文章编号: 1004-4353(2016)03-0181-07

一类随机强衰减波动方程的整体吸引子

韩英豪， 杨永芳， 杜萍， 田雨嘉
(辽宁师范大学 数学学院，辽宁 大连 116029)

摘要: 在有界区域上研究了具有 Neumann 边界条件的随机强衰减波动方程的渐近行为. 针对与上述波动方程相关联的随机动力系统，在一个余维数 1 的空间上证明其随机吸引子的存在性. 研究了此动力系统紧吸引集的存在性，并分析了紧吸引集的调和性，从而得到了随机吸引子的唯一存在性.

关键词: 随机强衰减波动方程; 随机动力系统; 整体吸引子
中图分类号: O211.63; O175.29　　**文献标识码:** A

Global attractor for a class of stochastic strongly damped wave equations

HAN Yinghao, YANG Yongfang, DU Ping, TIAN Yujia
(*School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029, *China*)

Abstract: On a bounded domain we investigate the asymptotic behaviour of the strongly damped stochastic wave equation with the Neumann boundary condition. We prove the existence of the global attractor for the random dynamical system associated with the above equation in a co-dimension one space. And then, the random dynamic system associated with the above equation has a compact attracting set is studyed, and the compact attracting set is tempered is investigated. Hence we get the existence of the global attractor of the random dynamical system.

Keywords: stochastic strongly damped wave equation; random dynamical system; global attractor

0 引言

设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是具有光滑边界 ∂U 的一个有界开区域，在 $U\times(0,+\infty)$ 上考虑如下具有可加噪声的随机强衰减波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t+f(u)-\Delta u+\alpha(-\Delta)^{\eta}u_t=g+\sum\limits_{j=1}^{m}h_j\mathrm{d}W_j,\ x\in U,\ t>0,\ \eta\in[0,1]; \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in U; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0,\ x\in\partial U,\ t>0. \end{cases} \tag{1}$$

其中，未知函数 $u=u(x,t)$ 是关于 $x\in U$，$t\geqslant 0$ 的实函数，Δ 是关于变量 $x\in U$ 的拉普拉斯算子，$\alpha>0$ 是强衰减系数，$g(x)$ 是给定的外力项，$\boldsymbol{n}$ 为 ∂U 的向外法向量. 非线性项 $f\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 和外力项 $g(x)$ 满足如下假设条件:

$$\exists\, c_0>0,\ \text{s.t.}\ |f'(s)|\leqslant c_0,\ \forall\, s\in\mathbf{R}, \tag{2}$$

收稿日期: 2016－06－27
作者简介: 韩英豪(1963—)，男，理学博士，副教授，研究方向为无穷维动力系统.

$$\exists c_1 > 0,\ \text{s.t.}\ |f(s)| \leqslant c_1,\ \forall s \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

$$g(x) \in \dot{L}^2(U). \tag{4}$$

其中 $\dot{L}^2(U)=\{u\in L^2(U):\int_U u\mathrm{d}x=0\}$, $|\cdot|$ 表示数的绝对值, $h_j\in H^2(U)$ 且在 ∂U 上 $\dfrac{\partial h_j}{\partial \boldsymbol{n}}=0$, $j=1,\cdots,m$. $\{W_j\}_{j=1}^m$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的相互独立的双边实值 Wiener 过程,其中 $\Omega=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^m):\omega(0)=0\}$, $\mathscr{F}$ 为在 Ω 上由紧开拓扑生成的 Borel σ- 代数, P 是在 $\mathscr{F}$ 上相应的 Winer 测度. 本文把 $(W_1(t),\cdots,W_m(t))$ 与 $\omega(t)$ 等同看待,即 $\omega(t)=(W_1(t),\cdots,W_m(t))$, $t\in\mathbf{R}$.

