文章编号：1004-4353(2016)04-0297-05

亚纯函数的某类形式差分算子的唯一性

林珊华
(泉州师范学院 数学与计算机科学学院，福建 泉州 362000)

摘要：探讨亚纯函数的某类形式的差分算子在权弱分担值的情况下的唯一性问题，所得定理改进和推广了文献[3]和[4]的结果.

关键词：亚纯函数；差分算子；权弱分担；唯一性
中图分类号：O174.52　　　　**文献标识码**：A

Uniqueness of a class of differential operators of meromorphic functions

LIN Shanhua
(*School of Mathematics and Computer Science*, *Quanzhou Normal University*, *Quanzhou* 362000, *China*)

Abstract: In this paper, we discuss the uniqueness of a class of differential operators of meromorphic functions with weakly weighted sharing value. The obtained theorem improves and generalizes the results of literature [3] and [4].

Keywords: meromorphic function; differential operator; weakly weighed sharing; uniqueness

0　引言及主要结论

亚纯函数 f 为定义在整个复平面上亚纯的函数. 在本文中，沿用文献[1] 中的常用记号以及基本结论. $S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f)=o(T(r,f))$ 的量，可能除去 r 的一个线性测度为有限的集合. 若 a 为满足 $T(r,a)=S(r,f)$ 的亚纯函数，则称 a 为 f 的小函数. f 的小函数集合记为 $S(f)$. 设 f 和 g 是两个亚纯函数，$a\in C\cup\{\infty\}$，称 f 和 g 分担 a CM 是指 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同，并且零点的重数也相同. 若不考虑重数，则称 f 和 g 分担 a IM.

以下给出文中出现的相关记号及概念.

定义 1[1]　设 k 为正整数，f 和 g 为两个非常数亚纯函数且 $a\in C\cup\{\infty\}$，则：

(i) $\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{f-a})$ 表示 $f-a$ 的重数小于等于 k 的零点的计数函数，每个零点仅计 1 次；

(ii) $\overline{N}_{(k}(r,\frac{1}{f-a})$ 表示 $f-a$ 的重数大于等于 k 的零点的计数函数，每个零点仅计 1 次；

(iii) $N_p(r,\frac{1}{f-a})$ 表示 $f-a$ 的零点的计数函数，其中重数 $m<p$，计 m 次；$m\geqslant p$，计 p 次.

定义 2[2]　如果 f 与 g 为非常数亚纯函数，$a\in S(f)\cap S(g)$，k 是正整数或 ∞，则：

(i) $\overline{N}^{E}_{k)}(r,a)$ 表示 $f-a$ 与 $g-a$ 的重数相同且均小于等于 k 的公共零点的计数函数，每个零点仅

收稿日期：2016-09-15　　**作者简介**：林珊华(1981—)，女，讲师，研究方向为复分析.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11602128)；福建省中青年教师教育科研项目(JA15394)

计 1 次；

(ii) $\overline{N}^0_{(k}(r,a)$ 表示 $f-a$ 与 $g-a$ 的重数均大于等于 k 的公共零点的计数函数，每个零点仅计 1 次.

定义 3[2] 如果 f 与 g 为非常数亚纯函数，$a\in S(f)\cap S(g)$，k 是非负整数或 ∞. 当 k 为正整数或 ∞，且有 $\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{f-a})-\overline{N}^E_{k)}(r,a)=S(r,f)$，$\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{g-a})-\overline{N}^E_{k)}(r,a)=S(r,g)$，$\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{f-a})-\overline{N}^0_{(k+1}(r,a)=S(r,f)$，$\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{g-a})-\overline{N}^0_{(k+1}(r,a)=S(r,g)$；或者当 $k=0$，且有 $\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})-\overline{N}_0(r,a)=S(r,f)$，$\overline{N}(r,\frac{1}{g-a})-\overline{N}_0(r,a)=S(r,g)$，则称 f,g 以权 k 弱分担 a，记作 f,g 分担“(a,k)”.

易见，如果 f,g 分担“(a,k)”，则对任何整数 $p\,(0\leqslant p\leqslant k)$，均有 f,g 分担“(a,p)”. 特别地，当 f,g 分担“$(a,0)$”或“(a,∞)”当且仅当 f,g 分担 a “IM”或者“CM”. 当 f,g 分担 1 “IM”时，$\overline{N}^L(r,\frac{1}{f-1})$ 定义为 $f-1$ 的零点重数大于 $g-1$ 的相应的零点重数的精简计数函数，类似地可定义 $\overline{N}^L(r,\frac{1}{g-1})$.

