文章编号：1004-4353(2016)04-0302-04

一类高阶有理差分方程的全局行为

李晓艳， 谢建民
（兰州城市学院 数学学院，甘肃 兰州 730070）

摘要： 考虑一类有理差分方程 $y_{n+1}=A+\dfrac{y_n}{\sum_{i=1}^{k}y_{n-i}}$，$n=0,1,\cdots$. 首先利用判定稳定性的线性近似法和赫尔维茨判据、儒歇定理得到该方程正平衡点的局部性质；然后证明了二阶有理差分方程的解的全局吸引性并推广到高阶有理差分方程的情形；最后利用推广的结果得到当方程的系数满足一定条件时，该方程的唯一平衡点是一个全局吸引子.

关键词： 差分方程；平衡点；稳定性；全局吸引子

中图分类号： O175　　　　**文献标识码：** A

Global behavior of a higher-order rational difference equation

LI Xiaoyan， XIE Jianmin
(*College of Mathematics*, *Lanzhou City University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: In this article, the rational difference equation $y_{n+1}=A+\dfrac{y_n}{\sum_{i=1}^{k}y_{n-i}}$ $(n=0,1,\cdots)$ is investigated. In terms of linear approximation, Rouché's theorem and Hurwitz criterion, some sufficient conditions ensuring the local properties of positive equilibrium are derived. We proved the global attraction of second order rational difference equation. All the obtained results can be generalized to higher order difference equation. In addition, by employing the results of the generalization, we show that the unique positive equilibrium of the equation is a global attractor with a basin that depends on certain conditions of the coefficient.

Keywords: difference equation; equilibrium; stability; global attractor

0　引言

首先考虑一类差分方程：

$$y_{n+1}=A+\frac{y_n}{\sum_{i=1}^{k}y_{n-i}},\ n=0,1,\cdots, \tag{1}$$

其中 $A\in(0,\infty)$，$k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\geqslant1$，初始变量 $y_{-k},\cdots,y_0$ 为任意正实数.

文献[1]讨论了差分方程：

$$y_{n+1}=A+\frac{y_n}{y_{n-k}},\ n=0,1,\cdots \tag{2}$$

的周期性，其中 $y_{-k},\cdots,y_0$，A 均为正数，$k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\geqslant2$. 文献[2]讨论了方程(2)的全局渐近稳定性. 本

收稿日期： 2016－06－15　　　**作者简介：** 李晓艳(1980—)，女，讲师，研究方向为运筹学与控制论.
基金项目： 国家自然科学地区科学基金资助项目(11661048)；2014 陇原青年创新人才扶持计划项目

文将在上述已得结论的基础上，讨论差分方程(1) 所有正解的局部渐近稳定性、不变区间及全局吸引性，并且讨论方程(1) 的唯一正平衡点是全局吸引子的充分条件.

为了便于描述差分方程的动力学性质，先引入几个常用记号和一些已知结论.

令 I 是一个实数区间，函数 f 是 I^{k+1} 上的具有连续偏导数的函数，则对满足初始条件 $y_{-k},\cdots,y_0\in I$ $(k\in\mathbf{N})$ 的差分方程

$$y_{n+1}=f(y_n,y_{n-1},\cdots,y_{n-k}),\ n=0,1,\cdots \tag{3}$$

必有唯一解 $\{y_n\}_{n=-k}^{\infty}$.

定义 1 若 $\bar{y}=f(\bar{y},\bar{y},\cdots,\bar{y})$，则 $\bar{y}$ 是方程(3) 的一个平衡点，即当 $n\geqslant -k$ 时，$y_n=\bar{y}$ 是方程(3) 的一个平凡解或等价地 $\bar{y}$ 是 f 的一个不动点.

设 $J\subseteq I$，如果它满足条件 $y_{-k},\cdots,y_0\in J\Rightarrow y_n\in J,\ n>0$，则称实数区间 J 是方程(3) 的不变区间，即方程(3) 初始条件取自区间 J 的每个解仍在 J 中.

通常研究非线性差分方程的局部稳定性时，先将其线性化. 方程(3) 关于平衡点 $\bar{y}$ 的线性化方程为

$$z_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial f}{\partial y_i}(\bar{y},\cdots,\bar{y})z_{n-i},\ n=0,1,\cdots,$$

它的特征方程为 $\lambda^{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{\partial f}{\partial y_i}(\bar{y},\cdots,\bar{y})\lambda^{n-i}$.

