文章编号: 1004-4353(2016)04-0281-08

一类联合两全保险模型的准备金计算方法

金艳[1]，　洪义成[2]，　孙婷婷[2]，　姜今锡[2*]
(1.延边大学附属医院(延边医院)，吉林 延吉 133000；2.延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 在文献[11]研究的基础上，研究了一个随机利率下由终身寿险、养老保险和储蓄还本组成的可调整保险金额的家庭型联合保险双随机模型，讨论了此类模型的净准备金的计算方法，并基于实证分析探讨了此类保险的风险评估问题. 本文结果对随机利率下研究责任准备金计算问题具有一定的参考价值.

关键词: 随机利率；准备金；利率风险；家庭型联合保险
中图分类号: O211.9　　　**文献标识码:** A

The calculation method of reserves for a kind of Combined insurance model

JIN Yan[1]，　HONG Yicheng[2]，　SUN Tingting[2]，　JIANG Jinxi[2*]
(1. *Affiliated Hospital of Yanbian University* (*Yanbian Hospital*), *Yanji* 133000, *China*;
2. *Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: In this paper, we studied a class of adjustable insurance amount home-based combined insurance double stochastic model by whole life insurance, pension insurance and savings payback part under stochastic interest rate function. And on this basis, we discussed the method of calculating net reserves of such models, and we given the appropriate formula. At the same time, we verified the validity of this method based on empirical analysis. These research will have some reference for further discussing problems of reserve calculation under stochastic interest rate.

Keywords: stochastic interest rate; reserve; rick of interest rate; home-based combined insurance

0　引言

随着人类生活水平的提高，越来越多的人意识到寿险的重要性以及它在人类生活中所起的重要作用. 保险公司计提的责任准备金是保护投保人合法利益的重要保障，也是保险公司的一项重要负债，直接影响到保险公司的净资产和资金运用效益；所以，保险责任准备金的计提是否适当，是保险公司核算的重要内容之一. 经典的精算理论通常假定利率是固定不变的，即寿险保单的预定利率一旦确定，在其生命周期内是不能变化的，利率的变化会造成寿险保单的预定利率和实际利率的偏高，这将对寿险公司产生重大的影响；所以，随机利率下的寿险精算理论与方法成为保险精算的热点问题之一.

自 J. H. Pollard[1] 把利息力作为一个随机变量对精算函数进行研究以来，国外很多学者开始考虑寿险与年金中死亡率和利率均视为随机的寿险模型的现值计算和净准备金计提问题，并得到了很多有意义的研究成果[2-7]. 国内学者对随机利率下的各种寿险模型以及精算现值、准备金的计算等问题的研究也取得不少成果，如：2003 年，王丽燕等对利息力采用 Wiener 过程建模，构建了家庭联合保险的精算

收稿日期: 2016 - 11 - 09
* **通信作者:** 姜今锡(1959—)，男，理学博士，教授，研究方向为应用概率统计、运筹学.

模型[8];2010 年,王丽燕等对利息力采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建立生死两全保险模型,得到了保单全部价值的计算公式,并进一步在死亡力均匀分布假设下简化了计算公式[9];2014 年,柳扬等将利息力采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建立生死两全保险模型,给出了净保费的一般表达式以及在死亡均匀分布假设下均衡纯保费的简洁计算公式[10].本文作者也曾通过对随机利率下由养老保险、终身寿险和储蓄还本组成的可调整保险金额的家庭型联合保险双随机模型的研究,得到了年均衡保费的一般性计算公式,以及死亡力均匀分布假设条件下更为简洁的计算表达式[11].本文在文献[11]的基础上,针对一类较特殊的家庭型联合保险双随机模型的净准备金问题进行讨论,给出其责任准备金计算方法,并通过实例分析,验证研究结果在应用上的可行性和有效性.

1 模型描述与预备定理

1.1 承保对象与保险责任

本文所选取的承保对象为身体健康且年龄在法定年龄以上的一对合法夫妻,假设个体间相互独立,他们的年龄分别记为 x,y,用 $T(x)$,$T(y)$ 表示个体(x)和(y)的未来生存时间.假设承保对象从投保之日起,每年年初向寿险公司缴纳年均衡净保费 P,缴纳期限为 $\min\{n,K(\overline{xy})+1\}$ 年[11].

本文研究的寿险模型除了提供正常的寿险保障外,还增加了还本部分,所以在保单中寿险公司的保险责任由寿险部分、年金部分和储蓄还本部分组成,相关内容和一些概念参见文献[11].

