文章编号: 1004-4353(2016)03-0188-04

分数阶 q-对称非自治系统的稳定性

吴凡， 侯成敏*

(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要: 考虑一类分数阶 q-对称非自治系统的稳定性. 利用 Lyapunov 直接法，研究了 q-对称 Caputo 分数阶非自治系统的稳定性，建立了该系统一致稳定性及渐近稳定性条件并给出了证明. 进一步，利用 q-对称 Riemann-Liouville 分数阶导算子与 q-对称 Caputo 分数阶导算子的关系，给出了 q-对称 Riemann-Liouville 分数阶非自治系统的稳定性、一致稳定性及渐近稳定性结果.

关键词: q-对称 Caputo 分数阶导算子; q-对称 Riemann-Liouville 分数阶导算子; 非自治系统; Lyapunov 直接法; 稳定性

中图分类号: O175.6 **文献标识码:** A

Stability of q-symmetric fractional non-autonomous systems

WU Fan， HOU Chengmin*

(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Stability of a class of q-symmetric fractional non-autonomous systems is considered. Using Lyapunov's direct method, the stability of q-symmetric fractional non-autonomous systems with q-symmetric fractional Caputo derivative is studied. Furthermore, using the relation of q-symmetric Caputo fractional derivative and q-symmetric Riemann-Liouville fractional derivative, the results of stability, uniformly stability and asymptotic stability for q-symmetric fractional non-autonomous systems with q-symmetric Riemann-Liouville fractional derivative is obtained.

Keywords: q-symmetric fractional Caputo derivative; q-symmetric Riemann-Liouville fractional derivative; non-autonomous systems; Lyapunov's direct method; stability

0 引言

分数阶微积分可以处理含有任意阶导数的问题. 近年来，对分数阶微积分的研究受到了国内外学者的关注，并取得了许多好的成果[1-2]. q-微积分概念由 Jackson 于 1910 年提出[3-4]，之后 Al-Salam[5] 和 Agarwal[6] 给出了分数阶 q-微积分的基本概念和性质. 为了表明分数微积分的优点，文献[7]的作者研究了整数阶微分系统的稳定性，并得出整数阶系统不稳定的结论，但当整数阶系统用相应的分数阶系统来代替时，分数阶系统却是稳定的. 文献[8]的作者将上述结果推广到了 q-差分系统上. 本文将进一步表明文献[8]的结果对于 q-对称差分系统也成立.

首先考虑 2 个简单的 q-对称差分系统:

收稿日期: 2016-06-03 ***通信作者:** 侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程理论及应用.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11161049); 2015—2016 年度吉林省教育厅“十二五”科技项目(吉教科合字[2015]第 36 号)

$$({}^c\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=\overline{[\mu]}_q t^{\mu-1},\ x(0)=x_0; \tag{1}$$

$$({}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=\overline{[\mu]}_q t^{\mu-1},\ x(0)=x_0. \tag{2}$$

其中 $0<\alpha,\mu,q<1$，$0<\mu<1-\alpha$，$t\in T_q=\{xq:x\in[0,+\infty)\}$，$\overline{[\mu]}_q=\dfrac{1-q^{2\mu}}{1-q^2}$. 方程(1)的解 $x(t)=t^{\mu-1}+x_0\to+\infty(t\to+\infty)$ 是不稳定的；方程(2)的解 $x(t)=\dfrac{\overline{\Gamma}_q(\mu)}{\overline{\Gamma}_q(\mu+\alpha)}q^{\binom{\alpha}{2}+(\mu-1)\alpha}t^{\alpha+\mu-1}+x_0\to x_0$ $(t\to+\infty)$ 是稳定的，其中 $\widetilde{\Gamma}_q(\cdot)$ 是 q-对称 Γ 函数. 本文主要研究一类分数阶 q-对称非自治系统的稳定性.

1　预备知识

定义 1[14]　$\overline{[a]}_q=\dfrac{1-q^{2a}}{1-q^2}$，$a\in\mathbf{R}$；$\overline{[0]}_q!=1$，$\overline{[n]}_q!=\overline{[n]}_q\,\overline{[n-1]}_q\cdots\overline{[1]}_q$.

