文章编号: 1004-4353(2016)04-0289-08

一类带有分数阶边值条件的分数阶 q-差分方程多重正解的存在性

范成涛，　葛琦*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 研究一类带有分数阶差分边值条件的分数阶 q-差分方程多重正解的存在性. 首先分析了格林函数的一些性质，然后分别利用 Krasnoselskii 不动点定理、Leggett-Williams 不动点定理和对推广了的 Krasnoselskii 不动点定理证明了该方程多重正解的存在性.

关键词: 分数阶 q-差分; Krasnoselskii 不动点定理; Leggett-Williams 不动点定理; 多重正解
中图分类号: O175.6　　　**文献标识码**: A

Existence of multiple positions solutions for a class of fractional q-differences equation with fractional boundary value conditions

FAN Chengtao，　GE Qi*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: This paper is devoted to existence of multiple positive solutions for a class of the fractional q-differences equation with the fractional q-differences boundary conditions. Firstly, we analyze some properties of the Green function. The second, the existence of multiple positive solutions of the equation are proved by applying Krasnoselskii fixed point theorem, Leggett-Williams fixed point theorem, and a new extension of Krasnoselskii fixed point theorem.

Keywords: fractional q-differences; Krasnoselskii fixed point theorem; Leggett-Williams fixed point theorem; multiple positions solutions

0　引言

近年来，q-差分微积分被广泛应用于各领域，尤其是在数学物理模型、动力系统、量子物理和经济学方面[1-2]. 随着对 q-差分微积分研究的深入，学者们对分数阶 q-差分方程边值问题解的存在性又进行了研究，并取得了一些研究成果[3-10]，但这些研究成果中大部分仅是研究了整数阶的初值问题. 2015 年，Li X H 等[6] 研究了如下一类边值条件含参数的分数阶 q-差分方程：

$$\begin{cases}(D_q^{\alpha}u)(t)+f(t,u(t))=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\\ u(0)=0,\ u(1)=\sum_{i=1}^{m}a_iu(\xi_i)+\lambda,\ \xi_i\in(0,1),\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

其中 $0<q<1$，$1<\alpha\leqslant 2$，$a_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m$，$0\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_iu(\xi_i)<1$，$\lambda\geqslant 0$ 是参数，f 是非负连续函数. 文献[6] 的作者利用 Leggett-Williams 不动点定理得到了上述方程的多重正解.

收稿日期: 2016-11-16　　　*通信作者*: 葛琦(1975—)，女，副教授，研究方向为微分方程理论及应用.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161049)；吉林省教育厅"十二五"科技项目(吉教科合字[2015]第 36 号)

2015年,葛琦等[8]研究了如下一类边值条件中含有分数阶 q-差分的分数阶 q-差分方程:

$$\begin{cases}(D_q^\alpha u)(x)=-f(x,u(x)),\ 0\leqslant x\leqslant 1;\\ u(0)=(D_q u)(0)=0,\ (D_q^\nu u)(1)=\int_0^\eta u(t)\mathrm{d}_q t.\end{cases}$$

其中 $2<\alpha<3$, $1<\nu<2$, $\alpha-\nu>1$, $0<\eta<1$, $\Gamma_q(\alpha+1)>\eta^\alpha\Gamma_q(\alpha-\nu)$, $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为连续函数.文献[8]的作者利用Krasnoselskii不动点定理和Leggett-Williams不动点定理得到了上述方程在奇异条件和非奇异条件下的多重正解.

基于上述研究,本文讨论如下带有分数阶边值条件的分数阶 q-差分方程:

$$\begin{cases}(D_q^\alpha x)(t)=-f(t,x(t),I_q^\mu x(t)),\ 0<t<1;\\ x(0)=(D_q x)(0)=0,\ (D_q^\upsilon x)(1)-\beta(D_q^\upsilon x)(\eta)=\lambda.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $2<\alpha\leqslant 3$, $0<\upsilon<1$, $\alpha-\upsilon>2$, $0<\eta<1$, $0\leqslant\beta<1$, $\mu>0$, λ 为参数, $f:[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为连续函数.

1 预备知识

定义1[7] $[a]_q=\dfrac{1-q^a}{1-q}$, $a\in\mathbf{R}$, $q\in(0,1)$.

定义2[7] 幂指函数 $(a-b)^n$ 的 q-类似定义为: $(a-b)^{(0)}=1$; $(a-b)^{(n)}=a^n\prod_{k=0}^{n-1}(a-bq^k)$, $n\in\mathbf{N}$, $a,b\in\mathbf{R}$; $(a-b)^{(\alpha)}=a^\alpha\prod_{n=0}^{\infty}\dfrac{a-bq^n}{a-bq^{\alpha+n}}$, $\alpha\in\mathbf{R}$; 特别地, $b=0$ 时 $a^{(\alpha)}=a^\alpha$.

定义3[7] q-Γ函数定义为 $\Gamma_q(x)=\dfrac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}}$, $x\in\mathbf{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$.易知 $\Gamma_q(x+1)=[x]_q\Gamma_q(x)$.

定义4[7] 函数 $f(x)$ 的 q-导数定义为: $(D_q f)(x)=\dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$, $(D_q f)(0)=\lim\limits_{x\to 0}(D_q f)(x)$.函数 f 的高阶 q-导数定义为: $(D_q^0 f)(x)=f(x)$, $(D_q^n f)(x)=D_q(D_q^{n-1}f)(x)$, $n\in\mathbf{N}$.

