

文章编号: 1004-4353(2016)03-0196-07

具毒素影响的连续型竞争系统的 绝灭性和稳定性

余胜斌

(阳光学院 基础教研部, 福建 福州 350015)

摘要: 研究具有非线性相互抑制项和毒素影响的连续型非自治竞争系统的绝灭性和稳定性问题. 通过构造适当的绝灭函数, 得到了保证系统一个种群绝灭、另外一个种群全局吸引的充分性条件, 所得结果补充了文献 [1] 和 [8] 的工作. 数值模拟结果表明, 本文结果具有可靠性.

关键词: 连续系统; 绝灭性; 竞争; 毒素; 稳定性

中图分类号: O175.14

文献标识码: A

Extinction and stability in a continuous competitive system with the effect of toxic substances

YU Shengbin

(Department of Basic Teaching and Research, Yango College, Fuzhou 350015, China)

Abstract: We consider the extinction and stability of a nonautonomous continuous competitive system with nonlinear inter-inhibition terms and one toxin-producing species. By constructing some suitable Lyapunov type extinction functions, sufficient conditions which guarantee the extinction of species and the stability property of another species are obtained. The results supplement the literature [1] and [8]. The numerical simulations show that the results are reliable.

Keywords: continuous system; extinction; competitive; toxicology; stability

对于 \mathbf{R} 上的任一有界函数 $f(t)$, 定义

$$f^L = \inf_{t \in \mathbf{R}} \{f(t)\}, \quad f^M = \sup_{t \in \mathbf{R}} \{f(t)\}.$$

近年来, 诸多学者研究了具有毒素影响的竞争系统^[1-7], 发现毒素对系统的动力学行为的影响较大. Yue Qin^[1] 提出了如下具有毒素影响和非线性相互抑制项的离散竞争系统:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) \exp \left\{ r_1(n) - a_1(n)x_1(n) - \frac{c_2(n)x_2(n)}{1+x_2(n)} - b(n)x_1(n)x_2(n) \right\}, \\ x_2(n+1) = x_2(n) \exp \left\{ r_2(n) - a_2(n)x_2(n) - \frac{c_1(n)x_1(n)}{1+x_1(n)} \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别表示两竞争种群在第 n 代的种群密度, $r_i(n)$ ($i=1,2$) 表示两种群的内禀增长率, $a_i(n)$ ($i=1,2$) 为两种群的种内竞争系数, $c_i(n)$ ($i=1,2$) 为两种群的种间竞争系数,

收稿日期: 2016-08-15

作者简介: 余胜斌(1984—), 男, 讲师, 研究方向为生物数学.

基金项目: 福建省高校杰出青年科研人才培养计划项目(2016); 福建省自然科学基金资助项目(2015J01012, 2015J01019)

$b(n)x_1(n)x_2(n)$ 表示第2个种群释放毒素对第1个种群的影响. 通过构造适当的 Lyapunov 绝灭函数, 文献[1]得到了保证系统中某个种群绝灭和另外一个种群全局吸引的充分性条件. 受文献[1-7]的启发, 考虑到生命长、世代重叠且数量较大的种群的发展用连续模型来描述更为合理, 本文提出与系统(1)相对应的如下具有毒素影响和非线性相互抑制项的连续竞争系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \left\{ r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - \frac{c_2(t)x_2(t)}{1+x_2(t)} - b(t)x_1(t)x_2(t) \right\}, \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left\{ r_2(t) - a_2(t)x_2(t) - \frac{c_1(t)x_1(t)}{1+x_1(t)} \right\}. \end{cases} \quad (2)$$

Wang Qinglong 等^[8]通过定义 Lyapunov 函数并采用适当的分析手法, 得到了系统(2)在无毒素影响, 即 $b(t)=0$ 情况下存在唯一全局渐近稳定的正概周期解的充分性判据; 但是, 他们并未探讨该系统的绝灭性问题. 由于绝灭性是生态系统研究中的一个重要课题, 与物种或者自然资源的保护和开发等有直接的关系, 因此本文将专门就系统(2)的绝灭性进行探讨, 以补充文献[8]的绝灭性问题, 类似的工作可参考文献[9-11]及其所引文献.