强衰减波动方程是模拟具有形变的弹性杆纵向摆动现象的一种数学模型,其在结构性衰减的弹性系统中具有广泛应用. G. Chen 等在文献[1]中提出了结构衰减的弹性系统模型,此类方程的渐近性质在无穷维动力系统理论研究中具有重要意义. 韩英豪等在文献[2]中研究了分形布朗运动驱动的随机偏微分泛函方程的渐近行为,证明了当线性部分为解析线性算子时相应的随机系统具有随机吸引子. Zhou S 在文献[3]中研究了强衰减非线性波动方程的整体吸引子的 Hausdorff 维数. 由于随机系统的复杂性,目前为止关于具有 Neumann 边界条件的随机强衰减波动方程随机吸引子存在性的研究较少. Wang Z 等在文献[4]中研究了具有 Neumann 边界条件的随机强衰减波动方程随机吸引子的存在性. 在此基础上,本文研究上述具有 Neumann 边界条件的随机强衰减波动方程的渐近行为. 特别是,当强衰减项为更一般的分数幂情形时,证明在一个余维数 1 的空间中随机动力系统随机吸引子的存在性.

1 方程的设定、基本概念及相关结论

令 $A=-\Delta$, $D(A)\equiv\{u\in H^2(U):\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}|_{\partial U}=0\}$. 显然, $A: D(A)\to L^2(U)$ 是一个自伴、稠定且具有特征值 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 的半正定线性算子. 定义 $\dot{L}^2(U)=\{u\in L^2(U):\int_U u\mathrm{d}x=0\}$, $\widetilde{H}^1=\{u\in H^1(U):\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}|_{\partial U}=0\}$, $\dot{H}^1=\widetilde{H}^1\cap\dot{L}^2(U)$, 则 $A: H^2\cap\dot{H}^1\to L^2(U)$ 是一个正定线性算子.

定义相空间 $E=H^1\times L^2(U)$ 为赋予如下内积的可分的 Hilbert 空间:

$$\langle\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2\rangle_E=(\nabla u_1,\nabla u_2)+(u_1,u_2)+(v_1,v_2),\ \boldsymbol{\phi}_1=(u_1,v_1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\phi}_2=(u_2,v_2)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(U)$ 的内积, T 代表转置. 在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上定义度量动力系统 $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$ 为 $\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t)$, $t\in\mathbf{R}$, 则 $(\Omega,\mathscr{F},P,(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}})$ 是遍历的度量动力系统[5]. 下面将方程(1)转化为带有随机参数的确定性方程. 为此,考虑如下由 Winer 过程导出的 Ornstein-Uhlenbeck 过程:

$$z_j(\theta_t\omega_j)=-\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s(\theta_t\omega_j)(s)\mathrm{d}s,\ t\in\mathbf{R}.$$

显然该过程是 Itô 方程 $\mathrm{d}z_j+z_j\mathrm{d}t=\mathrm{d}W_j(t)$, $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 的解. 由文献[6]可知,随机变量 $|z_j(\omega_j)|$ 是调和的,且存在 P 测度 1 的一个 θ_t-不变集合 $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, 对任意 $\omega\in\widetilde{\Omega}$, 使得对 $j=1,2,\cdots,m$, 映射 $t\to z_j(\theta_t\omega_j)$ 是连续的. 令 $z(\theta_t\omega)=z(x,\theta_t\omega)=\sum_{j=1}^m h_j z_j(\theta_t\omega_j)$, 则该过程是随机方程 $\mathrm{d}z+z\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^m h_j\mathrm{d}W_j$ 的一个解.

引理 1[4] 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在调和的随机变量 $r, r^l:\Omega\to\mathbf{R}^+$, 对于所有的 $t\in\mathbf{R}$, $\omega\in\Omega$, 使得

$$\|z(\theta_t\omega)\|\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon|t|}r(\omega),\ \mathrm{e}^{-\varepsilon|t|}r(\omega)\leqslant r(\theta_t\omega)\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon|t|}r(\omega), \tag{6}$$

$$\|A^l z(\theta_t\omega)\|\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon|t|}r^l(\omega),\ \mathrm{e}^{-\varepsilon|t|}r^l(\omega)\leqslant r^l(\theta_t\omega)\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon|t|}r^l(\omega). \tag{7}$$

其中 $r(\omega)=\sum_{j=1}^m r_j(\omega_j)\|h_j\|$, $r^l(\omega)=\sum_{j=1}^m r_j(\omega_j)\|A^l h_j\|$.