设 f 是复平面上的一个亚纯函数，c 是非零复数. 称 $f(z+c)$ 为 f 的平移，记 f 的差分算子的一般形式为 $F_f(z)=\sum\limits_{i=1}^{k}m_if(z+c_i)$，其中 $m_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为复数，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为互异的有穷复数. 本文中记差分算子的另一种形式为

$$G_f(z)=\sum_{i=1}^{k}(m_i\prod_{j=1}^{l}f^{p_{ij}}(z+c_{ij})),\tag{1}$$

其中 $\sum\limits_{j=1}^{l}p_{ij}=s$，$i=1,2,\cdots,k$，$m_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为复数，$c_{ij}(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,l)$ 为互异的有穷复数.

文献[3] 的作者考虑了 k 阶导数分担值的问题并证明了如下两个定理：

定理 A 设 f 和 g 为两个整函数，满足 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ CM 分担 1，如果 $N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})<(\lambda+o(1))T(r)$，其中 $0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则 $f^{(k)}\cdot g^{(k)}\equiv 1$ 或 $f\equiv g$.

定理 B 设 f 和 g 为两个亚纯函数，满足 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ CM 分担 1，f 和 g CM 分担 ∞. 若 $N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(k+2)\overline{N}(r,f)<(\lambda+o(1))T(r)$，其中 $0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则 $f^{(k)}\cdot g^{(k)}\equiv 1$ 或 $f\equiv g$.

文献[4] 的作者将 k 阶导数分担值换成差分的一般形式分担值，并证明了如下结论：

定理 C 设 f 和 g 为两个有穷级亚纯函数，F_f 和 F_g 分别是 f 和 g 的非常数差分算子. 如果 F_f 和 F_g CM 分担 1，f 和 g CM 分担 ∞，且 $N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)<(\lambda+o(1))T(r)$，其中 $0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则 $F_f\cdot F_g\equiv 1$ 或 $F_f\equiv F_g$.

本文主要是将差分的一般形式推广到差分的另一种形式，并讨论在权弱分担值的情况下的唯一性，从而证明下面的定理：

定理 1 设 f 和 g 为两个有穷级亚纯函数，$G_f(z)=\sum\limits_{i=1}^{k}(m_i\prod\limits_{j=1}^{l}f^{p_{ij}}(z+c_{ij}))$，$G_g(z)=\sum\limits_{i=1}^{k}(m_i\prod\limits_{j=1}^{l}g^{p_{ij}}(z+c_{ij}))$ 分别是 f 和 g 的非常数差分算子，其中 $\sum\limits_{j=1}^{l}p_{ij}=s$，$i=1,2,\cdots,k$，$m_i(i=1,2,\cdots,$

k) 为复数，$c_{ij}(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,l)$ 为互异的有穷复数. 如果 G_f 和 G_g 分担“$(1,l)$”($l\geqslant 4$ 或 l 为 ∞)，f 和 g CM 分担 ∞，且 $N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)<(\lambda+o(1))T(r)$，其中 $0<\lambda<1$，$T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，则 $G_f\cdot G_g\equiv 1$ 或 $G_f\equiv G_g$.

注 1　文献[4]中的例 1 和例 2 说明定理 1 中的“非常数”是必需的. 当 $s=1$ 时，$G_f=F_f$，所以定理 1 改进和推广了定理 C.

1　几个引理

引理 1　设 l 为非负整数或 ∞，F 和 G 是两个非常数亚纯函数，且 F,G 分担“$(1,l)$”($l\geqslant 4$ 或 l 为 ∞)，置 $H=(\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1})-(\frac{G''}{G'}-2\frac{G'}{G-1})$，如果 $H\not\equiv 0$，则 $T(r,F)+T(r,G)\leqslant 2\{\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\}+N_2(r,\frac{1}{F})+N_2(r,\frac{1}{G})+N_4(r,\frac{1}{F-1})+S(r,F)+S(r,G)$. 式中 $N_4(r,\frac{1}{F-1})$ 改为 $N_4(r,\frac{1}{G-1})$ 也是成立.

证明　设 z_0 是 $F-1,G-1$ 的重数为 t 的公共零点. 若 $1\leqslant t\leqslant l$，经过计算可得 H 在 z_0 正则. 特别的，当 $t=1$ 时，z_0 是 H 的零点，因此

$$N_{1)}(r,\frac{1}{F-1})\leqslant N(r,\frac{1}{H})+S(r,F)+S(r,G)\leqslant T(r,H)+S(r,F)+S(r,G).\tag{2}$$

因为 $m(r,H)=S(r,F)+S(r,G)$ 和

$$N(r,H)\leqslant\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}^{L}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}^{L}(r,\frac{1}{G-1})+$$
$$N_0(r,\frac{1}{F'})+N_0(r,\frac{1}{G'})+S(r,F)+S(r,G),\tag{3}$$

