文章编号：1004-4353(2016)03-0203-04

一类双调和方程的非平凡解的存在性

刘春晗
（齐鲁师范学院 数学学院，山东 济南 250013）

摘要：利用山路引理，讨论了非线性项在负无穷远处是渐近线性而在正无穷远处是超线性的一类双调和方程，且获得了该方程的非平凡解. 所得结论推广了文献[3]和文献[5]的相应定理.

关键词：山路引理；混合线性问题；双调和方程
中图分类号：O175.25　　　**文献标识码**：A

Existence of nontrivial solutions for a class of biharmonic equations

LIU Chunhan
(*School of Mathematics, Qilu Normal University, Jinan* 250013, *China*)

Abstract: By using the Mountain pass Lemma, when the nonlinear term is asymptotically linear at the negative infinity but superlinear at the positive infinity, a class of biharmonic equations at resonance are discussed. The existence of nontrivial solutions is proved. The resevant theorems of the literature [3] and [5] are generalized.

Keywords: Mountain pass Lemma; mixed linear question; biharmonic equations

0 引言

考虑一类双调和方程

$$\begin{cases} \Delta^2 v - \dfrac{N^2\,(N-4)^2}{16}\,\dfrac{v}{|x|^4} = f(x,v),\ x \in \Omega, \\ v = \Delta v = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是有界的光滑区域，$f(x,v)$ 满足以下条件：

(F_1) 存在某个常数 $C>0$，使得 $|f(x,v)| \leqslant C(1+|v|^p)$，$\forall x \in \Omega$，$v \in \mathbf{R}$. 这里 $1<p<p^*=\dfrac{N+4}{N-4}$，$N \geqslant 5$.

(F_2) $f(x,v) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$，$f(x,v)v \geqslant 0$，$\forall x \in \Omega$，$v \in \mathbf{R}$.

(F_3) $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{f(x,v)}{v}=a$，$\lim\limits_{v\to -\infty}\dfrac{f(x,v)}{v}=b$，$\lim\limits_{v\to +\infty}\dfrac{f(x,v)}{v}=+\infty$，对 a. e. $x \in \Omega$ 一致，其中 $a<\lambda_1<b$，$b=\lambda_k$，$k \geqslant 2$，且 λ_k 是特征值问题(2)对应的特征值.

(F_4) $\lim\limits_{v\to -\infty}(f(x,v)v-2F(x,v))=+\infty$.

收稿日期：2016-07-02　　**作者简介**：刘春晗(1981—)，男，副教授，研究方向为非线性泛函分析及其应用.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10971179)；山东省高等学校科技计划项目(J12LI53)；齐鲁师范学院青年教师科研基金资助项目(2014L1001)

文献[1] 的作者定义了一个新的空间 H,并证明了特征值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 v-\dfrac{N^2(N-4)^2}{16}\dfrac{v}{|x|^4}=\lambda v, x\in\Omega\\ v\neq 0, x\in\Omega, v\in H_0^2(\Omega)\end{cases} \tag{2}$$

存在解,其中 H 是将空间 $H_0^2(\Omega)$ 依范数 $\|v\|^2=\int_\Omega(|\Delta v|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v^2}{|x|^4})\mathrm{d}x$ 的完备化空间.定义 H 中的内积为 $\langle v,w\rangle=\int_\Omega(\Delta v\Delta w-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{vw}{|x|^4})\mathrm{d}x$,容易得出 H 按上述内积仍为 Hilbert 空间.关于空间 H 中的特征值问题可参看文献[1] 和文献[3-4].

文献[3] 和文献[5] 分别在 f 满足下列无穷远处共振和非共振的条件下,证明了方程(1) 至少存在一个非平凡解:

(f_2) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}=\mu$, $\lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{f(x,t)}{t}=\upsilon$,对 a.e. $x\in\Omega$ 一致,其中 $\mu<\lambda_1<\upsilon=\lambda_k$,且 $\lambda_k(k\geqslant 2)$ 是特征值问题(1) 对应的特征值.