1.2 利率模型的选择

为了更好地刻画利率的随机性,本文采用反射 Brown 运动和泊松过程建立利息力累计函数模型[9],即

$$y(t)=\delta t+\sigma|B_t|+\gamma Z_t, \tag{1}$$

其中 δ,σ,γ 是与 t 无关的相互独立的随机变量或实常数,且假设原点反射 Brownian 过程 $|B_t|$、Poisson 过程 Z_t 和未来生存时间 $T(x)$ 相互独立.

结论 1[11] 令 $g(t)=\mathbb{E}(\exp\{-y(t)\})$,则有 $g(t)=2\mathrm{e}^{Mt}[1-\Phi(\delta\sqrt{t})]$,其中 $M=\frac{\delta^2}{2}+\lambda(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)-\delta$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$.

1.3 预备定理及其证明

定理 1[11] 令 $N=\delta-\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)$, $S(x)=\frac{1}{M}\mathrm{e}^{Mt}\left[1-\Phi(\sigma\sqrt{t})\right]$,则 $\Gamma_k=\int_k^{k+1}MS(t)\mathrm{d}t$,又可以写成 $\Gamma_k=\Psi(k+1)-\Psi(k)$,其中 $\Psi(k)=S(x)+\frac{\sigma}{M\sqrt{2N}}\Phi(\sqrt{2Nx})$, $M=\frac{\sigma^2}{2}+\lambda(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)-\delta$.

定理 2[11] 令 $R(x)=\frac{1}{M}\mathrm{e}^{Mt}\left[x-\frac{1}{M}\right]$,则 $\Omega_k=\int_k^{k+1}MtS(t)\mathrm{d}t$,又可以写成 $\Omega_k=\Upsilon(k+1)-\Upsilon(k)$,其中 $S(x)$ 如定理 1 所给,M 如结论 1 所给,且 $\Upsilon(x)=R(x)[1-\Phi(\sigma\sqrt{x})]-\frac{\sigma\sqrt{x}}{2MN\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-Nx}+(\frac{\sigma}{2\pi M\sqrt{2N}}-\frac{\sigma}{M^2\sqrt{2N}})\Phi(\sqrt{2Nx})$.

定理 3[12] 在 UDD 假设下,如下的几个性质成立:${}_tq_x=tq_x$, $\mu_x(t)=\frac{q_x}{1-tq_x}$, ${}_tp_x=1-tq_x$,同时有 $f_{xy}(t)={}_tp_{x\,t}p_y(\mu_x(t)+\mu_y(t))=q_x+q_y-2tq_xq_y$, $f_{\overline{xy}}(t)={}_tp_{x\,t}q_y\mu_x(t)+{}_tq_{x\,t}p_y\mu_y(t)=2tq_xq_y$.

注 1 保险精算学相关符号意义可参见文献[12].

定理 4 令 $g(\cdot)$ 如定理 1 所给,$f_{xy}(t)$ 与 $f_{\overline{xy}}(t)$ 分别表示联合生存状态(xy)的未来生存时间 $T(xy)$ 和最后生存状态$(\overline{xy})$的未来生存时间 $T(\overline{xy})$ 的概率密度函数[11],则在 UDD 假设成立的条件下,有:

1) $\int_k^{k+1} g(t-r) f_{xy}(t)\,\mathrm{d}t = 2(q_x + q_y - 2rq_xq_y)\,[\Psi(k+1-r) - \Psi(k-r)] - 4q_xq_y\,[\Upsilon(k+1-r) - \Upsilon(k-r)]$；

2) $\int_k^{k+1} g(t-r) f_{\overline{xy}}(t)\,\mathrm{d}t = 4q_xq_y\,[\Upsilon(k+1-r) - \Upsilon(k-r)] - 4rq_xq_y\,[\Psi(k+1-r) - \Psi(k-r)]$，

其中 $\Psi(\cdot)$ 与 $\Upsilon(\cdot)$ 分别由定理 1 与定理 2 给出.