定义 2 设 $\bar{y}$ 为差分方程(1) 的平衡点，则：

(a) 若对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $y_{-k},\cdots,y_0\in I$ 满足 $\sum\limits_{i=-k}^{0}|y_i-\bar{y}|<\delta$ 时，对一切 $n\geqslant -k$ 都有 $|y_n-\bar{y}|<\varepsilon$，则称平衡点 $\bar{y}$ 是局部稳定的；

(b) 如果 $\bar{y}$ 是局部稳定的，且存在 $\gamma>0$，使得当 $y_{-k},\cdots,y_0\in I$ 满足 $\sum\limits_{i=-k}^{0}|y_i-\bar{y}|<\gamma$ 时，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\bar{y}$，则称平衡点 $\bar{y}$ 是局部渐近稳定的；

(c) 如果对所有 $y_{-k},\cdots,y_0\in I$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\bar{y}$，则称 $\bar{y}$ 是一个全局吸引子；

(d) 若平衡点 $\bar{y}$ 既是局部稳定的又是全局吸引子，则平衡点 $\bar{y}$ 是全局渐近稳定的.

1 主要结论及其证明

方程(1) 的唯一平衡点为 $\bar{y}=A+\dfrac{1}{k}$，它关于平衡点 $\bar{y}$ 的线性化方程为

$$z_{n+1}+\frac{1}{kA+1}z_n+\frac{1}{k(kA+1)}\sum_{i=1}^{k}z_{n-i}=0,\ n=0,1,\cdots.$$

设上述方程的解形如 $z_n=\lambda^n$，则它的特征方程是

$$\lambda^{n+1}+\frac{1}{kA+1}\lambda^n+\frac{1}{k(kA+1)}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i=0.$$

为了得到 $\bar{y}$ 的局部稳定性，需要引用复变函数中一个重要结论：

引理 1[1](Rouché's 定理) 如果函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 在复平面某个有界区域上解析，而且在区域边界上总有 $|f(x)|>|h(x)|$，那么在区域内部 $f(x)$ 和 $f(x)+h(x)$ 的零点数目相同.

引理 2[1](Hurwitz 判据) 设有 n 次代数方程 $a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$，式中 $a_0>0$. 该方程一切根具有负实部的充要条件是下列不等式同时成立：

$$\Delta_1=a_1>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1&a_0\\a_3&a_2\end{vmatrix}>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1&a_0&0\\a_3&a_2&a_1\\a_5&a_4&a_3\end{vmatrix}>0,\ \cdots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_n\Delta_{n-1}>0.$$

由于 n 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程是一个 n 次代数方程,故可用 Hurwitz 判据来确定方程(1)平衡点的稳定性.由 Hurwitz 判据和 Rouché's 定理可得到如下结果:

定理 1 如果 $A>\frac{1}{k}$,那么方程(1)的唯一平衡点 $\bar{y}$ 是局部渐近稳定的.

证明 令 $f(\lambda)=\lambda^{n+1}$, $h(\lambda)=\frac{1}{kA+1}\lambda^n+\frac{1}{k(kA+1)}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i$. 在圆周 $|\lambda|=1$ 上, $|f(\lambda)|=|\lambda^{n+1}|=1$, $|h(\lambda)|\leqslant\frac{1}{kA+1}|\lambda^n|+\frac{1}{k(kA+1)}\sum_{i=0}^{n-1}|\lambda|^i=\frac{2}{kA+1}$. 因为 $A>\frac{1}{k}$, 所以 $|f(\lambda)|>|h(\lambda)|$. 由 Rouché's 定理知在单位圆 $|\lambda|\leqslant 1$ 内(不包括边界), $f(\lambda)+h(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 有相同个数的零点,这就表明 $f(\lambda)+h(\lambda)$ 有 $k+1$ 个零点,即特征方程 $\lambda^{n+1}+\frac{1}{kA+1}\lambda^n+\frac{1}{k(kA+1)}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i=0$ 有 $k+1$ 个特征根. 计算得: $\Delta_1=\frac{1}{kA+1}>0$, $\Delta_2=\frac{1}{k(kA+1)}\Delta_1>0$, $\cdots$, $\Delta_{n+1}=\frac{1}{k(kA+1)}\Delta_n>0$, 由 Hurwitz 判据可知所有特征根均具有负实部,所以方程(1)的平衡点是局部渐近稳定的.证毕.