定义5[7] Riemann-Liouville型分数阶 q-积分定义为:

$$I_q^0[f](x)=f(x),\ I_q^\alpha[f](x)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^x(x-qt)^{(\alpha-1)}f(t)\mathrm{d}_q t,\ \alpha>0,\ x\in[0,1],$$

其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数.Riemann-Liouville型分数阶 q-导数定义为:

$$(D_q^\alpha f)(x)=(D_q^m I_q^{m-\alpha}f)(x),\ \alpha>0,\ x\in[0,1],$$

其中 m 是不小于 a 的最小整数.

性质1[7] 若 $\alpha>0$, $a\leqslant b\leqslant t$,则 $(t-a)^{(\alpha)}\geqslant(t-b)^{(\alpha)}$.

性质2[7] $[a(t-s)]^{(\alpha)}=a^\alpha(t-s)^{(\alpha)}$, ${}_tD_q(t-s)^{(\alpha)}=[\alpha]_q(t-s)^{(\alpha-1)}$, $\left({}_xD_q\int_0^x f(x,t)\mathrm{d}_q t\right)(x)=\int_0^x {}_xD_q f(x,t)\mathrm{d}_q t+f(qx,x)$,其中 ${}_iD_q$ 表示与变量 i 有关的 q-导数.

引理1[7] 设 $\alpha\in\mathbf{R}^+$, $\lambda\in(-1,+\infty)$,则 $I_q^\alpha((x-a)^{(\lambda)})=\dfrac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)}(x-a)^{(\alpha+\lambda)}$, $0<a<x<b$.

引理2[7] 设 $\alpha,\beta\geqslant 0$, $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数,则:

(a) $(I_q^\beta I_q^\alpha f)(x)=(I_q^{\alpha+\beta}f)(x)$;

(b) $(D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x)=f(x)$.

引理3[10] 设 E 是一个Banach空间, $\mathscr{P}$ 是 E 上的一个锥, Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的开子集,并且 $0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$.设 $A:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ 是一个完全连续算子,如果下列条件二者之一成立,那么 A 在 $\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上至少存在一个不动点:

(B_1) $\|Ax\| \leqslant \|x\|$, $x \in \mathscr{P} \cap \partial\Omega_1$; $\|Ax\| \geqslant \|x\|$, $x \in \mathscr{P} \cap \partial\Omega_2$;

(B_2) $\|Ax\| \geqslant \|x\|$, $x \in \mathscr{P} \cap \partial\Omega_1$; $\|Ax\| \leqslant \|x\|$, $x \in \mathscr{P} \cap \partial\Omega_2$.

引理 4[9]　设 P 是实 Banach 空间 E 上的一个锥, $P_c=\{x \in P: \|x\| \leqslant c\}$, θ 是 P 上的一个非负连续凹泛函,且满足 $\theta(x) \leqslant \|x\|$ $(x \in \bar{P}_c)$. 设 $P(\theta,b,d)=\{x \in P: b \leqslant \theta(x), \|x\| \leqslant d\}$. 如果 $A: \bar{P}_c \to \bar{P}_c$ 是一个全连续算子,并且存在常数 a,b,d,c 满足 $0<a<b<d \leqslant c$,使得下列条件成立,那么 A 至少有 3 个不动点 x_1,x_2,x_3 满足 $\|x_1\| \leqslant a$, $b<\theta(x_2)$, $a<\|x_3\|$ 和 $\theta(x_3)<b$:

(C_1) $\{x \in P(\theta,b,d) \mid \theta(x)>b\} \neq \varnothing$,且 $\theta(Ax)>b$, $x \in P(\theta,b,d)$;

(C_2) 对于 $\|x\| \leqslant a$,有 $\|Ax\|<a$;

(C_3) 对于 $x \in P(\theta,b,c)$ 且 $\|Ax\|>d$,有 $\theta(Ax)>b$.

注 1[9]　如果引理 4 中 $d=c$ 成立,那么条件(C_1)包含条件(C_3).

设 P 是 Banach 空间 E 上的一个锥. 假设 $\varphi,\psi: E \to \mathbf{R}^+$ 是两个连续凹泛函,对 $u \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$ 满足 $\varphi(\lambda u)=|\lambda|\varphi(u)$, $\psi(\lambda u)=|\lambda|\psi(u)$,且对 $u \in E$,有 $\|u\|=r\max\{\varphi(u),\psi(u)\}$,对 $u,v \in E$, $u \leqslant v$ 有 $\varphi(u) \leqslant \varphi(v)$,这里 r 是正常数. 根据以上假设可得如下不动点定理:

引理 5[11]　设 $r_2>r_1>0$, $L>0$ 是常数, $\Omega_i=\{x \in E: \varphi(u)<r_i, \psi(u)<L\}$ $(i=1,2)$ 是 E 中的两个开子集,固定 $D_i=\{u \in E: \varphi(u)=r_i\}$. 假设 $A: P \to P$ 是一个全连续算子满足下列条件 (D_1)—(D_3),那么 A 在 $P \cap (\Omega_2 \backslash \bar{\Omega}_1)$ 上至少存在一个不动点:

(D_1) $\varphi(Au)<r_1$, $u \in D_1 \cap P$; $\varphi(Au)>r_2$, $u \in D_2 \cap P$;

(D_2) $\psi(Au)<L$, $u \in P$;

(D_3) 存在 $p \in (\Omega_2 \cap P)\backslash\{0\}$,使得 $\varphi(p) \neq 0$, $\varphi(u+\lambda p) \geqslant \varphi(u)$, $\forall u \in p$, $\lambda \geqslant 0$.