基于生态学含义, 本文恒设系统(2)的各系数 $r_i, a_i, c_i (i=1, 2), b$ 均为 $[0, +\infty)$ 上的有正上下界的连续函数, 且系统(2)满足初始条件: $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$. 从而易知对于任意的 $t \geq 0$ 都有 $x_1(t) > 0, x_2(t) > 0$.

1 绝灭性

首先证明在适当的条件下, 种群 x_2 或 x_1 将趋于绝灭. 与文献[8]中引理 2.1 的证明类似, 可以得到如下结论:

引理 1 系统(2)的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 均满足

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) \leq \frac{r_i^M}{a_i^L} = B_i, \quad i=1, 2. \quad (3)$$

定理 1 假设如下条件 (H_1) 和 (H_2) 成立:

$$\begin{aligned} (H_1) \quad & \frac{r_2^M}{r_1^L} < \min \left\{ \frac{c_1^L}{a_1^M(1+B_1)}, \frac{a_2^L}{c_2^M} \right\}, \\ (H_2) \quad & b^M < \frac{1}{B_1 B_2} \min \left\{ r_1^L - r_2^M \frac{a_1^M(1+B_1)}{c_1^L}, r_1^L - r_2^M \frac{c_2^M}{a_2^L} \right\}. \end{aligned}$$

其中 $B_i (i=1, 2)$ 由式(3)定义, 则种群 x_2 将绝灭, 即对系统(2)的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0.$$

证明 由条件 (H_1) 和 (H_2) 可推出 $\frac{r_2^M}{r_1^L - b^M B_1 B_2} < \min \left\{ \frac{c_1^L}{a_1^M(1+B_1)}, \frac{a_2^L}{c_2^M} \right\}$. 可选取足够小的数 $\epsilon_1 > 0$, 使得

$$\frac{r_2^M}{r_1^L - b^M(B_1 + \epsilon_1)(B_2 + \epsilon_1)} < \min \left\{ \frac{c_1^L}{a_1^M(1+B_1 + \epsilon_1)}, \frac{a_2^L}{c_2^M} \right\} \quad (4)$$

成立. 由式(4)可知, 存在正常数 α 和 β 使得

$$\frac{r_2^M}{r_1^L - b^M(B_1 + \epsilon_1)(B_2 + \epsilon_1)} < \frac{\alpha}{\beta} < \min \left\{ \frac{c_1^L}{a_1^M(1+B_1 + \epsilon_1)}, \frac{a_2^L}{c_2^M} \right\},$$

从而有

$$-\alpha r_1^L + \beta r_2^M + \alpha b^M(B_1 + \epsilon_1)(B_2 + \epsilon_1) \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_1 < 0,$$

$$\alpha c_2^M - \beta a_2^L < 0, \quad \alpha a_1^M - \frac{\beta c_1^L}{1+B_1 + \epsilon_1} < 0. \quad (5)$$

对上述 ε_1 , 由引理 1 可知, 存在足够大的 $T_1 > 0$, 使得当 $t \geq T_1$ 时, 有

$$x_i(t) < B_i + \varepsilon_1, i=1,2. \quad (6)$$

由系统(2) 可得

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} = r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - \frac{c_2(t)x_2(t)}{1+x_2(t)} - b(t)x_1(t)x_2(t), \\ \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} = r_2(t) - a_2(t)x_2(t) - \frac{c_1(t)x_1(t)}{1+x_1(t)}. \end{cases} \quad (7)$$

构造 Lyapunov 绝灭函数 $V(t) = x_1^{-\alpha}(t)x_2^{\beta}(t)$. 由式(5)—(7) 可知, 当 $t \geq T_1$ 时

