilinear differential equations with delay depending on the unknown function[J]. J Comput Appl Math, 2006,185:133-143.

[14] Xu Zhiting. Oscillation and non-oscillation of second order differential equations with delay depending on the unknown function[J]. J Comput Appl Math, 2008,214:371-380.

[15] Wu Xingyuan, You Xiong, Shi Wei. ERKN integrators for systems of oscillatory second-order differential equations[J]. Computer Physics Communications, 2010,181:1873-1887.