其中 $N_0(r,\frac{1}{F'})$ 表示 F' 的零点但不是 F 和 $F-1$ 的零点的计数函数，$N_0(r,\frac{1}{G'})$ 也类似定义，由式(2)和式(3)有

$$N_{1)}(r,\frac{1}{F-1})\leqslant\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}^{L}(r,\frac{1}{F-1})+$$
$$\overline{N}^{L}(r,\frac{1}{G-1})+N_0(r,\frac{1}{F'})+N_0(r,\frac{1}{G'})+S(r,F)+S(r,G).$$

又因为

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}^{L}(r,\frac{1}{F-1})-\frac{1}{2}N_{1)}(r,\frac{1}{F-1})\leqslant\frac{1}{2}N_4(r,\frac{1}{F-1}),$$

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}^{L}(r,\frac{1}{G-1})-\frac{1}{2}N_{1)}(r,\frac{1}{G-1})\leqslant\frac{1}{2}N_4(r,\frac{1}{G-1}),$$

$$N_4(r,\frac{1}{G-1})=N_4(r,\frac{1}{F-1})+S(r,F),$$

所以由第二基本定理知

$$T(r,F)+T(r,G)\leqslant\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})+$$
$$N_{1)}(r,\frac{1}{F-1})-N_{1)}(r,\frac{1}{F-1})-N_0(r,\frac{1}{F'})-N_0(r,\frac{1}{G'})+S(r,F)+S(r,G)\leqslant$$
$$2\{\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\}+N_2(r,\frac{1}{F})+N_2(r,\frac{1}{G})+N_4(r,\frac{1}{F-1})+S(r,F)+S(r,G).$$

引理 2[5]　设 f 为有穷级亚纯函数，其中 $c\in C$ 且 $\delta\in(0,1)$，则

$$m(r,\frac{f(z+c)}{f(z)})+m(r,\frac{f(z)}{f(z+c)})=O(\frac{T(r,f)}{r^{\delta}})=S(r,f).$$

引理 3[6] 设 f 是一个非常数有限级亚纯函数, $c\in C$, 则

$$N(r,\frac{1}{f(z+c)})\leqslant N(r,\frac{1}{f(z)})+S(r,f),\ N(r,f(z+c))\leqslant N(r,f(z))+S(r,f),$$

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f(z+c)})\leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{f(z)})+S(r,f),\ \overline{N}(r,f(z+c))\leqslant \overline{N}(r,f(z))+S(r,f),$$

除去一个对数测度有穷的例外集合.

引理 4 设 f 是有穷级亚纯函数, $G_f(z)=\sum_{i=1}^{k}(m_i\prod_{j=1}^{l}f^{p_{ij}}(z+c_{ij}))$, 且 $\sum_{j=1}^{l}p_{ij}=s$, $i=1,2,\cdots,k$, $m_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为复数, $c_{ij}(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,l)$ 为互异的有穷复数,则:

$$N(r,\frac{1}{G_f})\leqslant sN(r,\frac{1}{f})+(k-1)sN(r,f)+S(r,f),$$

$$N(r,\frac{1}{G_f})\leqslant sN(r,\frac{1}{f})+T(r,G_f)-sT(r,f)+S(r,f).$$

证明 由引理 2 和 3 可得

$$N(r,\frac{1}{G_f})=T(r,\frac{1}{G_f})-m(r,\frac{1}{G_f})\leqslant T(r,G_f)+m(r,\frac{G_f}{f^s})-m(r,\frac{1}{f^s})+S(r,f)\leqslant$$
$$N(r,G_f)+m(r,G_f)-m(r,\frac{1}{f^s})+S(r,f)\leqslant ksN(r,f)+m(r,\frac{G_f}{f^s})+sm(r,f)-$$
$$m(r,\frac{1}{f^s})+S(r,f)\leqslant T(r,f^s)+(k-1)sN(r,f)-m(r,\frac{1}{f^s})+S(r,f)\leqslant$$
$$sN(r,\frac{1}{f})+(k-1)sN(r,f)+S(r,f).$$

$$N(r,\frac{1}{G_f})=T(r,\frac{1}{G_f})-m(r,\frac{1}{G_f})\leqslant T(r,G_f)-m(r,\frac{1}{f^s})+S(r,f)\leqslant$$
$$T(r,G_f)-T(r,f^s)+N(r,\frac{1}{f^s})+S(r,f)\leqslant T(r,G_f)-sT(r,f)+sN(r,\frac{1}{f})+S(r,f).$$

特别的,在证明过程中可得到 $T(r,G_f)\leqslant T(r,f^s)+(k-1)sT(r,f)+S(r,f)\leqslant ksT(r,f)+S(r,f)$, 从而有 $S(r,G_f)\leqslant S(r,f)$.