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= V(t) \left\{ -\alpha \left[r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - \frac{c_2(t)x_2(t)}{1+x_2(t)} - b(t)x_1(t)x_2(t) \right] + \right. \\ &\quad \left. \beta \left[r_2(t) - a_2(t)x_2(t) - \frac{c_1(t)x_1(t)}{1+x_1(t)} \right] \right\} = V(t) \{ -\alpha r_1(t) + \beta r_2(t) + \\ &\quad \left[\alpha a_1(t) - \frac{\beta c_1(t)}{1+x_1(t)} \right] x_1(t) + \left[\frac{\alpha c_2(t)}{1+x_2(t)} - \beta a_2(t) \right] x_2(t) + \alpha b(t)x_1(t)x_2(t) \} \leq \\ &= V(t) \{ -\alpha r_1^L + \beta r_2^M + \left[\alpha a_1^M - \frac{\beta c_1^L}{1+B_1+\varepsilon_1} \right] x_1(t) + [\alpha c_2^M - \beta a_2^L] x_2(t) + \\ &\quad \alpha b^M(B_1 + \varepsilon_1)(B_2 + \varepsilon_1) \} \leq -\delta_1 V(t) < 0. \end{aligned}$$

对上式两边从 T_1 到 t ($t \geq T_1$) 积分得

$$V(t) \leq V(T_1) \exp[-\delta_1(t - T_1)]. \quad (8)$$

取 $B = 2 \max\{B_1, B_2\}$, 则由式(5) 可得当 $t \geq T_1$ 时 $x_i(t) < B$. 从而由式(8) 可知

$$x_2(t) < C \exp\left[-\frac{\delta_1}{\beta}(t - T_1)\right],$$

其中 $C = B^{\alpha/\beta} (x_1(T_1))^{-\alpha/\beta} x_2(T_1) > 0$. 这表明, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x_2(t)$ 指数收敛于 0, 从而定理 1 成立.

定理 2 假设条件 (H_1) 成立, 进一步假设如下条件 (H_3) 成立:

$$(H_3) \quad b^M < \frac{r_1^L c_1^L - (1 + B_1) a_1^M r_2^M}{r_2^M (1 + B_1) B_2}.$$

其中 B_i ($i=1,2$) 由式(3) 定义, 则种群 x_2 将绝灭.

证明 由条件 (H_1) 和 (H_3) 可得 $\frac{r_2^M}{r_1^L} < \min\left\{\frac{c_1^L}{(a_1^M + b^M B_2)(1 + B_1)}, \frac{a_2^L}{c_2^M}\right\}$. 可选取足够小的数

$\varepsilon_2 > 0$, 使得 $\frac{r_2^M}{r_1^L} < \min\left\{\frac{c_1^L}{[a_1^M + b^M(B_2 + \varepsilon_2)](1 + B_1 + \varepsilon_2)}, \frac{a_2^L}{c_2^M}\right\}$ 成立. 由该式可知, 存在正常数 α 和 β 使

得 $\frac{r_2^M}{r_1^L} < \frac{\alpha}{\beta} < \min\left\{\frac{c_1^L}{[a_1^M + b^M(B_2 + \varepsilon_2)](1 + B_1 + \varepsilon_2)}, \frac{a_2^L}{c_2^M}\right\}$. 从而有

$$-\alpha r_1^L + \beta r_2^M \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_2 < 0, \alpha c_2^M - \beta a_2^L < 0, \alpha a_1^M - \frac{\beta c_1^L}{1 + B_1 + \varepsilon_2} + \alpha b^M(B_2 + \varepsilon_2) < 0. \quad (9)$$

构造 Lyapunov 绝灭函数 $V(t) = x_1^{-\alpha}(t)x_2^{\beta}(t)$. 由式(6)、(7) 和式(9) 可知, 当 $t \geq T_1$ 时