$(\mathrm{f}_2)'$ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}=\mu$, $\lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{f(x,t)}{t}=\upsilon$,对 a.e. $x\in\Omega$ 一致,其中 $\mu<\lambda_1<\upsilon<+\infty$, $\upsilon\neq\lambda_k$,且 $\lambda_k(k\geqslant 2)$ 是特征值问题(2) 对应的特征值.

以上考虑的均是 f 在无穷远处为渐进线性的情形.本文利用山路引理,在 f 满足正无穷远处是超线性而负无穷远处是渐近线性且共振的情况下研究了椭圆方程(1) 混合线性问题解的存在性,所得结果推广了文献[3] 和文献[5] 中的相应定理.

易知,方程(1) 的弱解就是泛函

$$\Phi(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\Delta v|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v^2}{|x|^4})\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,v)\mathrm{d}x$$

的临界点,其中 $F(x,v)=\int_0^v f(x,s)\mathrm{d}s$,且有

$$\langle\Phi'(v),\varphi\rangle=\int_\Omega(\Delta v\Delta\varphi-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v\varphi}{|x|^4})\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,v)\varphi\mathrm{d}x, \forall\varphi\in H.$$

1 定义和引理

定义 1[6] 设 $\Phi\in C^1(E,\mathbf{R})$,若对于任意满足 $\Phi(v_n)\to c$, $(1+\|v_n\|)\Phi'(v_n)\to 0$ $(n\to\infty)$ 的数列 $\{v_n\}$ 均存在收敛子列,则称 Φ 对于每一个 $c\in\mathbf{R}$ 满足 $(C)_c$ 条件;如果 Φ 对于每一个 $c\in\mathbf{R}$ 满足 $(C)_c$ 条件,则称 Φ 满足 (C) 条件.

引理 1[5] Hilbert 空间 H 紧嵌入到 $L^2(\Omega)$ 空间中.

定理 1[6] 假设 E 为实的 Banach 空间, $\varphi\in C^1(E,\mathbf{R})$,对某一个常数 $\alpha<\beta$, $\rho>0$ 且 $v_1\in E$, $\|v_1\|>\rho$ 满足 $\max\{\varphi(0),\varphi(1)\}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\inf\limits_{\|v\|=\rho}\varphi(v)$.令 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=0,\gamma(1)=u_1\}$, $c=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}\max\limits_{\tau\in[0,1]}\varphi(\gamma(\tau))$,则 $c\geqslant\beta>0$ 且存在 $\{v_n\}\subset E$,使得 $\varphi(v_n)\to c$, $(1+\|v_n\|)\varphi'(v_n)\to 0$, $n\to\infty$.并且,如果 φ 再满足 $(C)_c$ 条件,则 c 就是 φ 的临界点.

2 主要结果及其证明

本文用到 Hilbert 空间 H,它是将空间 $H_0^2(\Omega)$ 依范数 $\|v\|^2=\int_\Omega(|\Delta v|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v^2}{|x|^4})\mathrm{d}x$ 的完备化空间, H 中的内积为 $\langle v,w\rangle=\int_\Omega(\Delta v\Delta w-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{vw}{|x|^4})\mathrm{d}x$,其中 $v,w\in H$, $x\subset\Omega$.

定理 2　假设 $f(x,v)$ 满足(F_1)—(F_4)，并且 $b=\lambda_k(k\geqslant 2)$，则方程(1) 至少存在一个非平凡解.