2　Green 函数及其性质

定理 1　设 $2<\alpha \leqslant 3$, $0<\upsilon<1$, $\alpha-\upsilon>2$, $0<\eta<1$, $0 \leqslant \beta<1$, $\mu>0$, λ 为参数,若 $h \in C([0,1],\mathbf{R})$ 是连续的,则分数阶 q-差分方程

$$\begin{cases}(D_q^\alpha x)(t)=-h(t),\ 0<t<1;\\ x(0)=(D_q x)(0)=0,\ (D_q^\upsilon x)(1)-\beta(D_q^\upsilon x)(\eta)=\lambda,\end{cases} \tag{2}$$

有唯一解 $x(t)=\int_0^1 G(t,qs)h(s)\,\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)h(s)\,\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda t^{\alpha-1}$,其中:

$$G(t,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\begin{cases}(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)},\ 0 \leqslant qs \leqslant t \leqslant 1;\\ (1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1},\ 0 \leqslant t \leqslant qs \leqslant 1;\end{cases}$$

$$H(t,qs)={}_tD_q^\upsilon G(t,qs)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}\begin{cases}(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-\upsilon-1}-(t-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)},\ 0 \leqslant qs \leqslant t \leqslant 1;\\ (1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-\upsilon-1},\ 0 \leqslant t \leqslant qs \leqslant 1.\end{cases}$$

这里 $\Delta=\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-\upsilon-1})}$.

证明　假设 $x(t)$ 是问题(2)的解,由引理 1 有 $x(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_3t^{\alpha-3}-I_q^\alpha h(t)$, $c_1,c_2,c_3 \in \mathbf{R}$. 由边值条件 $x(0)=0$ 解得 $c_3=0$. 又由于$(D_q x)(0)=0$,且$(D_q x)(t)=\int_0^t \dfrac{[\alpha-1]_q(t-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha)}h(s)\,\mathrm{d}_q s+[\alpha-1]_q c_1 t^{\alpha-2}+[\alpha-2]_q c_2 t^{\alpha-3}$,故有 $c_2=0$. 根据定义 5、引理 1 和引理 2 有$(D_q^\upsilon x)(t)=-\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}\times\int_0^t (t-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\,\mathrm{d}_q s+\dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}c_1t^{\alpha-\upsilon-1}$,由边值条件$(D_q^\upsilon x)(1)-\beta(D_q^\upsilon x)(\eta)=\lambda$ 解得

$$c_1=\Delta\left[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\,\mathrm{d}_q s-\beta\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\,\mathrm{d}_q s+\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\right],$$

从而有

$$x(t)=-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_q s+\Delta t^{\alpha-1}\left[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\mathrm{d}_q s-\right.$$
$$\left.\beta\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\mathrm{d}_q s\right]+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}=$$
$$-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_q s-\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\mathrm{d}_q s+$$
$$\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}+\Delta\beta\eta^{\alpha-\upsilon-1}t^{\alpha-1}\right]\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}=$$
$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t\left[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)}\right]h(s)\mathrm{d}_q s+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_t^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}_q s+$$
$$\Delta\beta t^{\alpha-1}\left[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}\eta^{\alpha-\upsilon-1}h(s)\mathrm{d}_q s-\int_0^\eta(\eta-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}h(s)\mathrm{d}_q s\right]+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}=$$
$$\int_0^1G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_q s+\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\beta t^{\alpha-1}\int_0^1H(\eta,qs)h(s)\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}.$$

定理 2 Green 函数 $G(t,qs)$ 具有如下性质:

(i) $G(t,qs)$ 是连续函数,且 $G(t,qs)\geqslant 0$, 对一切 $t,s\in[0,1]$;

(ii) $G(t,qs)\leqslant G(1,qs)$, 对一切 $t,s\in[0,1]$;

(iii) $G(t,qs)\geqslant t^{\alpha-1}G(1,qs)$, 对一切 $t,s\in[0,1]$.

证明 设 $h_1(t,qs)=(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(t-qs)^{(\alpha-1)}$, $0\leqslant qs\leqslant t\leqslant 1$, $h_2(t,qs)=(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}$, $0\leqslant t\leqslant qs\leqslant 1$.

首先证明性质 (i). 由 $G(t,qs)$ 的表达式知其连续, $h_2(t,qs)\geqslant 0$ 显然成立. 下证 $h_1(t,qs)\geqslant 0$. 由性质 1 和性质 2 有 $h_1(t,qs)=(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}t^{\alpha-1}-(1-\frac{qs}{t})^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\geqslant t^{\alpha-1}[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}]$. 由于 $\alpha-\upsilon>2$, 则 $(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}=\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1-qsq^n}{1-qsq^{n+\alpha-\upsilon-1}}-\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{1-qsq^n}{1-qsq^{n+\alpha-1}}\geqslant 0$, 故 $h_1(t,qs)\geqslant 0$. 因此有 $G(t,qs)\geqslant 0$, 同理可知 $H(t,qs)\geqslant 0$.

其次证明性质(ii). 类似(i) 的证明有 ${}_tD_q h_1(t,qs)=[\alpha-1]_q t^{\alpha-2}[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-\frac{qs}{t})^{(\alpha-2)}]\geqslant t^{\alpha-2}[\alpha-1]_q[(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-2)}]\geqslant 0$. 因此 $\forall s\in(0,1]$, $h_1(t,qs)$ 在区间 $0\leqslant qs\leqslant t\leqslant 1$ 上关于 t 单调递增. 同理易证 $h_2(t,qs)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant qs\leqslant 1$ 上关于 t 单调递增, 于是 $\forall t,s\in[0,1]$ 有 $G(t,qs)\leqslant G(1,qs)$.