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= V(t) \left\{ -\alpha r_1(t) + \beta r_2(t) + \left[\alpha a_1(t) - \frac{\beta c_1(t)}{1+x_1(t)} + \alpha b(t)x_2(t) \right] x_1(t) + \right. \\ &\quad \left[\frac{\alpha c_2(t)}{1+x_2(t)} - \beta a_2(t) \right] x_2(t) \} \leq V(t) \{ -\alpha r_1^L + \beta r_2^M + \\ &\quad \left[\alpha a_1^M - \frac{\beta c_1^L}{1+B_1+\varepsilon_2} + \alpha b^M(B_2 + \varepsilon_2) \right] x_1(t) + [\alpha c_2^M - \beta a_2^L] x_2(t) \} \leq -\delta_2 V(t) < 0. \end{aligned}$$

余下的证明与定理 1 的证明类似, 故省略.

通过类似定理 1 和定理 2 的证明, 还可以得到如下结论:

定理 3 假设条件 (H_1) 成立, 进一步假设如下条件 (H_4) 成立:

$$(H_4) \quad b^M < \frac{r_1^L a_2^L - r_2^M c_2^M}{r_2^M B_1}.$$

其中 $B_i (i=1, 2)$ 由式(3) 定义, 则种群 x_2 将绝灭.

注 1 在系统(2) 中其他系数保持不变的情况下, r_2^M 和 b^M 越小, 条件 $(H_1) - (H_4)$ 越容易满足, 从而由定理 1 (或定理 2 和 3) 可知种群 x_2 越容易绝灭. 这与实际现象也相一致, 因为在种群 x_1 的基本状态不变的情况下, b^M 越小意味着种群 x_2 所释放的毒素对种群 x_1 几乎没有影响, 而 r_2^M 小即种群 x_2 的内禀增长率低则说明种群 x_2 的数量偏少, 这必然会造成需要与种群 x_1 竞争生存空间的种群 x_2 在竞争中处于不利地位而最终绝灭.

定理 4 假设如下条件 (H_5) 成立:

$$(H_5) \quad \frac{r_2^L}{r_1^M} > \max \left\{ \frac{c_1^M}{a_1^L}, \frac{a_2^M (1 + B_2)}{c_2^L} \right\}.$$

其中 B_2 由式(3) 定义, 则种群 x_1 将绝灭, 即对系统(2) 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$.

证明 由条件 (H_5) 可选取足够小的数 $\epsilon_3 > 0$, 使得 $\frac{r_2^L}{r_1^M} > \max \left\{ \frac{c_1^M}{a_1^L}, \frac{a_2^M (1 + B_2 + \epsilon_3)}{c_2^L} \right\}$ 成立. 由该式

可知, 存在正常数 α 和 β 使得 $\frac{r_2^L}{r_1^M} > \frac{\alpha}{\beta} > \max \left\{ \frac{c_1^M}{a_1^L}, \frac{a_2^M (1 + B_2 + \epsilon_3)}{c_2^L} \right\}$. 从而有:

$$\alpha r_1^M - \beta r_2^L \stackrel{\text{def}}{=} -\delta_3 < 0, \quad \beta c_1^M - \alpha a_1^L < 0, \quad \beta a_2^M - \frac{\alpha c_2^L}{1 + B_2 + \epsilon_3} < 0. \quad (10)$$

构造 Lyapunov 绝灭函数 $V(t) = x_1^\alpha(t) x_2^{-\beta}(t)$. 由式(6)、(7) 和式(10) 可知, 当 $t \geq T_1$ 时