定义 2[14]　类似于幂指函数 $(a-b)^n$，q-对称幂指函数定义为：

$$\overline{(a-b)}^{(0)}=1;\ \overline{(a-b)}^{(k)}=\prod_{i=0}^{k-1}(a-bq^{2i+1}),\ k\in\mathbf{N},\ a,b\in\mathbf{R};$$

$$\overline{(a-b)}^{(\alpha)}=a^{\alpha}\frac{\prod_{i=0}^{\infty}(a-bq^{2i+1})}{\prod_{i=0}^{\infty}(a-bq^{2(i+\alpha)+1})},\ \alpha\in\mathbf{R};\text{ 特别地，}b=0\text{ 时 }\overline{a}^{(\alpha)}=a^{\alpha}.$$

定义 3[14]　函数 $x(t)$ 的 q-对称导数定义为：$(\widetilde{D}_qx)(t)=\dfrac{x(qt)-x(q^{-1}t)}{(q-q^{-1})t}$，$(\widetilde{D}_qx)(0)=x'(0)$. 函数 $x(t)$ 的高阶 q-对称导数定义为：$(\widetilde{D}_{q,0}^0x)(t)=x(t)$，$(\widetilde{D}_{q,0}^nx)(t)=(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{D}_{q,0}^{n-1}x)(t)$，$n\in\mathbf{N}$.

定义 4[14]　q-对称 Γ 函数定义为

$$\widetilde{\Gamma}_q(x)=\overline{(1-q)}^{(x-1)}(1-q^2)^{1-x},\ x\in\mathbf{R}/\{0,-1,-2,\cdots\}.$$

易知 $\widetilde{\Gamma}_q(1)=1$，$\widetilde{\Gamma}_q(x+1)=\overline{[x]}_q\widetilde{\Gamma}_q(x)$.

定义 5[14]　函数 $x(t)$ 的 q-对称积分定义为：

$$(\widetilde{I}_{q,0}x)(t)=\int_0^t x(s)\tilde{\mathrm{d}}_qs=t(1-q^2)\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}x(tq^{2k+1}),$$

$$(\widetilde{I}_{q,a}x)(t)=\int_0^t x(s)\tilde{\mathrm{d}}_qs-\int_0^a x(s)\tilde{\mathrm{d}}_qs.$$

函数 $x(t)$ 的高阶 q-对称积分定义为

$$(\widetilde{I}_{q,0}^0x)(t)=x(t),\ (\widetilde{I}_{q,0}^nx)(t)=(\widetilde{I}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}^{n-1}x)(t),\ n\in\mathbf{N}.$$

定义 6[14]　函数 $x(t)$ 的 q-对称分数阶积分定义为

$$(\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=\frac{1}{\widetilde{\Gamma}_q(\alpha)}q^{\binom{\alpha}{2}}\int_0^t\overline{(t-s)}^{(\alpha-1)}x(q^{\alpha-1}s)\tilde{\mathrm{d}}_qs,$$

其中 $\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$，$k\in\mathbf{N}$.

定义 7[14]　函数 $x(t)$ 的 q-对称 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$(\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=\begin{cases}(\widetilde{I}_{q,0}^{-\alpha}x)(t),\ \alpha<0;\\ x(t),\ \alpha=0;\\ (\widetilde{D}_{q,0}^{[\alpha]}\widetilde{I}_{q,0}^{[\alpha]-\alpha}x)(t),\ \alpha>0.\end{cases}$$

这里$[\alpha]$表示大于或等于 α 的最小整数.

定义 8[14]　函数 $x(t)$ 的 q-对称 Caputo 分数阶导数定义为

$$({}^{c}\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=\begin{cases}(\widetilde{I}_{q,0}^{-\alpha}x)(t), \alpha<0;\\ x(t), \alpha=0;\\ (\widetilde{I}_{q,0}^{[\alpha]-\alpha}\widetilde{D}_{q,0}^{[\alpha]}x)(t), \alpha>0.\end{cases}$$

性质 1[14] 若 $\alpha>0$，$a\leqslant b\leqslant t$，则 $\overline{(t-a)}^{(\alpha)}\geqslant\overline{(t-b)}^{(\alpha)}$.

性质 2[14] $\overline{[a(t-s)]}^{(\alpha)}=a^{\alpha}\overline{(t-s)}^{(\alpha)}$，${}_{t}D_{q}\overline{(t-s)}^{(\alpha)}=\overline{[\alpha]}_{q}\overline{(q^{-1}t-s)}^{(\alpha-1)}$，${}_{s}D_{q}\overline{(t-q^{-1}s)}^{(\alpha)}=-\overline{[\alpha]}_{q}\overline{(t-s)}^{(\alpha-1)}$.

引理 1[14] $(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}x)(t)=x(t)$，$(\widetilde{I}_{q,0}\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=x(t)-x(0)$.