令 $v=u_t$, 则随机波动方程(1)可转化成一阶发展方程

$$\begin{cases}\dot{u}=v,\\ \dot{v}=-Au-\alpha A^{\eta}v-v-f(u)+g+\sum\limits_{j=1}^{m}h_j\dot{W}_j,\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=u_1(x),\ x\in U.\end{cases}\tag{8}$$

定义

$$\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -I\\ A & \alpha A^{\eta}+I\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}(t,\omega,\boldsymbol{\phi})=\begin{pmatrix}0\\ -f(u)+g+\sum\limits_{j=1}^{m}h_j\dot{W}_j\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{M}$ 为以 $D(A)\times D(A^{\eta})\cap D(A^{\frac{1}{2}})$ 为定义域的 E 上的线性算子. 由文献[4]可知，$\boldsymbol{M}$ 为在 E 上稠定、可闭、耗散的算子，因而 $-\boldsymbol{M}$ 在 E 上生成 c_0-半群. 这说明由方程组(8)转化的矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{F}(t,\omega,\boldsymbol{\phi}),\tag{9}$$

存在调和解 $\boldsymbol{\phi}=(u,v)^{\mathrm{T}}$.

通过变量替换 $\psi_1=u$, $\psi_2=v-z(\theta_t\omega)$，将随机发展方程(8)转化成与其等价的具有随机系数的确定性方程组

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=\psi_2+z(\theta_t\omega),\\ \dot{\psi}_2=-A\psi_1-(1+\alpha A^{\eta})\psi_2-f(\psi_1)+g-\alpha A^{\eta}z(\theta_t\omega),\\ \psi_1(x,0)=u_0(x),\ \psi_2(x,0)=u_1(x)-z(\omega),\ x\in U,\\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\boldsymbol{n}}\mid_{\partial U}=0.\end{cases}\tag{10}$$

上述方程的矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}+\widetilde{\boldsymbol{F}}(\theta_t\omega,\boldsymbol{\psi}),\tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$，$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\theta_t\omega,\boldsymbol{\psi})=\begin{pmatrix}z(\theta_t\omega)\\ -f(\psi_1)+g-\alpha A^{\eta}z(\theta_t\omega)\end{pmatrix}$.

注 1　为书写上的方便，以下除方程的矩阵形式外，用 ϕ,M,F 表示 $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{M},\boldsymbol{F}$，其他类似符号也作同样处理.

对 $\omega\in\widetilde{\Omega}$，考虑方程(9)或(11)，并将 $\widetilde{\Omega}$ 当作 Ω. 由文献[6]可知，M 是 E 中定义域 $D(M)$ 上的无界闭算子，其中 $D(M)=\{(u,v)^{\mathrm{T}}: u,v\in\widetilde{H}^1(U), u+\alpha v\in D(A)\}$，且 $-M$ 在 E 上生成一个有界 C_0 线性半群 $\{\mathrm{e}^{-Mt}\}_{t\geqslant 0}$.

记 $\widetilde{F}^{\omega}(t,\psi):=\widetilde{F}(\theta_t\omega,\psi)$. 容易证明 $\widetilde{F}^{\omega}(\cdot,\cdot):[0,+\infty)\times E\to E$ 关于 t 是连续的，且对于每一个 $\omega\in\Omega$，关于 ψ 是全局 Lipschitz 连续的. 由经典理论半群的解的存在性和唯一性理论可得到如下结论[7]：

定理 1　假设方程(11)满足前面所设的全部条件，那么对任意 $\eta\in(0,1]$, $\psi_0\in E$, 存在唯一 $\psi(\cdot,\omega,\psi_0)\in C([0,+\infty);E)$，使得 $\psi(0,\omega,\psi_0)=\psi_0$，并 $\psi(t,\omega,\psi_0)$ 满足积分方程

$$\psi(t,\omega,\psi_0)=\mathrm{e}^{-Mt}\psi_0+\int_0^t\mathrm{e}^{-M(t-s)}\widetilde{F}(\theta_s\omega,\psi(s,\omega,\psi_0))\mathrm{d}s,\ \text{P-a. s.}\ \omega\in\Omega.$$

其中 $\psi(t,\omega,\psi_0)$ 关于 t 和 ψ_0 是联合连续的，且在 ω 中是可测的. 进而，如果 $\psi_0\in D(M)$，那么存在方程(11)的整体解 $\psi(\cdot,\omega,\psi_0)\in C([0,+\infty);D(M))\cap C^1([0,+\infty);E)$，因此解映射 $\widetilde{S}(t,\omega):\psi_0\to\psi(t,\omega,\psi_0)$ 生成一个随机动力系统.