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= V(t) \left\{ \alpha r_1(t) - \beta r_2(t) + \left[\frac{\beta c_1(t)}{1 + x_1(t)} - \alpha a_1(t) \right] x_1(t) + \right. \\ &\quad \left. \left[\beta a_2(t) - \frac{\alpha c_2(t)}{1 + x_2(t)} \right] x_2(t) - \alpha b(t) x_1(t) x_2(t) \right\} \leq \\ &= V(t) \left\{ \alpha r_1^M - \beta r_2^L + [\beta c_1^M - \alpha a_1^L] x_1(t) + \left[\beta a_2^M - \frac{\alpha c_2^L}{1 + B_2 + \epsilon_3} \right] x_2(t) \right\} \leq -\delta_3 V(t) < 0. \end{aligned}$$

余下的证明与定理 1 的证明类似, 故省略.

注 2 在系统(2) 中的其他系数保持不变的情况下, r_1^M 越小, 条件 (H_5) 越容易满足, 从而由定理 4 可知种群 x_1 越容易绝灭. 这是由于在种群 x_2 的基本状态不变的情况下, r_1^M 小即种群 x_1 的内禀增长率低意味着种群 x_1 数量偏少, 这必然会造成需要与种群 x_2 竞争生存空间的种群 x_1 在竞争中处于不利地位而最终绝灭.

2 稳定性

引理 2^[13] 设 $a > 0, b > 0$, 当 $t \geq 0$ 且 $x(0) > 0$ 时, 若 $\dot{x} \geq x(b - ax)$, 则 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \frac{b}{a}$; 设

$a > 0, b > 0$, 当 $t \geq 0$ 且 $x(0) > 0$ 时, 若 $\dot{x} \leq x(b - ax)$, 则 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq \frac{b}{a}$.

引理 3(振动性引理)^[12] 假设 $x(t)$ 是 $[\alpha, +\infty)$ 上的有界可导函数, 则存在序列 $\tau_n \rightarrow +\infty$ 和 $\sigma_n \rightarrow +\infty$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有:

- (i) $\dot{x}(\tau_n) \rightarrow 0$ 且 $x(\tau_n) \rightarrow \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$,
- (ii) $\dot{x}(\sigma_n) \rightarrow 0$ 且 $x(\sigma_n) \rightarrow \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \underline{x}$.

引理 4 假设定理 1 或定理 2 或定理 3 的条件成立, 则对系统(2) 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 有

$$A_1 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq B_1, \quad \text{其中 } A_1 = \frac{r_1^L}{a_1^M}, \quad B_1 \text{ 由式(3) 定义.}$$

证明 由引理 1 和或定理 2 或定理 3 可知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0 \text{ 且 } \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \leq B_1. \quad (11)$$

由于 $r_1^L > 0$, 可选取足够小的数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$A_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} r_1^L - c_2^M \varepsilon - b^M (B_1 + \varepsilon) \varepsilon > 0. \quad (12)$$

由式(11) 知, 对上述 ε 存在足够大的 $T_2 > 0$, 使得对任意的 $t \geq T_2$, 有

$$x_1(t) \leq B_1 + \varepsilon \text{ 且 } x_2(t) \leq \varepsilon. \quad (13)$$

从而由式(13) 和系统(2) 的第 1 个方程可知, 当 $t \geq T_2$ 时

$$\dot{x}_1(t) \geq x_1(t) \{r_1^L - a_1^M x_1(t) - c_2^M \varepsilon - b^M (B_1 + \varepsilon) \varepsilon\}. \quad (14)$$

由引理 2 和式(12)、(14) 可得 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \geq \frac{A_\varepsilon}{a_1^M}$. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 从而 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \geq \frac{r_1^L}{a_1^M}$. 引理 4 证毕.

引理 5 假设 (H_5) 成立, 则对系统(1) 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 有

$$A_2 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \leq B_2,$$

其中 $A_1 = \frac{r_2^L}{a_2^M}$, B_2 由式(3) 定义.

证明 证明与引理 4 的证明类似, 故省略.