引理 2[14] 设 $\alpha,\beta\geqslant0$，$x(t)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，则：

(a) $(\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}\widetilde{I}_{q,0}^{\beta}x)(t)=(\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha+\beta}x)(t)$；

(b) $(\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=x(t)$；

(c) $(\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}{}^{c}\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=x(t)-\sum\limits_{k=0}^{N-1}\dfrac{q^{\binom{k}{2}}}{\overline{[k]}_{q}!}(\widetilde{D}_{q}^{k}x)(0)x^{k}$，$t\in[0,q^{\alpha}]$，$\alpha\in(N-1,N]$.

引理 3[14] 设 $\alpha\in\mathbf{R}^{+}/\mathbf{N}_{0}$，$\lambda\in(-1,+\infty)$，则：

(a) $\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}t^{\lambda}=\dfrac{\overline{\Gamma}_{q}(\lambda+1)}{\overline{\Gamma}_{q}(\lambda+\alpha+1)}q^{\binom{\alpha}{2}+\lambda\alpha}t^{\lambda+\alpha}$，

(b) $\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}t^{\lambda}=\dfrac{\overline{\Gamma}_{q}(\lambda+1)}{\overline{\Gamma}_{q}(\lambda-\alpha+1)}q^{\binom{\alpha}{2}-\lambda\alpha}t^{\lambda-\alpha}$.

引理 4[13] 设 $\alpha>0$，$(\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}^{\alpha}x)(t)-\dfrac{t^{\alpha-1}}{\overline{\Gamma}_{q}(\alpha)}x(0)$.

引理 5 设 $0<\alpha<1$，$({}^{c}\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=(\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)-\dfrac{t^{1-\alpha}}{\overline{\Gamma}_{q}(\alpha)}q^{\binom{1-\alpha}{2}}x(0)$.

证明 由定义 7、定义 8 及引理 1，有

$$\begin{aligned}({}^{c}\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)&=(\widetilde{I}_{q,0}^{1-\alpha}\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=(\widetilde{I}_{q,0}^{1-\alpha}\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}^{1-\alpha}\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=\\&(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}^{1-\alpha}\widetilde{I}_{q,0}\widetilde{D}_{q,0}x)(t)=(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}^{1-\alpha}x)(t)-(\widetilde{D}_{q,0}\widetilde{I}_{q,0}^{1-\alpha}x)(0)=(\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)-\frac{t^{1-\alpha}}{\overline{\Gamma}_{q}(\alpha)}q^{\binom{1-\alpha}{2}}x(0).\end{aligned}$$

2 q-对称非自治系统的 Lyapunov 稳定性

本文利用 Lyapunov 函数法研究 q-对称非自治系统

$$({}^{c}\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=f(t, x(t)), x(0)=x_{0} \tag{3}$$

的稳定性，其中 $t\geqslant0$，$t\in T_{q}$，$0<\alpha<1$，且 $f: T_{q}\times\mathbf{R}^{n}\to\mathbf{R}^{n}$ 是连续函数. 注意到系统(3)的一个 Lyapunov 函数 V 依赖于 t 和 x，于是设 $f(t,0)=0$，$t\in T_{q}$ 使得系统(3)有零解.

定义 9 对系统(3)：(i) 零解 $x(t)=0$ 是稳定的，如果对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,0)>0$ 使得对满足 $\|x_{0}\|<\delta$ 的任意解 $x(t)=x(t,0,x_{0})$ 有 $\|x(t)\|<\varepsilon$，$t\in T_{q}$，$t\geqslant0$.

(ii) 零解 $x(t)=0$ 是一致稳定的，如果它是稳定的且对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得对满足 $\|x_{0}\|<\delta$ 的任意解 $x(t)=x(t,0,x_{0})$ 有 $\|x(t)\|<\varepsilon$，$t\in T_{q}$，$t\geqslant0$.

(iii) 零解 $x(t)=0$ 是渐近稳定的，如果它是稳定的且存在 $\delta>0$ 使得对任意的解 $x(t)=x(t,0,x_{0})$ 只要满足 $\|x_{0}\|<\delta$ 就有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_{0},x_{0})=0$.

定义 10 一个函数 $\varphi(r)$ 称为属于函数类 K 当且仅当 $\varphi\in C[[0,\rho),\mathbf{R}^{+}]$，其中 ρ 是一个正实数，

$\varphi(0)=0$ 且 $\varphi(r)$ 是严格单调递减函数.

定义 11　函数 $V(t,x)$ 定义在 $T_q\times S_\rho$ 上，其中 $S_\rho=\{x\in\mathbf{R}^n:\|x\|<\rho\}$，$\rho$ 是一个正实数. 函数 $V(t,x)$ 称为是正定的，当且仅当 $V(t,0)=0$，$t\in T_q$ 且存在函数 $\varphi(r)\in K$ 使得 $\varphi(r)\leqslant V(t,x)$，$\|x\|=r$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$.