最后证明性质(iii). 当 $0\leqslant qs\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$\frac{G(t,qs)}{G(1,qs)}=\frac{t^{\alpha-1}(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(t-qs)^{(\alpha-1)}}{(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}}\geqslant t^{\alpha-1}\frac{(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}}{(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}-(1-qs)^{(\alpha-1)}}=t^{\alpha-1}.$$

当 $0\leqslant t\leqslant qs\leqslant 1$ 时, $\frac{G(t,qs)}{G(1,qs)}\geqslant\frac{t^{\alpha-1}(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}}{(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}}=t^{\alpha-1}$, 从而有 $G(t,qs)\geqslant t^{\alpha-1}G(1,qs)$.

注 2 如果定理 1 中 $h(t)\geqslant 0$, $t\in(0,1]$, 那么问题(2) 的解 $x(t)\geqslant 0$.

注 3 求问题(1) 的解, 等价于求方程 $x(t)=\int_0^1G(t,qs)f(s,x(s),I_q^\mu x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^\mu x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}$ 的解.

注 4 设 $0<\tau<1$, 那么 $\min_{t\in[\tau,1]}G(t,qs)\geqslant\tau^{\alpha-1}G(1,qs)$, $s\in[0,1]$.

3 主要结果及其证明

假设 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\times\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ 为连续函数. 记 Banach 空间 $B=C[0,1]$, 赋予范数 $\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$, 在其上定义锥 $\mathscr{P}=\{x\in B:x(t)\geqslant 0,x(t)\geqslant t^{\alpha-1}\|x\|\}$. 在锥上定义一个连续的

凹泛函 $\theta(x)=\min\limits_{t\in[\tau,1]}|x(t)|$. 对于非负连续函数 G,H 和 f,定义全连续算子 $T:\mathscr{P}\to B$ 如下:

$$(Tx)(t)=\int_0^1 G(t,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+$$
$$\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1},\ t\in[0,1].$$

由定理 2 知,对任意的 $x\in\mathscr{P}$,有$(Tx)(t)\geqslant 0$. 另外容易证得$(Tu)(t)\geqslant\tau^{\alpha-1}\|Tu\|$,故 $T(\mathscr{P})\subset\mathscr{P}$. 为了方便,记:

$$M=\left(\tau^{\alpha-1}\left(\int_{\tau}^1 G(1,qs)\mathrm{d}_q s+\Delta\beta\int_0^1 H(\eta,qs)\mathrm{d}_q s\right)\right)^{-1};$$
$$N=\left(\int_0^1(G(1,qs)+\Delta\beta H(\eta,qs))\mathrm{d}_q s\right)^{-1};$$
$$K=\left|\frac{\Delta\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-\upsilon})-[\alpha-\mu]_q}{[\alpha-\mu]_q\Gamma_q(\alpha+\mu)}\right|^{-1}.$$

首先,利用引理 3 证明问题(1) 多重正解的存在性.

定理 3　假设存在 2 个常数 $0<r_1<r_2$,使得(A_1)—(A_3)成立,那么问题(1) 至少有一个正解 x 满足 $r_1\leqslant\|x\|\leqslant r_2$:

(A_1) $f(t,x,y)\geqslant\dfrac{M}{2}r_1$, $(t,x,y)\in[\tau,1]\times[\tau^{\alpha-1}r_1,r_1]\times\left[0,\dfrac{r_1}{\Gamma_q(\mu+1)}\right]$;

(A_2) $f(t,x,y)\leqslant\dfrac{N}{2}r_2$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,r_2]\times\left[0,\dfrac{r_2}{\Gamma_q(\mu+1)}\right]$;

(A_3) $\dfrac{r_1}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{r_2}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}$.

证明　首先,设 $\Omega_1=\{x\in\mathscr{P}:\|x\|<r_1\}$,则对于任意的 $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_1$,有 $\|x\|=r_1$ 且 $0\leqslant x(t)\leqslant r_1$, $0\leqslant I_q^{\mu}x(t)\leqslant\dfrac{r_1}{\Gamma_q(\mu)}$, $\tau^{\alpha-1}r_1\leqslant\min\limits_{\tau\leqslant t\leqslant 1}t^{\alpha-1}\|x\|\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=r_1$,从而由$(\mathrm{A}_1)$ 和(A_3) 有

$$\|Tx\|\geqslant\min_{t\in[\tau,1]}\Big|\int_0^1 G(t,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+$$
$$\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}\Big|\geqslant$$
$$\tau^{\alpha-1}\Big[\int_{\tau}^1 G(1,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s\Big]+$$
$$\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}\geqslant M^{-1}\frac{Mr_1}{2}+\frac{r_1}{2}=r_1=\|x\|,$$

因此有 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$, $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_1$.