2 定理 1 的证明

令 $F=G_f$, $G=G_g$, 则由引理 1 可知当 $H\not\equiv 0$ 时,有 $T(r,G_f)+T(r,G_g)\leqslant 2\{\overline{N}(r,G_f)+\overline{N}(r,G_g)\}+N_2(r,\frac{1}{G_f})+N_2(r,\frac{1}{G_g})+N_4(r,\frac{1}{G_f-1})+S(r,G_f)+S(r,G_g)$, 再由引理 3 和 4 可得

$$T(r,G_f)+T(r,G_g)\leqslant 2ks\{\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,g)\}+sN(r,\frac{1}{f})+(k-1)sN(r,f)+$$
$$T(r,G_g)-sT(r,g)+sN(r,\frac{1}{g})+T(r,G_f)+S(r). \tag{4}$$

由 f 和 g CM 分担 ∞, 结合式(4) 可得 $sT(r,g)\leqslant 2ks\{\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,g)\}+sN(r,\frac{1}{f})+sN(r,\frac{1}{g})+(k-1)sN(r,f)+S(r)$, 即

$$T(r,g)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)+S(r). \tag{5}$$

类似地有

$$T(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(5k-1)N(r,f)+S(r). \tag{6}$$

由式(5) 和式(6) 可知已知条件矛盾，因此 $H\equiv 0$，即

$$\frac{G_f''}{G_f'}-2\frac{G_f'}{G_f-1}\equiv\frac{G_g''}{G_g'}-2\frac{G_g'}{G_g-1}. \tag{7}$$

对式(7) 两边积分可得 $\dfrac{1}{G_f-1}=\dfrac{bG_g+a-b}{G_g-1}$(其中 $a\neq 0$) 且有 $T(r,G_f)=T(r,G_g)+O(1)$，从而 $S(r,G_f)=S(r,G_g)$.

情况 1 当 $a=b$ 时，若 $b=-1$，则 $G_f\cdot G_g\equiv 1$. 若 $b\neq -1$，则 $\dfrac{1}{G_f}=\dfrac{bG_g}{(1+b)G_g-1}$，$G_f-\dfrac{1+b}{b}=\dfrac{-1}{bG_g}$. 由第二基本定理可得 $T(r,G_g)\leqslant\overline{N}(r,G_g)+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_g})+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_g-\frac{1}{b+1}})+S(r,G_g)\leqslant\overline{N}(r,G_g)+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_g})+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f})+S(r,g)\leqslant ksN(r,g)+T(r,G_g)-sT(r,g)+sN(r,\dfrac{1}{g})+sN(r,\dfrac{1}{f})+(k-1)sN(r,f)+S(r)$，也就是

$$T(r,g)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{g})+(2k-1)N(r,f)+S(r). \tag{8}$$

同理有 $T(r,G_f)\leqslant\overline{N}(r,G_f)+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f})+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f-\frac{1+b}{b}})+S(r,G_f)\leqslant\overline{N}(r,G_f)+\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f})+\overline{N}(r,G_g)+S(r,f)\leqslant 2ksN(r,f)+T(r,G_f)-sT(r,f)+sN(r,\dfrac{1}{f})+S(r)$，即

$$T(r,f)\leqslant N(r,\frac{1}{f})+2kN(r,f)+S(r). \tag{9}$$

由式(8) 和式(9) 可知已知条件矛盾.

情况 2 当 $a\neq b$ 时，若 $b\neq 0$，有 $G_f-(1+\dfrac{1}{b})=\dfrac{-a}{b^2(G_g+\frac{a-b}{b})}$，从而有 $\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f-(1+\frac{1}{b})})=\overline{N}(r,G_g)$，$\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_g-\frac{b-a}{b}})=\overline{N}(r,G_f)$. 通过类似情况 1 的讨论知已知条件矛盾. 若 $b=0$ 且 $a\neq 1$，有 $G_f=\dfrac{1}{a}G_g+1-\dfrac{1}{a}$，则 $\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f-(1-\frac{1}{a})})=\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_g})$，$\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_g-(1-a)})=\overline{N}(r,\dfrac{1}{G_f})$. 通过类似情况 1 的讨论知已知条件矛盾，因此 $a=1$，即 $G_f\equiv G_g$.

参考文献：

[1] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijing: Science Press, 2003.

[2] Lin S H, Lin W C. Uniqueness of meromorphic functions concerning weakly weighted sharing[J]. Kodai Mathematical Journal, 2006,29(2):269-280.

[3] Yi H X. Unicity theorems for entire or meromorphic functions[J]. Acta Math Sinica (N. S.), 1994,10:121-131.

[4] 曾翠萍. 亚纯函数差分算子与分担值[J]. 中山大学学报(自然科学版),2015,54(3):56-59.

[5] Halburd R G, Korhonen R J. Nevanlinna theory for the difference operator[J]. Ann Acad Sci Fenn, 2006,31(2):463-478.

[6] Qi X G, Yang L Z, Liu K. Uniqueness and periodicity of meromorphic functions concerning difference operator[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010,60(6):1739-1746.