函数 $V(t,x)$ 定义在 $T_q\times S_\rho$ 上，其中 $S_\rho=\{x\in\mathbf{R}^n:\|x\|<\rho\}$，$\rho$ 是一个正实数. 函数 $V(t,x)$ 称为是减少的标量函数，当且仅当 $V(t,0)=0$，$t\in T_q$ 且存在函数 $\varphi(r)\in K$ 使得 $V(t,x)\leqslant\varphi(r)$，$\|x\|=r$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$.

定理 1　如果存在定义在 $T_q\times S_\rho$ 上的正定函数 $V(t,x)$ 使得 ${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x)\leqslant 0$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$，则系统(3)的零解是稳定的.

证明　设 $x(t)=x(t,0,x_0)$ 是系统(3)的一个解. 因为 $V(t,x)$ 是正定的，所以存在一个函数 $\varphi(r)\in K$ 使得 $\varphi(\|x\|)\leqslant V(t,x)$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$0<\varepsilon<\rho$，因为 $V(0,0)=0$ 且 $V(0,x)$ 关于 x 连续，因此可以选择 $\delta=\delta(\varepsilon,0)>0$ 使得当 $\|x_0\|<\delta$ 时有 $V(0,x_0)<\varphi(\varepsilon)$. 对系统(3)的任意解 $x(t)=x(t,0,x_0)$，因为$({}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x(t))\leqslant 0$，利用引理 2 的(c)有 $V(t,x(t))\leqslant V(0,x_0)$，$t\in T_q$. 因此 $\varphi(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(0,x_0)\leqslant\varphi(\|x_0\|)<\varphi(\delta)<\varphi(\varepsilon)$，从而 $\|x\|<\varepsilon$，$t\in T_q$，$t\geqslant 0$.

定理 2　如果存在定义在 $T_q\times S_\rho$ 上的正定且递减的函数 $V(t,x)$ 使得 ${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x)\leqslant 0$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$，则系统(3)的零解是一致稳定的.

证明　设 $x(t)=x(t,0,x_0)$ 是系统(3)的一个解. 因为 $V(t,x)$ 是正定且递减的，所以存在函数 φ，$\psi\in K$ 使得 $\varphi(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\psi(\|x\|)$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$. 对 $\forall\varepsilon>0$，$0<\varepsilon<\rho$，因为 $\varphi(0)=0$ 且 $\varphi(x)$ 关于 x 连续，因此可以选择 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得当 $\|x_0\|<\delta$ 时有 $\psi(\delta)<\varphi(\varepsilon)$. 对系统(3)的任意解 $x(t)=x(t,0,x_0)$，有 $\varphi(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x(t))$，$\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$. 因为$({}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x(t))\leqslant 0$，利用引理 2 的(c)有 $V(t,x(t))\leqslant V(0,x_0)$，$t\in T_q$，因此 $\varphi(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x(t))\leqslant V(0,x_0)\leqslant\psi(\|x_0\|)<\psi(\delta)<\varphi(\varepsilon)$，从而 $\|x\|<\varepsilon$，$t\in T_q$，$t\geqslant 0$.

定理 3　如果存在定义在 $T_q\times S_\rho$ 上的正定且递减的函数 $V(t,x)$ 使得

$$ {}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x)\leqslant-\psi(V(t,x)),\ (t,x)\in T_q\times S_\rho,\ t\geqslant 0, $$

其中 $\psi(V(t,x))\geqslant\psi(V_0)$，$\psi\in K$，则系统(3)的零解是渐近稳定的.

证明　因为满足定理 1 的条件，所以系统(3)的零解是稳定的. 因为 ${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x)\leqslant-\psi(V(t,x))$，$(t,x)\in T_q\times S_\rho$，$t\geqslant 0$，利用引理 2，$V(t,x(t))\leqslant V(0,x_0)$，$t\in T_q$ 且 $(t,x)\in T_q\times S_\rho$，$t\geqslant 0$. 故 $V(t,x(t))$ 是递减的，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}V(t,x)=V_0$ 存在. 下证 $V_0=0$. 否则，由于 $V(t,x)\geqslant V_0$，有 $-\psi(V(t,x))\leqslant-\psi(V_0)$，${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}V(t,x)\leqslant-\psi(V_0)$. 利用引理 2，可得 $V(t,x)\leqslant V(0,x_0)-\psi(V_0)q^{\binom{\alpha-1}{2}}\dfrac{t^{\alpha-1}}{\widetilde{\Gamma}_q(\alpha)}$. 证毕.