证明　由定理 1 和定理 3 的结果可知：

1)
$$\int_k^{k+1} g(t-r) f_{xy}(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} 2\mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,{}_tp_{x\,t}p_y(\mu_x(t)+\mu_y(t))\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_k^{k+1} 2\mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,(q_x+q_y-2tq_xq_y)\,\mathrm{d}t =$$
$$2(q_x+q_y)\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,\mathrm{d}t - 4q_xq_y\int_k^{k+1} t\,\mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,\mathrm{d}t.$$

令 $t-r=l$，$t=l+r$，$k<t<k+1$，$k-r<l<k-r+1$，

$$2(q_x+q_y)\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,\mathrm{d}t - 4q_xq_y\int_k^{k+1} t\,\mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,\mathrm{d}t =$$
$$2(q_x+q_y)\int_k^{k+1} \mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,\mathrm{d}l - 4q_xq_y\int_k^{k+1} (l+r)\mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,\mathrm{d}l =$$
$$2(q_x+q_y)\Gamma_{k-r} - 4q_xq_y\int_{k-r}^{k-r+1} l\,\mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,\mathrm{d}l -$$
$$4q_xq_y\int_{k-r}^{k-r+1} r\,\mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,\mathrm{d}l = 2(q_x+q_y)\Gamma_{k-r} - 4q_xq_y\Omega_{k-r} - 4rq_x\,q_y\Gamma_{k-r}. \tag{2}$$

由定理 1 和定理 2 的结果可知，式(2) 可改写为

$$\int_k^{k+1} g(t-r) f_{xy}(t)\,\mathrm{d}t = 2(q_x+q_y-2rq_{x\,t}q_y)[\Psi(k+1-r) - \Psi(k-r)] - 4q_xq_y[\Upsilon(k+1-r) - \Upsilon(k-r)].$$

2) 由结论 1 和定理 1 可知

$$\int_k^{k+1} g(t-r) f_{\overline{xy}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} 2\mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,2t_tp_{x\,t}p_y\,\mathrm{d}t.$$

令 $t-r=l$，$t=l+r$，$k<t<k+1$，$k-r<l<k-r+1$，

$$\int_k^{k+1} 2\mathrm{e}^{M(t-r)}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{t-r})]\,2t_tp_{x\,t}p_y\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_k^{k+1} 2\mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,2\,(l+r)_tp_{x\,t}p_y\,\mathrm{d}l = 4q_xq_y\int_{k-r}^{k-r+1} l\,\mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,\mathrm{d}l -$$
$$4q_xq_y\int_{k-r}^{k-r+1} r\,\mathrm{e}^{Ml}\,[1-\Phi(\sigma\sqrt{l})]\,\mathrm{d}l = 4q_xq_y\Omega_{k-r} - 4rq_xq_y\Gamma_{k-r}. \tag{3}$$

由定理 1 和定理 2 的结果可知，式(3) 可改写为

$$\int_k^{k+1} g(t-r) f_{\overline{xy}}(t)\,\mathrm{d}t = 4q_xq_y[\Upsilon(k+1-r) - \Upsilon(k-r)] - 4rq_xq_y[\Psi(k+1-r) - \Psi(k-r)].$$

2　准备金的计算与讨论

2.1　准备金的计算

由于寿险公司的保险责任由寿险、年金和储蓄还本 3 个部分组成，所以下面要讨论的责任准备金也依然分为这 3 个部分. 设 l_x 表示 l 个人在 x 岁时投保，d_{x+r} 表示每年死亡人数，$r=0,1,\cdots,k-1$ 表示保单年度.

在第 $r+1$ 个保单年度，比如 l_{x+r} 个个体缴纳保费，则缴纳总额为 $l_{x+r}\pi_r$ 元. 若在这一年度死亡的人

数为 d_{x+r}，则死亡给付总额为 $b_{r+1}d_{x+r}$ 元.

$$l_{x+r\ k}V=\sum_{h=0}^{k-1}(\pi_r-vb_{r+1}q_{x+r})l_{x+r}(1+i)^{k-r}=\sum_{h=0}^{k-1}(l_{x+r}\pi_r-vb_{r+1}d_{x+r})(1+i)^{k-r}.$$

因此，本年度投保人缴纳保费的剩余额为 $l_{x+r}\pi_r-vb_{r+1}d_{x+r}$ 元. 这笔资金累计到第 k 年末，则总的额度为 $(l_{x+r}\pi_r-vb_{r+1}d_{x+r})(1+i)^{k-r}$. 考虑到签单后 k 年内的不同年度的保费剩余，如将各年度的剩余累计到第 k 个保单年度末，则得到的总的保费剩余为

$$\sum_{r=0}^{k-1}(l_{x+r}\pi_r-vb_{r+1}d_{x+r})(1+i)^{k-r}.$$

若在第 k 年共有 l_{x+k} 人生存，则每个生存的个体平均享有的剩余保费的额度为

$$\frac{\sum_{r=0}^{k-1}(l_{x+r}\pi_r-vb_{r+1}d_{x+r})(1+i)^{k-r}}{l_{x+k}},$$

该额度即为第 k 个保单年度末的净准备金 ${}_kV$.