定理 2 假设 $A>\frac{1}{k}$,那么必存在两个常数 H 和 T,当初值 $y_{-k},\cdots,y_0\in I\ (I=[H,T])$,有 $y_n\in I\ (n\geqslant 1)$,即方程(1)是持久的.

证明 令 $H=A$, $T\in\left[\frac{kA^2}{kA-1},\infty\right)$,那么 $I=[A,T]$. 设 $u_1=y_0$, $u_2=y_{-1}$, $\cdots$, $u_{k+1}=y_{-k}$,则 $y_1=f(y_0,\cdots,y_{-k})=f(u_1,\cdots,u_{k+1})=A+\frac{u_1}{\sum_{i=2}^{k+1}u_i}$. 由于 $u_1,\cdots,u_{k+1}\in I$ 且 $A>\frac{1}{k}$,因此 $f(u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})=A+\frac{u_1}{\sum_{i=2}^{k+1}u_i}\leqslant A+\frac{T}{kA}$. 因为 $T\geqslant\frac{kA^2}{kA-1}$,即 $\frac{kA^2}{kA-1}\leqslant T$,所以 $kA^2\leqslant kAT-T$, $\frac{kA^2+T}{kA}\leqslant T$. 继续化简得 $A+\frac{T}{kA}\leqslant T$,这说明 $f(u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})\leqslant T$.

另一方面, $f(u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})\geqslant A$,综上可知对 $u_1,\cdots,u_{k+1}\in I$,总有 $H=A\leqslant f(u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})\leqslant T$,即 $y_1\in I$. 利用 $y_{-k},\cdots,y_0,y_1\in I$,类似上述证明过程可推出 $y_n\in I\ (n\geqslant 1)$. 证毕.

由 $T\in\left[\frac{kA^2}{kA-1},\infty\right)$,再根据定理 2 的结论和不变区间的定义,可得到区间 $[A,\infty)$ 是方程(1)的不变区间.

为了得到 $\bar{y}$ 的全局吸引性,下面证明如下定理 3,其结论将文献[2]中关于二阶差分方程的相关结论推广到 $k+1$ 阶差分方程的情形.

定理 3 讨论方程

$$y_{n+1}=f(y_n,y_{n-1},\cdots,y_{n-k}),\ n=0,1,\cdots. \tag{4}$$

设 $[a,b]$ 为实数区间, $y_{-k},\cdots,y_0\in[a,b]$, $f:[a,b]^{k+1}\to[a,b]$ 是一个连续函数,如果 f 满足以下两个条件,那么方程(4)在区间 $[a,b]$ 上有唯一的正平衡点 $\bar{y}$,且每一正解都收敛于 $\bar{y}$:

(a) $f(u_1,u_2,\cdots,u_{k+1})$ 对第一个变量 u_1 是非减函数,而对其他变量为非增函数;

(b) 设 $(m,M)\in[a,b]\times[a,b]$ 是系统 $m=f(m,M,\cdots,M)$ 和 $M=f(M,m,\cdots,m)$ 的解,有 $m=M$.

证明　令 $m_0=a$, $M_0=b$, $m_i=f(m_{i-1},M_{i-1},\cdots,M_{i-1})$, $M_i=f(M_{i-1},m_{i-1},\cdots,m_{i-1})$, $i=1,2,\cdots$. 由条件(a)可知 $a=m_0\leqslant m_1\leqslant\cdots\leqslant m_i\leqslant\cdots\leqslant M_i\leqslant\cdots\leqslant M_1\leqslant M_0=b$, $i=1,2,\cdots$, 因为 $f:[a,b]^{k+1}\to[a,b]$ 是一个连续函数，所以 $a=m_0\leqslant y_n\leqslant M_0=b\,(n=0,1,\cdots)$. 以下逐步讨论 $y_j\,(j\geqslant 1)$ 的上下界.