另一方面,设 $\Omega_2=\{x\in\mathscr{P}:\|x\|<r\}$,则对于任意的 $x\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_2$,有 $\|x\|=r_2$ 且 $0\leqslant x(t)\leqslant r_2$, $0\leqslant I_q^{\mu}x(t)\leqslant r_2$,从而由$(\mathrm{A}_2)$ 和(A_3) 有

$$\|Tx\|\leqslant\max_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^1 G(t,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+$$
$$\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}\Big\}\leqslant\int_0^1(G(1,qs)+\Delta\beta H(\eta,qs))f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\leqslant$$
$$N^{-1}\frac{N}{2}r_2+\frac{r_2}{2}=r_2=\|x\|.$$

由引理 3 可得 T 至少有一个不动点 $x\in\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$,因此问题(1) 至少有一个正解 x 满足 $r_1\leqslant\|x\|\leqslant r_2$.

定理 4　假设存在 3 个常数 $0<r_1<r_2<r_3$,使得(A_1)、(A_3)、(A_4) 和(A_5) 成立,那么问题(1) 至少有 2 个正解 x_1,x_2 满足 $r_1\leqslant\|x_1\|\leqslant r_2\leqslant\|x_2\|\leqslant r_3$:

(A_4) $f(t,x,y)<\dfrac{N}{2}r_2$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,r_2]\times\left[0,\dfrac{r_2}{\Gamma_q(\mu+1)}\right]$;

(A_5) $f(t,x,y)\geqslant \frac{M}{2}r_3$, $(t,x,y)\in[\tau,1]\times[\tau^{\alpha-1}r_3,r_3]\times[0,\frac{r_3}{\Gamma_q(\mu+1)}]$.

证明 由(A_4)可知存在2个正数k和l使得$r_1<k<r_2<l<r_3$,且$f(t,x,y)\leqslant\frac{N}{2}k$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,k]\times[0,\frac{k}{\Gamma_q(\mu+1)}]$, $f(t,x,y)\leqslant\frac{N}{2}l$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,l]\times[0,\frac{l}{\Gamma_q(\mu+1)}]$. 再根据$(A_5)$和定理3,可得$T$至少有2个不动点$x_1\in\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega}_k\backslash\Omega_1)$, $x_2\in\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_l)$,因此问题(1)至少有2个正解$x_1,x_2$满足$r_1\leqslant\|x_1\|\leqslant r_2\leqslant\|x_2\|\leqslant r_3$.

由定理4可得到如下推论1:

推论1 假设存在m个常数$0<r_1<r_2<\cdots<r_m$,使得(A_3)、(A_6)和(A_7)成立,那么问题(1)至少有$m-1$个正解x_i, $i=1,2,\cdots,m-1$满足$r_i\leqslant\|x_i\|\leqslant r_{i+1}$:

(A_6) $f(t,x,y)>\frac{M}{2}r_{2i-1}$, $(t,x,y)\in[\tau,1]\times[\tau^{\alpha-1}r_{2i-1},\ r_{2i-1}]\times[0,\frac{r_{2i-1}}{\Gamma_q(\mu+1)}]$, $i=1,2,\cdots,\left[\frac{m+1}{2}\right]$;

(A_7) $f(t,x,y)<\frac{N}{2}r_{2i}$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,r_{2i}]\times[0,\frac{r_{2i}}{\Gamma_q(\mu+1)}]$, $i=1,2,\cdots,\left[\frac{m+1}{2}\right]$.

其中$\left[\frac{m+1}{2}\right]$表示不小于$\frac{m+1}{2}$的最小整数.

其次,利用引理4证明问题(1)多重正解的存在性.

定理5 假设存在常数a,b,c满足$0<a<b<c$,使得下列条件成立,那么问题(1)至少有3个正解x_1,x_2,x_3,满足$\max\limits_{t\in[0,1]}|x_1(t)|<a$, $b<\min\limits_{t\in[\tau,1]}|x_2(t)|<\max\limits_{t\in[0,1]}|x_2(t)|\leqslant c$, $a<\max\limits_{t\in[0,1]}|x_3(t)|\leqslant c$, $\min\limits_{t\in[\tau,1]}|x_3(t)|<b$:

(B_1) $f(t,x,y)<\frac{Na}{2}$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,a]\times[0,\frac{a}{\Gamma_q(\mu+1)}]$;

(B_2) $f(t,x,y)\geqslant\frac{Mb}{2}$, $(t,x,y)\in[\tau,1]\times[b,c]\times[0,\frac{c}{\Gamma_q(\mu+1)}]$;

(B_3) $f(t,x,y)\leqslant\frac{Nc}{2}$, $(t,x,y)\in[0,1]\times[0,c]\times[0,\frac{c}{\Gamma_q(\mu+1)}]$;

(B_4) $\frac{b}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}}\leqslant\lambda\leqslant\frac{c}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}$.

证明 为了应用引理4,设$\mathscr{P}_i=\{u\in\mathscr{P}:\|u\|\leqslant i\}$, $\mathscr{P}(\theta,b,c)=\{u\in\mathscr{P}:b\leqslant\theta(u),\|u\|\leqslant c\}$,记$\overline{\mathscr{P}}_i$为$i$的闭包. 首先,若$u\in\overline{\mathscr{P}}_c$,则$\|u\|\leqslant c$. 由条件$(B_3)$可知

$$\|Tx\|\leqslant\max_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^1 G(t,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}\Big\}\leqslant\int_0^1(G(1,qs)+\Delta\beta H(1,qs))f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\leqslant N^{-1}\frac{Nc}{2}+\frac{c}{2}=c,$$