考虑 Logistic 方程

$$\dot{x}(t) = x(t) \{r_1(t) - a_1(t)x(t)\}. \quad (15)$$

由文献[7] 的引理 2.4 可得如下结论:

引理 6 若 $r_1(t)$ 和 $a_1(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上有正上、下界的连续函数, 则系统(15) 是持久且全局吸引的.

定理 5 假设定理 1 或定理 2 或定理 3 的条件成立, 则对系统(2) 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 和系统(15) 的任一正解 $x_1^*(t)$, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t) - x_1^*(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.

证明 由定理 1 或定理 2 或定理 3 可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$. 由引理 1、引理 4 和引理 6 知, 存在 $T_3 > T_2$,

使得当 $t \geq T_3$ 时, 有 $\frac{A_1}{2} < x_1(t) < \frac{3B_1}{2}$ 且 $\eta_1 < x_1^*(t) < \eta_2$, 其中 η_1 和 η_2 为不依赖于系统(15) 的解

的正常数. 令 $w(t) = \frac{1}{x_1(t)}$, $w^*(t) = \frac{1}{x_1^*(t)}$ 且 $z(t) = w(t) - w^*(t)$, 则 $\frac{2}{3B_1} < w(t) < \frac{2}{A_1}$, $\frac{1}{\eta_2} < w^*(t) <$

$\frac{1}{\eta_1}$ 且 $\dot{w}(t) = -r_1(t)w(t) + a_1(t) + \frac{c_2(t)x_2(t)w(t)}{1+x_2(t)} + b(t)x_2(t)$, $\dot{w}^*(t) = -r_1(t)w^*(t) + a_1(t)$. 从而

$\dot{z}(t) = -r_1(t)z(t) + \frac{c_2(t)x_2(t)w(t)}{1+x_2(t)} + b(t)x_2(t)$, 即

$$z(t) = -\frac{\dot{z}(t)}{r_1(t)} + \frac{c_2(t)x_2(t)w(t)}{r_1(t)[1+x_2(t)]} + \frac{b(t)x_2(t)}{r_1(t)}. \quad (16)$$

因为 $z(t)$ 为有界可导函数, 因而由振动性引理可知, 存在序列 $\tau_n \rightarrow +\infty$ 和 $\sigma_n \rightarrow +\infty$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

有 $\dot{z}(\tau_n) \rightarrow 0$ 且 $z(\tau_n) \rightarrow \bar{z}$; $\dot{z}(\sigma_n) \rightarrow 0$ 且 $z(\sigma_n) \rightarrow \underline{z}$. 由 $0 < \frac{c_2(t)w(t)}{r_1(t)} < \frac{2c_2^M}{r_1^L A_1}$, $0 < \frac{1}{r_1(t)} < \frac{1}{r_1^L}$, $0 <$

$\frac{b(t)}{r_1(t)} < \frac{b^M}{r_1^L}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$ 及式(16) 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(\tau_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{z}(\tau_n)}{r_1(\tau_n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_2(\tau_n)x_2(\tau_n)w(\tau_n)}{r_1(\tau_n)[1+x_2(\tau_n)]} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(\tau_n)x_2(\tau_n)}{r_1(\tau_n)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(\sigma_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{z}(\sigma_n)}{r_1(\sigma_n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_2(\sigma_n)x_2(\sigma_n)w(\sigma_n)}{r_1(\sigma_n)[1+x_2(\sigma_n)]} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(\sigma_n)x_2(\sigma_n)}{r_1(\sigma_n)}.$$

从而 $\bar{z} = z = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$. 进一步地, 由于 $|x_1(t) - x_1^*(t)| = |w(t) - w^*(t)|x_1(t)x_1^*(t)$ 且

$x_1(t)x_1^*(t)$ 均为有界函数,故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t) - x_1^*(t)) = 0$. 定理 5 证毕.