第 r 个保单年度末保险人未来损失量记为 ${}_rL$，即 r 时刻保险人对投保对象给付额的现值与未来承保对象缴纳保费的现值之差. r 时刻保险人对投保对象给付额的现值可分为 3 个部分：寿险部分、年金部分以及储蓄还本部分，这 3 部分的现值与精算现值的讨论如下：

1) 寿险部分. 根据保险责任，在寿险部分的投保对象采用的是联合生存者状态，且从 r 时刻开始，若投保对象 (xy) 在第 $k+1$ 个保单年度死亡，$k=r,r+1,\cdots$，则保险人应即刻向投保对象给付 $A(1+\alpha K(xy))$. 因此对这一部分，r 时刻保险人给付投保对象的给付额现值为

$${}_rS=\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1),\tag{4}$$

从而在 $T(xy)\geqslant r$ 的条件下，这一部分的责任准备金为

$$\begin{aligned}&E({}_rS\mid T(xy)\geqslant r)=E\Big[\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)\mid T(xy)\geqslant r\Big]=\\&\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)E[\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)\mid T(xy)\geqslant r]=\\&\frac{1}{{}_rp_{xy}}\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)E[\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)].\end{aligned}\tag{5}$$

进一步地，由于

$$E[\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)]=\int_k^{k+1}g(t-r)f_{xy}(t)\mathrm{d}t,$$

因此，在 UDD 假设成立的条件下，由定理 3 中 1) 的结果可知

$$\begin{aligned}&E[\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)]=\int_k^{k+1}g(t-r)f_{xy}(t)\mathrm{d}t=\\&2(q_x+q_y)\Gamma_{k-r}-4q_xq_y\Omega_{k-r}-4rq_xq_y\Gamma_{k-r}.\end{aligned}\tag{6}$$

根据式(6)，式(5) 可改写成

$$\begin{aligned}&E({}_rS\mid T(xy)\geqslant r)=\frac{1}{{}_rp_{xy}}\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)E[\mathrm{e}^{-y[T(xy)-r]}\,\mathrm{I}(k\leqslant T(xy)<k+1)]=\\&\frac{1}{{}_rp_{xy}}\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)\int_k^{k+1}g(t-r)f_{xy}(t)\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{(1-rq_x)(1-rq_y)}\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)[2(q_x+q_y)\Gamma_{k-r}-4q_xq_y\Omega_{k-r}-4rq_xq_y\Gamma_{k-r}].\end{aligned}\tag{7}$$

2) 年金部分. 根据保险责任，在年金部分的投保对象采用的是最后生存者状态，且当 $r<h$ 且 $T(\overline{xy})\in(r,h)$ 时，保险人无需承担向投保对象发放年金的义务，而当 $r<h$ 且 $T(\overline{xy})\geqslant h$ 时，保险人

应向投保对象$(\overline{xy})$每年年初给付$B(1+\beta(K(\overline{xy})-h))$. 因此这部分的$r$时刻保险人对投保对象给付额的现值为

$$
{}_rN_1=\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)\mathrm{e}^{-y[k+h-r]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k+h)\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r)\mathrm{I}(r<h)=
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)\mathrm{e}^{-y[k+h-r]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k+h)\mathrm{I}(r<h). \tag{8}
$$

当$r\geqslant h$时，保险人应向投保对象$(\overline{xy})$每年年初给付$B(1+\beta(K(\overline{xy})-h))$，因此这部分的$r$时刻保险人对投保对象给付额的现值为

$$
{}_rN_2=\sum_{k=r}^{\infty}B(1+\beta(k-h))\mathrm{e}^{-y[k]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r+k)\mathrm{I}(r\geqslant h)\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r)=
$$

$$
\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta(k+r-h))\mathrm{e}^{-y(k)}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r+k)\mathrm{I}(r\geqslant h). \tag{9}
$$

在$T(\overline{xy})\geqslant r$的条件下，以上两部分和的数学期望，即年金部分的责任准备金为

$$
\begin{aligned}
&E({}_rN\mid T(\overline{xy})\geqslant r)=E[{}_rN_1+{}_rN_2\mid T(\overline{xy})\geqslant r]=\\
&\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)E[\mathrm{e}^{-y[k+h-r]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k+h)\mid T(\overline{xy})\geqslant r]\mathrm{I}(r<h)+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta(r+k-h))E[\mathrm{e}^{-y[k]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant k+r)\mid T(\overline{xy})\geqslant r]\mathrm{I}(r\geqslant h)=\\
&\frac{1}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h-r)\,{}_{k+h}p_{\overline{xy}}\mathrm{I}(r<h)+\frac{1}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta(k+r-h))g(k)\,{}_{k+r}p_{\overline{xy}}\mathrm{I}(r\geqslant h).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