因此T是$\overline{\mathscr{P}}_c$到$\overline{\mathscr{P}}_c$上的算子. 同理,若$u\in\overline{\mathscr{P}}_a$,则引理4中的条件$(D_2)$成立. 为了证明条件$(D_1)$成立,选取$x(t)=\frac{b+c}{2}$ $(t\in[0,1])$,由此可得$x(t)=\frac{b+c}{2}\in\mathscr{P}(\theta,b,c)$, $\theta(x)=\theta(\frac{b+c}{2})>b$,从而有$\{x\in\mathscr{P}(\theta,b,c):\theta(u)>b\}\neq\varnothing$. 因此若$x\in\mathscr{P}(\theta,b,c)$,则$b\leqslant x(t)\leqslant c$ $(t\in[\tau,1])$. 由(B_2)有

$$\min_{t\in[\tau,1]}|(Tx)|=\min_{t\in[\tau,1]}\Big|\int_0^1 G(t,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}\Big|\geqslant$$

$$\tau^{\alpha-1}\left[\int_\tau^1 G(1,qs)f(s,x(s),I_q^\mu x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta\int_0^1 H(\eta,qs)f(s,x(s),I_q^\mu x(s))\mathrm{d}_q s\right]+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}\geqslant M^{-1}\frac{Mb}{2}+\frac{b}{2}=b,$$

即对于 $x\in\mathscr{P}(\theta,b,c)$ 有 $\theta(Tx)>b$.

综上,问题(1)至少有 3 个正解 x_1,x_2,x_3,满足 $\max\limits_{t\in[0,1]}|x_1(t)|<a$,$b<\min\limits_{t\in[\tau,1]}|x_2(t)|<\max\limits_{t\in[0,1]}|x_2(t)|\leqslant c$,$a<\max\limits_{t\in[0,1]}|x_3(t)|\leqslant c$,$\min\limits_{t\in[\tau,1]}|x_3(t)|<b$.

定理 6　假设存在常数 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,\cdots,m)$ 满足 $0<a_1<b_1<c_1<a_2<b_2<c_2<\cdots<a_m$,$m\in\mathbf{N}$,使得下列条件对于 $i=1,2,\cdots,m$ 成立,那么问题(1)至少有 $2m-1$ 个正解:

(B_5) $f(t,x,y)<\dfrac{Na_i}{2}$,$(t,x,y)\in[0,1]\times[0,a_i]\times\left[0,\dfrac{a_i}{\Gamma_q(\mu+1)}\right]$;

(B_6) $f(t,x,y)\geqslant\dfrac{Mb_i}{2}$,$(t,x,y)\in[\tau,1]\times[b_i,c_i]\times\left[0,\dfrac{c_i}{\Gamma_q(\mu+1)}\right]$;

(B_7) $f(t,x,y)\leqslant\dfrac{Nc_i}{2}$,$(t,x,y)\in[0,1]\times[0,c_i]\times\left[0,\dfrac{c_i}{\Gamma_q(\mu+1)}\right]$;

(B_8) $\dfrac{b_1}{\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{c_1}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}$.

证明　当 $m=1$ 时,由条件(B_5)可知全连续算子 T 是 $\overline{\mathscr{P}}_{a_1}\to\overline{\mathscr{P}}_{a_1}$ 上的算子,于是由引理 4 推得问题(1)至少有一个正解 $x_1\in\overline{\mathscr{P}}_{a_1}$. 假设当 $m=k$ 时结论成立,为了证明当 $m=k+1$ 时结论也成立,假设存在常数 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 满足 $0<a_1<b_1<c_1<a_2<b_2<c_2<\cdots<a_k<b_k<c_k<a_{k+1}$,$k\in\mathbf{N}$,使得:

$$f(t,x,y)<Na_i,\ (t,x,y)\in[0,1]\times[0,a_i]\times\left[0,\frac{a_i}{\Gamma_q(\mu+1)}\right],\ i=1,2,\cdots,k+1;\tag{3}$$

$$f(t,x,y)\geqslant Mb_i,\ (t,x,y)\in[\tau,1]\times[b_i,c_i]\times\left[0,\frac{c_i}{\Gamma_q(\mu+1)}\right],\ i=1,2,\cdots,k;\tag{4}$$

$$f(t,x,y)\leqslant Nc_i,\ (t,x,y)\in[0,1]\times[0,c_i]\times\left[0,\frac{c_i}{\Gamma_q(\mu+1)}\right],\ i=1,2,\cdots,k.\tag{5}$$

由假设可知问题(1)至少有 $2k-1$ 个正解 $x_i\in\overline{\mathscr{P}}_{a_k}(i=1,2,\cdots,2k-1)$. 同时由引理 4 和式(3)—(5)可知,至少存在 3 个正解 $x,y,z\in\overline{\mathscr{P}}_{a_{k+1}}$,使得

$$\max_{t\in[0,1]}|x|<a_k,\ b_k<\min_{t\in[\tau,1]}|y|<\max_{t\in[0,1]}|y|\leqslant c_k,\ a_k<\max_{t\in[0,1]}|z|\leqslant c_{k+1},\ \min_{t\in[\tau,1]}|z|<b_k.$$

显然 $y,z\neq x$,因此问题(1)至少存在 $2k+1$ 个正解 $x_i\in\overline{\mathscr{P}}_{a_i}(i=1,2,\cdots,2k+1)$. 由此可知当 $m=k+1$ 时结论也成立,故问题(1)至少有 $2m-1$ 个正解.

最后,利用引理 5 证明问题(1)正解的存在性.