定理 6 假设条件 (H_5) 成立,则系统(2) 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_2(t) - x_2^*(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$, 其中 $x_2^*(t)$ 为 $\dot{x}(t) = x(t) \{r_2(t) - a_2(t)x(t)\}$ 的任一正解.

证明 证明与定理 5 的证明类似,故省略.

在没有毒素影响即 $b(t) = 0$ 的情况下,系统(2) 就转化成文献[8] 中所探讨的系统 $(2')$. 由定理 5 和定理 6 可得如下推论:

推论 1 假设条件 (H_1) 成立,则对系统 $(2')$ 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 和系统(15) 的任一正解 $x_1^*(t)$, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t) - x_1^*(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.

推论 2 假设条件 (H_5) 成立,则系统 $(2')$ 的任一正解 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_2(t) - x_2^*(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0$, 其中 $x_2^*(t)$ 为 $\dot{x}(t) = x(t) \{r_2(t) - a_2(t)x(t)\}$ 的任一正解.

注 3 对于系统 $(2')$,在 (H_1) 成立的条件下,种群 x_2 绝灭而种群 x_1 全局吸引;而在 (H_5) 成立的条件下,种群 x_1 绝灭而种群 x_2 全局吸引;故本文的结果补充了文献[8] 中未探讨的绝灭性问题.

3 应用举例

例 1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \left\{ 2.5 + 0.5\cos\sqrt{7}t - 0.3x_1(t) - \frac{(1 + 0.5\sin\sqrt{2}t)x_2(t)}{1 + x_2(t)} - 0.1x_1(t)x_2(t) \right\}, \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left\{ 0.5 - 3x_2(t) - \frac{(6 + 2\sin\sqrt{5}t)x_1(t)}{1 + x_1(t)} \right\}. \end{cases} \tag{17}$$

经验证系统(17) 满足条件 (H_1) — (H_4) ,从而由定理 5 可知 x_2 绝灭而 x_1 全局吸引,数值模拟结果(如图 1 所示) 也说明了这一结果.

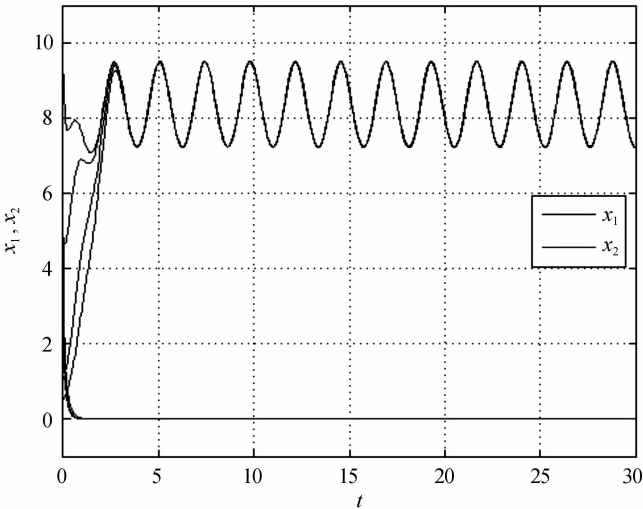


图 1 具初始条件 $(1,2)^T, (10,3.5)^T, (5,7)^T$ 和 $(0.5,4)^T$ 的系统(17) 的数值模拟结果

例 2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \left\{ 0.5 + 0.1\sin\sqrt{5}t - 2x_1(t) - \frac{(4.6 + 0.4\cos\sqrt{7}t)x_2(t)}{1 + x_2(t)} - 2x_1(t)x_2(t) \right\}, \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left\{ 2.3 + 0.3\cos\sqrt{7}t - 1.3x_2(t) - \frac{(3 + \sin\sqrt{13}t)x_1(t)}{1 + x_1(t)} \right\}. \end{cases} \tag{18}$$

经验证系统(18) 满足条件(H_5),从而由定理 6 可知 x_1 绝灭而 x_2 全局吸引,数值模拟结果(如图 2 所示)也说明了这一结果.