利用引理 5，可得以下结论：

定理 4　(i) 在定理 2 中，如果将 ${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}$ 换成 $\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}$ 之后仍然满足条件，那么

$$ (\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}x)(t)=f(t,x(t)),\ x(0)=x_0 \tag{4} $$

的零解是稳定的.

(ii) 在定理 3 中，如果将 ${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}$ 换成 $\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}$ 之后仍然满足条件，那么方程(4)的零解是一致稳定的.

(iii) 在定理 4 中，如果将 ${}^c\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}$ 换成 $\widetilde{D}_{q,0}^{\alpha}$ 之后仍然满足条件，那么方程(4)的零解是渐近稳定的.

参考文献：

[1]　Strominger A. Information in black hole radiation[J]. Phys Rev Lett, 1993, 71(23): 3743-3746.

（下转第 230 页）

由图可知,交流电压在 40～250 V 范围内改变时,浮地模式爆闪式信号灯在输入电压为 250、220、100、40 V 的情况下,其输入波形均正常,并且 U_o 都能够在 0.8 s 以内达到设定值,由此可知该爆闪灯可以在交流 40～250 V 宽电压范围内稳定地工作.

4　结论

经实验证明,本文设计的利用浮地方式工作的爆闪式信号灯可以在交流 40～250 V 的宽电压范围内稳定地工作,克服了现售爆闪灯仅能在 48、110、220 V 电压下工作的弊端,而且电路简单,因此本文设计的爆闪灯具有良好的开发应用前景.

参考文献:

[1] 金永镐,姜欣欣. 基于 MK6A11P 单片机的宽电压智能型爆闪灯的设计[J]. 电子科技,2010,23(10):46-48.

[2] Su H, Jin Y G. Design of capacitor step-down regulated power supply based on current conduction angle adjustable mode[J]. Applied Mechanics & Materials, 2015,713-715:1289-1293.

[3] Michal V. Three-level PWM floating H-bridge sinewave power inverter for high-voltage and high-efficiency applications[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2015,1(6):885-893.

[4] 金永镐,金杰. 微功耗高灵敏度声光控制型 LED 照明灯的设计[J]. 电子科技,2012,25(3):66-68.

[5] 金永镐,王炳刚. 基于自适应环境噪声的声光控 LED 照明灯设计[J]. 电子科技,2015,28(4):98-101.

(上接第 191 页)

[2] Youm D. q-deformed conformal quantum mechanics[J]. Phys Rev D, 2000,62(9):095009.

[3] Jackson F H. On q-definite integrals, Quart[J]. J Pure Appl Math, 1910,41:193-203.

[4] Jackson F H. q-difference equations Amer[J]. J Math, 1910,32(4):305-314.

[5] Al-Salam W A. Some fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Edinb Math Soc, 1996,15(2):135-140.

[6] Agarwal R P. Certain fractional q-integrals and q-derivatives[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1996,66:365-370.

[7] Neamaty A, Yadollahzadeh M, Darzi R. Existence of solution for a nonlocal boundary value problem with fractional q-derivatives[J]. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2015,6(2):18-27.

[8] Ahmad B, Nieto J J, Alsaedi A, et al. Existence of solutions for nonlinear fractional q-difference integral equations with two fractional orders and nonlocal four-point boundary conditions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014,351:2890-2909.

[9] Yang wengui. Anti-periodic boundary value problems involving nonlinear fractional q-difference equations[J]. Malaya Journal of Matematik, 2013,4(1):107-114.

[10] Ahmad B, Ntouyas S, Purnaras I. Existence results for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional difference equations[J]. Adv Differ Equ, 2012,140:1-15.

[11] El-Shahed M, Hassan H A. Positive solutions of q-difference equation[J]. Proc Amer Math Soc, 2010,138:1733-1738.

[12] Wang Jufang, Yu Changlong, Gao Yanping. Positive solutions for a class of singular boundary value problems with fractional q-difference equations[J]. Journal of Function Spaces, 2015(2015), Article ID 418569(8 pages). http://dx.doi.org/10.1155/2015/418569.

[13] Harjani J, Sadarangani K. Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2010,72:1188-1197.

[14] Sun Mingzhe, Jin Yuanfeng, Hou Chengmin. Certain fractional q-symmetric integrals and q-symmetric derivatives and their aplication[J]. Adv Differ Equ, 2016(2016):222 DOI 10.1186/s13662-016-0947-7.

[15] Annaby M H, Mansour Z S. q-Fractional Calculus and Equations[M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.

[16] Ricardo Almeida, Natália Martins. Existence results for fractional q-difference equations of order with three-point boundary conditions[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014,19(6):1675-1685.