这里定义两个连续的凸泛函满足 $\rho(x)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$,$\gamma(x)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|I_q^\mu x(t)|$,$\forall x\in B$. 显然 $\|x\|\leqslant\max\{\rho(x),\gamma(x)\}$,且 $\rho(\kappa x)=|\kappa|\rho(x)$,$\gamma(\kappa x)=|\kappa|\gamma(x)$,$x\in B$,$\kappa\in\mathbf{R}$. $\rho(x)\leqslant\rho(y)$,$x,y\in\mathscr{P}$,$x\leqslant y$.

定理 7　假设存在常数 d,e,L 满足 $0<d<\tau e<e<L$,使得下列条件成立,那么问题(1)至少有一个正解 $x(t)$,满足 $d<\rho(x)<e$,$I_q^\mu u(t)<L$,$t\in[0,1]$:

(C_1) $f(t,x,y)<\dfrac{Nd}{2}$,$(t,x,y)\in[0,1]\times[0,d]\times[0,L]$;

(C_2) $f(t,x,y)\geqslant\dfrac{Me}{2}$,$(t,x,y)\in[\tau,1]\times[\tau^{\alpha-1}e,e]\times[0,L]$;

(C_3) $f(t,x,y)<\dfrac{KL}{2}$,$(t,x,y)\in[0,1]\times[0,e]\times[0,L]$;

(C_4) $\dfrac{e}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}}\leqslant\lambda\leqslant\min\left\{\dfrac{d}{2\Delta\Gamma_q(\alpha-\upsilon)},\dfrac{\Gamma_q(\alpha+\mu)L}{2\Delta\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}\right\}$.

证明 为了应用引理 5,考虑如下边值问题:

$$\begin{cases}(D_q^{\alpha}x)(t)=f^*(t,x(t),I_q^{\mu}x(t)),\ 0<t<1;\\ x(0)=(D_qx)(0)=0,\ (D_q^{\upsilon}x)(1)-\beta(D_q^{\upsilon}x)(\eta)=\lambda.\end{cases}\tag{6}$$

这里

$$f^*(t,x,y)=\begin{cases}f(t,x,y),\ (t,x,y)\in[0,1]\times[0,e]\times[0,L],\\ f(t,e,y),\ (t,x,y)\in[0,1]\times[e,+\infty]\times[0,L],\\ f(t,x,L),\ (t,x,y)\in[0,1]\times[0,e]\times[L,+\infty),\\ f(t,e,L),\ (t,x,y)\in[0,1]\times[e,+\infty)\times[L,+\infty).\end{cases}$$

因 f 是连续的,所以 $f^*:[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的,于是可得算子 $T^*:\mathscr{P}\to B$, $(T^*x)(t)=\int_0^1 G(t,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}$, $t\in[0,1]$ 也是全连续算子.

设 $\Delta_1=\{x\in B:x(t)<d,I_q^{\mu}x(t)<L\}$, $\Delta_2=\{x\in B:x(t)<e,I_q^{\mu}x(t)<L\}$, $\Omega_1=\{x\in B:\alpha(x)=d\}$,$\Omega_2=\{x\in B:\rho(x)=e\}$. 显然存在一个 $\varphi\in(\Delta_1\cap\mathscr{P})\setminus\{0\}$,使得 $\rho(x+\kappa\varphi)\geqslant\rho(x)$ $(x\in\mathscr{P},\kappa\geqslant0)$. 下面分 3 个步骤证明引理 5 的所有条件都满足.

第一步,由(C_1) 和 $\rho(x)=d$, $x\in\Omega_1\cap\mathscr{P}$,有

$$\rho(T^*x)=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\right.$$
$$\left.\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}\right|<\int_0^1(G(1,qs)+\Delta\beta H(\eta,qs))f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\leqslant$$
$$N^{-1}\frac{Nd}{2}+\frac{d}{2}=d.$$

第二步,由(C_2) 和 $\rho(x)=e$, $x\in\Omega_2\cap\mathscr{P}$, $x(t)\geqslant\min\limits_{t\in[\tau,1]}\|x\|\geqslant\tau^{\alpha-1}\|x\|$, $t\in[\tau,1]$,有

$$\rho(T^*x)\geqslant\min_{t\in[\tau,1]}\left|\int_0^1 G(t,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\right.$$
$$\left.\Delta\beta t^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)t^{\alpha-1}\right|\geqslant$$
$$\tau^{\alpha-1}\int_{\tau}^1 G(1,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\Delta\beta\tau^{\alpha-1}\int_0^1 H(\eta,qs)f^*(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+$$
$$\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\tau^{\alpha-1}\geqslant M^{-1}\frac{Me}{2}+\frac{e}{2}=e.$$

第三步,由(C_3) 对 $x\in\mathscr{P}\cap\Delta_2$,有

$$\gamma(T^*x)=\max_{t\in[0,1]}\left|-\int_0^t\frac{(t-qs)^{(\alpha+\mu-1)}}{\Gamma_q(\alpha+\mu)}f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\right.$$
$$\Delta I_q^{\mu}t^{\alpha-1}\left[\int_0^1(1-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s-\right.$$
$$\left.\left.\beta\int_0^{\eta}(\eta-qs)^{(\alpha-\upsilon-1)}f(s,x(s),I_q^{\mu}x(s))\mathrm{d}_q s+\lambda\Gamma_q(\alpha-\upsilon)\right]\right|\leqslant$$
$$\frac{KL}{2}\left|\frac{\Delta\Gamma_q(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-\upsilon})-[\alpha-\mu]_q}{[\alpha-\mu]_q\Gamma_q(\alpha+\mu)}\right|+\frac{\Delta\lambda\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\alpha-\upsilon)}{\Gamma_q(\alpha+\mu)}\leqslant L.$$

综上根据引理 5 可知,至少存在一个 $x\in\mathscr{P}\cap(\Delta_2\setminus\bar{\Delta}_1)$,使得 $x(t)=(T^*x)(t)$. 故方程(6) 至少存在一个正解 $x(t)$,满足 $d<\rho(x)<e$, $I_q^{\mu}u(x)<L$. 由 f 的定义可知 $f(t,x(t),I_q^{\mu}x(t))=f^*(t,x(t),I_q^{\mu}x(t))$,故问题(1) 至少存在一个正解 $x(t)$.