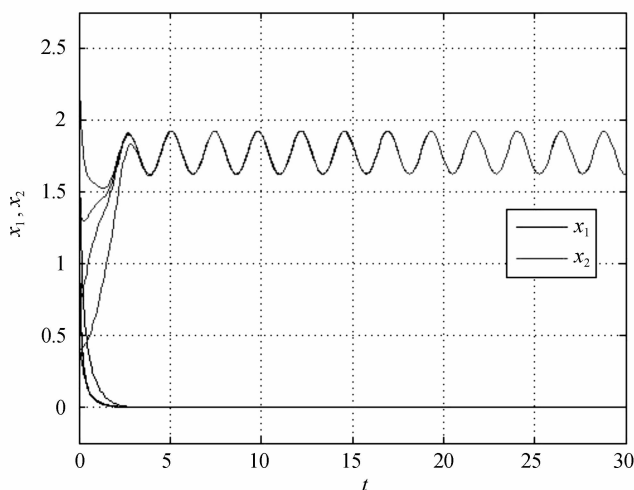


图 2 具初始条件 $(1, 1.4)^T$, $(2, 2.5)^T$, $(2.3, 0.4)^T$ 和 $(0.5, 0.7)^T$ 的系统(18) 的数值模拟结果

参考文献:

- [1] YUE Qin. Extinction for a discrete competition system with the effect of toxic substances[J]. Advances in Difference Equations, 2016,2016(1):1-15.
- [2] 张娜,谢斌峰,苏倩倩. 具有毒素和捕获作用的两种群竞争系统的稳定性分析[J]. 数学的实践与认识,2012,42(18):117-125.
- [3] 林玉花,陈凤德,王海娜,等. 一类非自治两种群浮游生物相克模型的持久性和全局吸引性[J]. 沈阳大学学报(自然科学版),2013,24(6):7-10.
- [4] 陈凤德,赵亮. 一类非自治两种群浮游生物相克模型的绝灭性[J]. 沈阳大学学报(自然科学版),2014,26(1):1-3.
- [5] 林玉花,陈婉琳,王海娜,等. 一类两种群浮游生物相克模型平衡点稳定性分析[J]. 福州大学学报(自然科学版),2015(1):1-5.
- [6] LI Zhong, CHEN Fengde. Extinction in two dimensional nonautonomous Lotka-Volterra systems with the effect of toxic substances[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006,182(1):684-690.
- [7] CHEN Fengde, XIE Xiangdong, MIAO Zhanshuai, et al. Extinction in two species nonautonomous nonlinear competitive system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016,274(1):119-124.
- [8] WANG Qinglong, LIU Zhijun, LI Zuxiong, et al. Existence and global asymptotic stability of positive almost periodic solutions of a two-species competitive system[J]. International Journal of Biomathematics, 2014,7(4):1450040(18 pages).
- [9] YU Shengbin. Permanence for a discrete competitive system with feedback controls[J]. Commun Math Biol Neurosci, 2015(2015), Article ID 16.
- [10] 余胜斌. 一类离散非自治竞争系统的绝灭性和稳定性[J]. 延边大学学报(自然科学版),2015,41(4):279-284.
- [11] CHEN F, GONG X, CHEN W. Extinction in two dimensional discrete Lotka-Volterra competitive system with the effect of toxic substances (II)[J]. Dyn Contin Discrete Impuls Syst, Ser B, Appl Algorithms, 2013,20:449-461.
- [12] De Oca F M, Vivas M. Extinction in two dimensional Lotka-Volterra system with infinite delay[J]. Nonlinear Anal, Real World Appl, 2006,7(5):1042-1047.
- [13] CHEN Fengde, LI Zhong, HUANG Yunjin. Note on the permanence of a competitive system with infinite delay and feedback controls[J]. Nonlinear Anal, Real World Appl, 2006,8(2):680-687.