因此，在 UDD 假设成立的条件下，由定理 4 中 2）的结果可知

$$
\begin{aligned}
&E({}_rN\mid T(\overline{xy})\geqslant r)=\frac{1}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h-r)\,{}_{k+h}p_{\overline{xy}}\mathrm{I}(r<h)+\\
&\frac{1}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta(k+r-h))g(k)\,{}_{k+r}p_{\overline{xy}}\mathrm{I}(r\geqslant h)=\\
&\frac{1}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h-r)[1-(k+h)^2q_xq_y]\mathrm{I}(r<h)+\\
&\frac{1}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta(k+r-h))g(k)[1-(k+r)^2q_xq_y]\mathrm{I}(r\geqslant h).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

3）储蓄还本部分. 根据保险责任，在储蓄还本部分的投保对象采用的是最后生存者状态. 因为投保人自投保之日起每年年初向保险人缴付年均衡保费P，共缴付$\min\{n,K(\overline{xy})+1\}$年，且当投保对象$(\overline{xy})$死亡时保险人应向投保对象立即退还所缴保费的$C$倍. 因此，当$r\geqslant n$时，对这一部分，$r$时刻保险人给付投保对象的给付额现值为

$$
\begin{aligned}
{}_rH_1=&CPn\mathrm{e}^{-y[T(\overline{xy})-r]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant n)\mathrm{I}(r\geqslant n)\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r)=\\
&CPn\mathrm{e}^{-y[T(\overline{xy})-r]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r)\mathrm{I}(r\geqslant n).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

当$r<n$时，这部分资金在r时刻的折现现值为

$$
\begin{aligned}
{}_rH_2=&CP\sum_{k=r}^{n-1}(1+k)\mathrm{e}^{-y[T(\overline{xy})-r]}\mathrm{I}(k\leqslant T(\overline{xy})<k+1)\mathrm{I}(r<n)+\\
&CPn\mathrm{e}^{-y[T(\overline{xy})-r]}\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant n)\mathrm{I}(T(\overline{xy})\geqslant r)\mathrm{I}(r<n).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

所以，储蓄还本部分的资金在r时刻的折现现值为

$$
{}_rH={}_rH_1+{}_rH_2. \tag{14}
$$

为了给出这部分的精算现值，在$T(\overline{xy})\geqslant r$的条件下，对式(12)取条件期望，即得

$$E({}_rH_1 \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = E(CPn\,\mathrm{e}^{-y[T(\overline{xy})-r]}\,\mathrm{I}(r \geqslant n)\mathrm{I}(T(\overline{xy}) \geqslant r) \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) =$$

$$\frac{CPn}{{}_rp_{\overline{xy}}}E\left[\mathrm{e}^{-y(T(\overline{xy})-r)}\mathrm{I}(T(\overline{xy}) \geqslant r)\right]\mathrm{I}(r \geqslant n) = \frac{CPn}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=r}^{\infty}\int_k^{k+1} g(t-r)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t\mathrm{I}(r \geqslant n).$$

再对式(13)在 $T(\overline{xy}) \geqslant r$ 的条件下取条件期望可得类似结果.因此,在 UDD 假设成立的条件下,由定理 4 中 2) 的结果可知:

$$E({}_rH_1 \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = \frac{CPn}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=r}^{\infty}\int_k^{k+1} g(t-r)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t\mathrm{I}(r \geqslant n) =$$

$$\frac{CPn}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=r}^{\infty}4q_xq_y(\Omega_{k-r} - r\Gamma_{k-r})\mathrm{I}(r \geqslant n), \tag{15}$$

$$E({}_rH_2 \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = \frac{CP}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=r}^{n-1}(1+k)\int_k^{k+1} g(t-r)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t\mathrm{I}(r < n) +$$

$$\frac{CPn}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=n}^{\infty}(1+k)\int_k^{k+1} g(t-r)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t\mathrm{I}(r < n) = \frac{CP}{1-r^2q_xq_y} \times$$

$$\sum_{k=r}^{n-1}(1+k)4q_xq_y(\Omega_{k-r} - r\Gamma_{k-r})\mathrm{I}(r < n) + \frac{CPn}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=r}^{n-1}4q_xq_y(\Omega_{k-r} - r\Gamma_{k-r})\mathrm{I}(r < n) =$$

$$\frac{CP}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=r}^{n-1}(1+k)\int_k^{k+1} g(t-r)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t\mathrm{I}(r < n) + \frac{CPn}{{}_rp_{\overline{xy}}}\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1} g(t-r)f_{\overline{xy}}(t)\mathrm{d}t\mathrm{I}(r < n), \tag{16}$$

从而 $E({}_rH \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = E({}_rH_1 \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) + E({}_rH_2 \mid T(\overline{xy}) \geqslant r)$.