对于 $y_{(k+1)+1}=f(y_1,y_2,\cdots,y_{k+1})$，由条件(a)可知 $m_1=f(m_0,M_0,\cdots,M_0)\leqslant f(y_1,b,\cdots,b)\leqslant y_{(k+1)+1}\leqslant f(y_1,a,\cdots,a)\leqslant f(M_0,m_0,\cdots,m_0)=M_1$，即 $m_1\leqslant y_{(k+1)+1}\leqslant M_1$；同理，$m_1\leqslant y_{(k+1)+P}\leqslant M_1$ $(P\in\mathbf{N})$. 继续对 $y_{2(k+1)+1}=f(y_{(k+1)+1},y_{(k+1)+2},\cdots,y_{2(k+1)})$ 进行讨论，可得 $m_2=f(m_1,M_1,\cdots,M_1)\leqslant f(y_{(k+1)+1},M_1,\cdots,M_1)\leqslant y_{2(k+1)+1}\leqslant f(y_{(k+1)+1},m_1,\cdots,m_1)\leqslant f(M_1,m_1,\cdots,m_1)=M_2$，即 $m_2\leqslant y_{2(k+1)+1}\leqslant M_2$；同理，$m_2\leqslant y_{2(k+1)+P}\leqslant M_2\,(P\in\mathbf{N})$. 依此类推，最终可得 $m_i\leqslant y_j\leqslant M_i$, $j\geqslant i(k+1)+1$. 令 $m=\lim\limits_{i\to\infty}m_i$, $M=\lim\limits_{i\to\infty}M_i$，则 $m\leqslant\liminf\limits_{i\to\infty}y_i\leqslant\limsup\limits_{i\to\infty}y_i\leqslant M$. 由条件(b)知 $m=M$，则 $\liminf\limits_{i\to\infty}y_i=\limsup\limits_{i\to\infty}y_i=m$，即方程(4)在区间 $[a,b]$ 上有唯一的正平衡点 $\bar{y}=m$，且每一正解都收敛于 $\bar{y}$. 证毕.

定理 4　假设 $A>\dfrac{1}{k}$，那么方程(1)的唯一正平衡点 $\bar{y}$ 对区域 $S=[A,\infty)^{k+1}$ 是一个全局吸引子.

证明　根据定理 2，设 y_n 是方程(1)满足初值条件 $y_{-k},\cdots,y_0\in I=[A,T]$ 的一个解，其中 $T\in\left[\dfrac{kA^2}{kA-1},\infty\right)$. 对 $u_1,u_2,\cdots,u_{k+1}\in I$，设 $f(u_1,\cdots,u_{k+1})=A+\dfrac{u_1}{\sum\limits_{i=2}^{k+1}u_i}$，则 $f:I^{k+1}\to I$ 是一个连续函数且对变量 u_1 为非减函数，对变量 $u_2,\cdots,u_{k+1}$ 为非增函数.

设 $(m,M)\in I\times I$ 是系统 $m=f(m,M,\cdots,M)$ 和 $M=f(M,m,\cdots,m)$ 的解，于是有

$$f(m,M,\cdots,M)=A+\frac{m}{kM}=m,\ f(M,m,\cdots,m)=A+\frac{M}{km}=M.$$

从以上两式可得 $(M-m)(kA-1)=0$. 由于 $A>\dfrac{1}{k}$，因此可得 $M=m$. 再利用定理 3 的结论，可得到 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\bar{y}$. 因 $y_n\in[A,T]$ 且 $T\in\left[\dfrac{kA^2}{kA-1},\infty\right)$，得平衡点 $\bar{y}$ 对区域 $S=[A,\infty)^{k+1}$ 是一个全局吸引子. 证毕.

定理 4 表明，当方程(1)满足 $A>\dfrac{1}{k}$ 时，平衡点 $\bar{y}$ 是全局渐近稳定的.

参考文献：

[1]　Abu-Saris R, Devault R. Global stability of $y_{n+1}=A+(y_n/y_{n-k})$ [J]. Appl Math Comput, 2003, 16: 173-178.

[2]　余廷忠. 一类二阶有理差分方程的稳定性及计算机模拟[J]. 数学的实践与认识, 2013, 17(4): 255-262.

[3]　杨懿. 几类高阶有理差分方程的动力学性质的研究[D]. 重庆：重庆大学, 2009.

[4]　蒋敏，周俊. 一类有理差分方程解的存在性与稳定性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2012, 49(2): 48-53.

[5]　王长有，胡敏. 一类非线性差分方程的解的动力学行为(英文)[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2015(6): 844-848.

[6]　周义仓，曹慧，肖燕妮. 差分方程及其应用[M]. 北京：科学出版社, 2014.