证明　首先证明泛函 Φ 满足(C) 条件. 先证明$\{v_n\}$ 有界. 假设 v_n 满足

$$(1+\|v_n\|)\Phi'(v_n)\to 0,\ \Phi(v_n)\to c. \tag{3}$$

若 $\|v_n\|\to+\infty(n\to\infty)$，则令 $y_n=\dfrac{v_n}{\|v_n\|}$，显然 $\|y_n\|=1$，由此可知 y_n 不恒为 0，因此可得到一个子列，不妨仍记为$\{y_n\}$，使得

$$y_n\rightharpoonup y_0 \text{ 于 } H,\ y_n\to y_0 \text{ 于 } L^2(\Omega),\ y_n\to y_0 \text{ 于 a.e. } x\in\Omega;\ |y_n(x)|\leqslant l(x) \text{ 于 a.e. } x\in\Omega.$$

其中 $y_0\in H$，$l\in L^2(\Omega)$. 由式(3) 和 $\|v_n\|\to+\infty$，可知对于任意的 $\psi\in H$，有

$$\left|\int_\Omega\left(\Delta y_n\Delta\psi-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{y_n\psi}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{f(x,v_n)}{\|v_n\|}\psi\mathrm{d}x\right|=\frac{|\langle\Phi'(v_n),\psi\rangle|}{\|v_n\|}\leqslant$$
$$\frac{1}{\|v_n\|}\|\Phi'(v_n)\|\,\|\psi\|\to 0. \tag{4}$$

对式(4) 取极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{f(x,v_n)\psi}{\|v_n\|}\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\Delta y_0\Delta\psi-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{y_0\psi}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x,\ \forall\psi\in H. \tag{5}$$

下面证明 $y_0(x)\leqslant 0$ 对 a.e. $x\in\Omega$ 成立. 在式(5) 中取 $\psi=y_0^+=\max\{y_0,0\}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega^+}\frac{f(x,v_n)y_0}{\|v_n\|}\mathrm{d}x=\int_{\Omega^+}\left(\Delta y_0\Delta y_0-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{y_0^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\Omega^+}\left(|\Delta y_0|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{y_0^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x<+\infty, \tag{6}$$

其中 $\Omega^+=\{x\in\Omega\mid y_0(x)>0\}$. 根据条件$(F_3)$ 可得，存在某个正的常数 $M_1>0$，有

$$\frac{f(x,v_n)y_0}{\|v_n\|}\geqslant(-bl(x)-M_1)y_0,\ \text{a.e. } x\in\Omega.$$

又因为 $v_n=\|v_n\|y_n$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=+\infty$，a.e. $x\in\Omega^+$. 再由条件(F_3) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,v_n)y_0}{\|v_n\|}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,v_n)}{v_n}y_ny_0=+\infty,\ \text{a.e. } x\in\Omega^+.$$

因此，若$|\Omega^+|>0$，由 Fatou 定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega^+}\dfrac{f(x,v_n)y_0}{\|v_n\|}\mathrm{d}x=+\infty$，这与式(6) 矛盾，故$|\Omega^+|=0$，所以 $y_0(x)\leqslant 0$ 对 a.e. $x\in\Omega$ 成立.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=\|y_0\|=1$，所以 y_0 不恒为 0. 由条件(F_3) 可知，存在 $M>0$ 使得 $\left|\dfrac{f(x,v_n)}{v_n}\right|\leqslant M$ 对 a.e. $x\in\Omega$ 成立. 利用 Lebesgue 控制收敛定理和式(5) 可得

$$\int_\Omega\left(\Delta y_0\Delta\psi-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{y_0\psi}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x=\int_\Omega\lambda_k y_0\psi\mathrm{d}x,\ \forall\psi\in H,$$

故 y_0 是 λ_k 的一个特征函数，则$|v_n|\to+\infty$，a.e. $x\in\Omega$. 由条件(F_4) 可知

$$\lim_{n\to\infty}(f(x,v_n)v_n-2F(x,v_n))=+\infty.$$

根据 Fatou 引理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega(f(x,v_n)v_n-2F(x,v_n))\mathrm{d}x=+\infty$. 另一方面，存在常数 $C_0>0$，有

$$C_0\geqslant 2\Phi(v_n)-\langle\Phi'(v_n),v_n\rangle=\int_\Omega\left(|\Delta v_n|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v_n^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega 2F(x,v_n)\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega\left(|\Delta v_n|^2-\frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v_n^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x,v_n)v_n\mathrm{d}x=\int_\Omega(f(x,v_n)v_n-2F(x,v_n))\mathrm{d}x,$$