下面再考虑 r 时刻投保对象对保险人给付保费额的现值.根据保险责任,当 $r \geqslant n$ 时,r 时刻投保对象对保险人给付额的现值为 0;当 $r < n$ 时,r 时刻投保对象对保险人给付额的现值为

$${}_rB = P\sum_{k=r}^{n-1}\mathrm{e}^{-y[k-r]}\,\mathrm{I}(T(\overline{xy}) \geqslant k)\mathrm{I}(T(\overline{xy}) \geqslant r). \tag{17}$$

从而 $E({}_rB \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = P\sum_{k=r}^{n-1}E(\mathrm{e}^{-y[k-r]}\,\mathrm{I}(T(\overline{xy}) \geqslant k) \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = \frac{P}{{}_rP_{\overline{xy}}}\sum_{k=r}^{n-1}g(k-r){}_kP_{\overline{xy}}$.进一步地,在 UDD 假设成立的条件下,可知

$$E({}_rB \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) = \frac{P}{{}_rP_{\overline{xy}}}\sum_{k=r}^{n-1}g(k-r){}_kP_{\overline{xy}} = \frac{P}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=r}^{n-1}g(k-r)(1-k^2q_xq_y). \tag{18}$$

注 2 这里要用到关系式[12]:${}_tp_{xy} + {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y$,${}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y$.

综上所述,第 r 个保单年度末保险人未来损失量 ${}_rL$ 为:${}_rL = {}_rS + {}_rN + {}_rH - {}_rB$.

再令 ${}_rV$ 为第 r 个保单年度末保险人的净准备金,根据净准备金的定义,有

$${}_rV = E({}_rS \mid T(xy) \geqslant r) + E({}_rN \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) + E({}_rH \mid T(\overline{xy}) \geqslant r) - E({}_rB \mid T(\overline{xy}) \geqslant r). \tag{19}$$

把式(7)、(11)、(15)、(16)和式(18)结果代入到式(19)中,可得

$${}_rV = \frac{1}{(1-rq_x)(1-rq_y)}\sum_{k=r}^{\infty}A(1+\alpha k)\left[2(q_x+q_y)\Gamma_{k-r} - 4q_xq_y\Omega_{k-r} - 4rq_xq_y\Gamma_{k-r}\right] +$$

$$\frac{1}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h-r)\left[1-(k+h)^2q_xq_y\right]\mathrm{I}(r < h) +$$

$$\frac{1}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta(k+r-h))g(k)\left[1-(k+r)^2q_xq_y\right]\mathrm{I}(r \geqslant h) + \frac{CPn}{1-r^2q_xq_y} \times$$

$$\sum_{k=r}^{\infty}4q_xq_y(\Omega_{k-r} - r\Gamma_{k-r})\mathrm{I}(r \geqslant n) + \frac{CP}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=r}^{n-1}(1+k)4q_xq_y(\Omega_{k-r} - r\Gamma_{k-r})\mathrm{I}(r < n) +$$

$$\frac{CPn}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=r}^{n-1}4q_xq_y(\Omega_{k-r} - r\Gamma_{k-r})\mathrm{I}(r < n) - \frac{P}{1-r^2q_xq_y}\sum_{k=r}^{n-1}g(k-r)(1-k^2q_xq_y). \tag{20}$$

最后，把式(21) 中的 P 值代入到式(20)，即可得到$_rV$ 的表达式.

$$P=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}A(1+\alpha k)[2(q_x+q_y)\Gamma_k-4q_xq_y\Omega_k]+\sum_{k=0}^{\infty}B(1+\beta k)g(k+h)_{k+h}p_{\overline{xy}}}{\sum_{k=0}^{n-1}g(k)_kp_{\overline{xy}}-(C\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)4q_xq_y\Omega_k+Cn\sum_{k=n}^{\infty}4q_xq_y\Omega_k)}. \tag{21}$$