(下转第 324 页)

3 结论

通过对小鼠投喂不同浓度的 MS 活性糖溶液后的实验结果表明,0.2%的 MS 活性糖溶液(低剂量组)比其他实验组能够显著地提高红细胞膜的唾液酸含量,降低脑中脂褐素的含量和肾脏中 MDA 的含量,且 SOD 活性最高,这表明低剂量组的 MS 活性糖溶液对小鼠具有一定的抗衰老效果.

参考文献:

[1] 陈伟,姜颖越,张腾腾,等. MS 活性多糖对细菌生长及生物学特性影响的初步研究[J]. 延边大学农学学报,2015,37(3):254-258.
[2] 宋明洲,姜成哲,朴明淑,等. 活性糖对蟾蜍坐骨神经干动作电位影响的初步研究[J]. 黑龙江科技信息,2016(7):107-108.
[3] 郑志永,詹晓北,朱德强,等. 聚唾液酸和唾液酸寡糖的生物合成及其在营养食品中的应用前景[J]. 食品科学,2013,34(15):361-368.
[4] 程铖,高春芳. 唾液酸的生物学意义及其在肝病中的研究进展[J]. 检验医学,2013,28(4):333-336.
[5] 韦安稳,汪淑晶. 唾液酸在疾病中作用的研究进展[J]. 大连医科大学学报,2015,37(6):610-614.
[6] 吴虹,马小平,张小蕾,等. 人红细胞唾液酸含量与细胞"年龄"的关系[J]. 贵阳医学院学报,1991,1(4):317-318.
[7] 胡梅,刘群良,舒畅,等. 还少丹对老年小鼠脂褐素含量和 DNA 分子结构稳定性的影响[J]. 湖南中医药大学学报,2011,31(3):33-35.
[8] 秦德安,钮晓达,陈跃春. 用 Bialsche 试剂直接测定红细胞膜上唾液酸量[J]. 生物化学与生物物理进展,1987,14(4):63-65.
[9] 吴春福,于庆海,刘雯,等. 依据自由基学说研究人参茎叶皂甙的抗衰老作用[J]. 沈阳药学院学报,1992,9(1):37-40.
[10] 庞战军,周玖,陈瑗. 自由基医学研究方法[M]. 北京:人民卫生出版社,2000:110.
[11] 向荣,王鼎年. 过氧化脂质硫代巴比妥酸分光光度法的改进[J]. 生物化学与生物物理进展,1979,17(3):241-242.
[12] 李留安,袁学军. 动物生物化学实验指导[M]. 北京:清华大学出版社,2013:43.
[13] 刘希英,黄振学,赵秀珍,等. 老年人红细胞膜唾液酸含量与红细胞免疫功能的相关性[J]. 中华老年医学杂志,1998,17(2):110-112.
[14] 顾振,郭晓东,王鹤鸣. 小鼠脑组织中脂褐素和丙二醛相关关系的观察[J]. 南京医科大学学报,1999,19(4):284-286.
[15] 宁鹏. 中药复方对衰老小鼠部分组织中 SOD 活性和 MDA 含量的影响[J]. 黑龙江畜牧兽医,2012(17):130-131.

(上接第 296 页)

参考文献:

[1] Ernst T. Some results for q-functions of many variables[M]. Rend Padova, 2004.
[2] Ernst T. q-Bernoulli and q-Euler polynomials, an umbral approach[J]. Int J Difference Equations, 2006,51(1):31-80.
[3] Yang W G. Positive solutions for nonlinear semipositone fractional q-difference system with coupled integral boundary conditions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014,244:702-725.
[4] Ricardo A, Natalia M. Existence results for fractional q-difference equations of order [2,3] with three-point boundary conditions[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2014,19:1675-1685.
[5] Jiang M, Zhong S. Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference equations with Riemann-Liouville type q-derivatives[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015,47:429-459.
[6] Li X H, Han Z L, Zhao Y. Existence and multiplicity of positives solutions for fractional q-difference equations with parameter[J]. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2015,5(4):267-287.
[7] 孙明哲,韩筱爽. 一类分数阶 q-差分边值问题的正解[J]. 延边大学学报(自然科学版),2013,39(4):252-255.
[8] 葛琦,侯成敏. 一类分数阶 q-差分边值问题的多重正解的存在性[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2015,32(2):163-170.
[9] 葛琦,侯成敏. 一类分数阶差分方程边值问题多重正解的存在性[J]. 东北石油大学学报,2012,36(4):101-110.
[10] Zhao Y L, Chen H B, Zhang Q M. Existence and multiplicity of positive solutions for nonhomogeneous boundary value problems with fractional q-derivatives[J]. Boundary Value Problems, 2013,2013:103.
[11] Guo Y, Ge W. Positive solutions for three-point boundary value problems with dependence on the first order derivative[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004,209(1):291-301.