矛盾，因此证得$\{v_n\}$ 有界. 由此知在 H 中$\{v_n\}$ 有弱收敛的子列，不妨仍记为$\{v_n\}$，其弱极限记为 v. 由引理 1 可得在 $L^2(\Omega)$ 中 $v_n\to v$，再由$(1+\|v_n\|)\Phi'(v_n)\to 0$ 有

$$\| v_n - v_m \| = \int_\Omega f(x, v_n - v_m)(v_n - v_m)\mathrm{d}x + o(1)\| v_n - v_m \|.$$

令 $n, m \to \infty$,则有 $\left|\int_\Omega f(x, v_n - v_m)(v_n - v_m)\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(x, v_n - v_m)|_2 \, |v_n - v_m|_2$,因此 $\{v_n\}$ 在 H 上强收敛到 v,即 Φ 满足(C)条件.

其次证明 $\Phi(v)$ 满足定理 1 的其他条件.由条件(F_3)可知,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在常数 $C_1 > 0$,使得 $F(x, v) \leqslant \frac{1}{2}(a + \varepsilon)v^2 + C_1 v^{p+1}$.选取 ε 充分小,使得 $\lambda_1 > a + \varepsilon$,由 Pioncaré 不等式和 Sobolev 不等式有

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - \frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, v)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\| v \|^2 - \frac{a+\varepsilon}{2}|v|_2^2 - C_1 |v|_{p+1}^{p+1} \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+\varepsilon}{\lambda_1}\right)\| v \|^2 - C_2 \| v \|^{p+1}.$$

选取 $\| v \| = r > 0$ 足够小,则有 $\Phi|_{\partial B_r} \geqslant \alpha > 0$,其中 $B_r = \{v \in H : \| v \| \leqslant r\}$.

另一方面,因为 $b = \lambda_k$,由条件(F_3)可知,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在常数 $C_3 > 0$,使得 $F(x, v) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda_k - \varepsilon)v^2 - C_3$.选取 ε 充分小,使得 $\lambda_1 < \lambda_k - \varepsilon$,于是有

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\Delta v|^2 - \frac{N^2(N-4)^2}{16}\frac{v^2}{|x|^4}\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, v)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\| v \|^2 - \frac{\lambda_k - \varepsilon}{2}|v|_2^2 + C_3|\Omega|.$$

设 $v = t\varphi_1$,其中 φ_1 是相应于特征值 λ_1 的特征函数,$\| \varphi_1 \| = 1$,于是有

$$\Phi(t\varphi_1) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_k - \varepsilon}{\lambda_1}\right)t^2 \| \varphi_1 \|^2 + C_3|\Omega| \to -\infty, \ t \to -\infty,$$

由此知存在 $e \in H$,$\| e \| > r$,使得 $\Phi(e) \leqslant 0$.

综上 Φ 满足定理 1 的所有条件,于是方程(1)至少存在一个非平凡解.

参考文献:

[1] 伍芸,姚仰新,柯敏.含 Hardy 位势的双调和方程特征值问题[J].山东大学学报(理学版),2008,49(9):81-84.

[2] Adimurthi Grossi M, Santra S. Optimal Hardy-Rellich inequalities, maximun principle and related eigenvalue problem[J]. J Funct Anal, 2006,240(1):36-83.

[3] 刘春晗,王建国.一类渐近线性椭圆方程非平凡解的存在性[J].郑州大学学报(理学版),2014,46(1):5-9.

[4] 裴瑞昌.非线性椭圆型方程的存在性问题与定性分析[D].西安:西北大学,2011.

[5] 伍芸,何少通,沈尧天.一类渐近线性双调和方程非平凡解的存在性[J].数学学报,2011,54(1):9-14.

[6] Zhang Zhitao. Varitional, topological, and partial order methods with their applications[M]. Springer, 2013.