2.2　实例分析及讨论

下面考虑在死亡均匀分布的假设下，年龄分别为 $x=30$ 岁和 $y=25$ 岁的一对夫妻投 $n=30$ 年期的与本文相同的保险产品. 假设国家规定的退休年龄为$R=65$岁，人类极限年龄假定为$M=105$岁，并采用本文中的利息力累加函数 $y(t)=\delta t+\sigma\mid B_t\mid+\gamma Z_t$，其中 $\delta=0.01$，$\sigma=0.02$，$\gamma=0.08$，$\lambda=0.2$. 再令 $A=200\,000$，$B=3\,000\times12=36\,000$，$C=1$，$\alpha=0.05$ 以及 $\beta=0.01$. 根据中国人寿保险业经验生命表(CLM03 和 CLF03) 可知：$q_x=0.759\times10^{-3}$，$q_y=0.301\times10^{-3}$. 根据公式(21) 可知，年均衡保费为 27 756.171 3 元. 不同的 r 值对应的责任准备金的变化情况如表 1 所示.

表 1　不同的 r 值对应的责任准备金的变化情况

r	$_rV$	r	$_rV$		r	$_rV$	r	$_rV$
0	0	10	305 237.5		80	1 031 262	90	747 122.2
1	27 012.8	11	340 475.2		81	1 007 710	91	712 169.5
2	54 748.53	12	376 670.5		82	983 158.5	92	675 884.8
3	83 227.54	13	413 851.5		83	957 577.9	93	638 227.9
4	112 470.8	14	452 047.3	…	84	930 939.5	94	599 156.7
5	142 499.8	15	491 287.6		85	903 212.8	95	558 627.4
6	173 337	16	531 603.8		86	874 366.6	96	516 594.1
7	205 005.3	17	573 028.2		87	844 368.6	97	473 008.3
8	237 528.3	18	615 594.4		88	813 185.1	98	427 819.0
9	270 930.6	19	659 337.5		89	780 781.7	99	380 971.5

由表 1 可知，当 $r=0$ 时，$_rV=0$. 这说明保险人签单后未来给付额的精算现值和投保人签单后未来缴纳保费的精算现值是相等的，即保险人的签单损失量的期望值是 0. 再由图 1 可知，随着保单年度 r 的增大，对应的$_rV$ 先增大，后减少. 特别是当 $r=41$ 时，即夫妻俩的年龄分别为 71 岁和 66 岁时，对应的$_rV$ 值(1 414 698.182 861 05) 达到最大. 为了更详细地研究本文对应的保险产品，相对于保单年度的净准备金的变化趋势，下面对寿险部分、年金部分、还本部分、保费部分进行详细分解.

1) 寿险部分. 由图 1 可知，当保单年度 r 变大时，对应的 $E({}_rS\mid T(xy)\geqslant r)$ 先变大后变小. 特别是当 $r=30$ 时，即夫妻俩的年龄分别为 60 岁和 55 岁时，$E({}_rS\mid T(xy)\geqslant r)$ 达到最大值 18 525.144 8.

2) 年金部分. 由图 2 可知，当保单年度 r 变大时，对应的 $E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 先变大后变小. 特别是当 $0\leqslant r\leqslant35$ 时，即夫妻俩的年龄分别达到 65 岁和 60 岁之前，$E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 计算对式(8) 在 $T(xy)\geqslant r$ 条件下的数学期望；而当 $r>35$ 时，$E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 计算对式(9) 在 $T(xy)\geqslant r$ 条件下的数学期望，在 $r=42$ 时 $E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 达到最大值 1 396 924.579 7.

3) 还本部分. 由图 3 可知，当保单年度 r 变大时，对应的 $E({}_rH\mid T(xy)\geqslant r)$ 一直在变小. 特别是当 $0\leqslant r\leqslant35$ 时，即夫妻俩的年龄分别达到 65 岁和 60 岁之前，$E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 计算对式(12) 在 $T(xy)\geqslant r$ 条件下的数学期望；而当 $r>35$ 时，$E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 计算对式(13) 在 $T(xy)\geqslant r$ 条件下的数学期望，在 $r=42$ 时 $E({}_rN\mid T(xy)\geqslant r)$ 达到最大值 1 396 924.579 7.

4) 保费部分. 由图 4 可知，当保单年度 r 变大时，对应的 $E({}_rB\mid T(\overline{xy})\geqslant r)$ 一直在变小. 特别是到 $r=30$ 时，等于 0. 因为 $n=30$，保费要交到 60 岁.

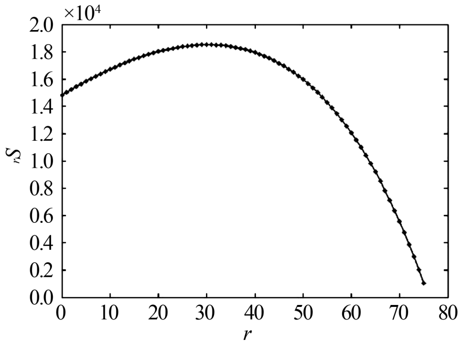

图 1 不同 r 值所对应的 $E({}_rS \mid T(xy)\geqslant r)$ 变化趋势

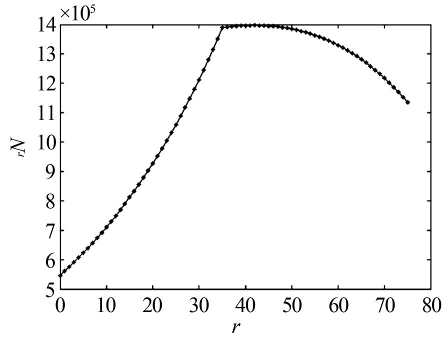

图 2 不同 r 值所对应的 $E({}_rN \mid T(xy)\geqslant r)$ 变化趋势

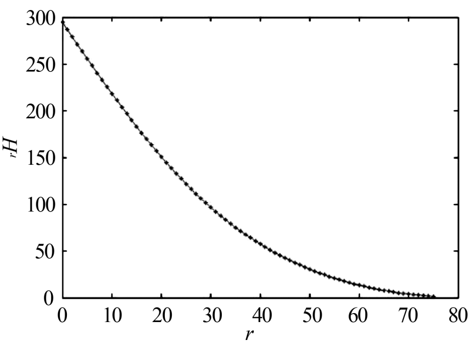

图 3 不同 r 值所对应的 ${}_rH$ 变化趋势

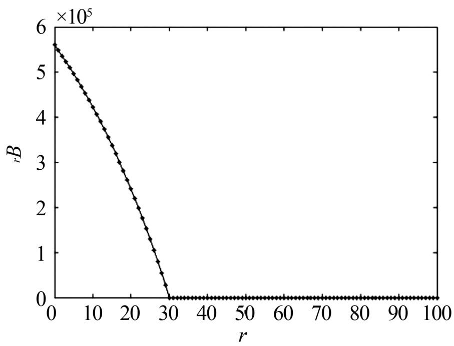

图 4 不同 r 值所对应的 ${}_rB$ 变化趋势

3 结论

本文通过对所建立的随机利率下家庭型联合保险模型进行讨论,得到了关于此类保险产品的净准备金的计算公式,通过对不同保单年度的净准备金案例的计算和分析,验证了本文所提出的计算公式和方法的合理性和应用方面的有效性.但本文还存在着部分需要进一步探讨的问题,例如,需要进一步探讨此类保险产品的每个保单年度的资金变化情况,进而进行相关的风险分析等,因此今后将对这些问题做进一步分析,以完善本文提出的方法.

参考文献:

[1] Pollard J H. On fluctuating interest rates[J]. Bulletin de 1'Association Royale des Actuaries Belges, 1971,66:68-97.

[2] Dhaene J. Stochastic interest rates and auto regressive integrated moving average processes[J]. ASTIN Bulletin, 1989,19(1):131-138.

[3] Gary Parker. Moments of the present value of the future of a portfolio of policies[J]. Scandinavia Actuarial Journal, 1994,1:53-67.

[4] Beekman J A, Fuelling C P. Extra randomness in some annuities in certain annuity models and mortality randomness in some annuities[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1991(10):275-287.

[5] Beekman J A, Fuelling C P. One approach to dual randomness in life insurance[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1993,76(2):173-182.

[6] Pesand, Skinner. Duration for bonds with default risk[J]. Journal of Banking and Finance, 1974,21(4):1-16.

[7] Hoedemakers T, Beirlant J, Goovaerts M J, et al. On the distribution of discounted loss reserves using generalized linear models[J]. Scand Actuarial Journal, 2005(1):25-45.

[8] 王丽燕,冯恩民.一种家庭联合保险的双随机模型[J].工程数学学报,2003,20(8):69-72.

[9] 王丽燕,郝亚丽,张海娇,等.随机利率下增额两全保险[J].大连理工大学学报,2010,50(5):827-830.

[10] 柳扬,洪宇,王丽燕.一个随机利率下的夫妻综合保险模型[J].辽宁师范大学学报(自然科学版),2014,37(4):461-468.

[11] 刘文斌,金艳,姜今锡.一个随机利率下的家庭型联合保险随机模型[J].延边大学学报(自然科学版),2015,41(4):285-291.

[12] 杨静平.寿险精算模型[M].北京:北京大学出版社,2002.