由定理 1，定义映射 $S:\mathbf{R}^{+}\times\Omega\times E\to E$,

$$S(t,\omega):\phi_0=\psi_0+(0,z(\omega))^{\mathrm{T}}\to\phi(t,\omega,\phi_0)=\psi(t,\omega,\psi_0)+(0,z(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}},$$

其中 $\phi_0=(u_0,u_1)^{\mathrm{T}}$, $\psi_0=(u_0,u_1-z(\omega))^{\mathrm{T}}$. 由定理(1)可知，$S(t,\omega)$ 是 E 上的一个连续随机动力系统，那么 2 个动力系统 $S(t,\omega)$ 和 $\widetilde{S}(t,\omega)$ 有如下关系：

$$\widetilde{S}(t,\omega)=R_{\theta_t\omega}S(t,\omega)R_{\theta_t\omega}^{-1},$$

其中 $R_{\theta_t\omega}:(a,b)^{\mathrm{T}}\to(a,b-z(\theta_t\,\omega))^{\mathrm{T}}$ 是 E 的一个同胚映射.

再次通过变量替换 $\varphi_1=u=\psi_1$, $\varphi_2=v+\varepsilon u-z(\theta_t\,\omega)=\psi_2+\varepsilon\psi_1$(其中 ε 是较小的正常数,其取值范围将在后面给出),得到如下与方程(11) 等价的发展方程:

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_1=-\varepsilon\varphi_1+\varphi_2+z(\theta_t\,\omega),\\ \dot{\varphi}_2=\varepsilon(1-\varepsilon)\varphi_1+\varepsilon\alpha A^{\eta}\varphi_1-A\varphi_1+[(\varepsilon-1)-\alpha A^{\eta}]\varphi_2-f(\varphi_1)+g+(\varepsilon-\alpha A^{\eta})z(\theta_t\,\omega),\\ \varphi_0(x,0)=(u_0(x),u_1(x)+\varepsilon u_0(x)-z(\omega)).\end{cases}$$

其向量形式为

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{M}_{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi}+\widetilde{\boldsymbol{F}}_{\varepsilon}(\theta_t\,\omega,\boldsymbol{\varphi}),\tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{M}_{\varepsilon}=\begin{pmatrix}-\varepsilon I & I\\ \varepsilon(1-\varepsilon)I+(\varepsilon\alpha\,A^{\eta}-A) & (\varepsilon-1)I-\alpha A^{\eta}\end{pmatrix},\tag{13}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(\theta_t\,\omega,\boldsymbol{\varphi})=\begin{pmatrix}z(\theta_t\,\omega)\\ -f(\varphi_1)+g+(\varepsilon-\alpha A^{\eta})z(\theta_t\,\omega)\end{pmatrix}.\tag{14}$$

由此知 $\widetilde{S}$ 的微小扰动 $\widetilde{S}_{\varepsilon}(t,\omega)=T_{\varepsilon}\widetilde{S}(t,\omega)T_{-\varepsilon}:\varphi_0\to\varphi(t,\omega,\varphi_0)$ 是方程(12) 所生成的一个随机动力系统,其中 $\varphi_0=(u_0,u_1+\varepsilon u_0-z(\omega))^{\mathrm{T}}$,且 $T_{\varepsilon}:(a,b)^{\mathrm{T}}\to(a,b+\varepsilon a)^{\mathrm{T}}$ 是 E 上的一个同构.

以上所得到的随机动力系统 $S(t,\omega)$, $\widetilde{S}(t,\omega)$ 和 $\widetilde{S}_{\varepsilon}(t,\omega)$ 是相互等价的,因而这些随机动力系统中任何一个存在随机吸引子,就意味着其他动力系统也存在随机吸引子;因此,以下仅考虑随机动力系统 $\widetilde{S}(t,\omega)$ 的吸引子存在性.

为了考虑 Neumann 边界条件,构建新的函数空间. 对任意 $u\in L^2(U)$,定义 u 的空间平均值 $\bar{u}=\dfrac{1}{|U|}\displaystyle\int_U u(x)\mathrm{d}x$,并设 $\dot{L}^2(U)=\{u\in L^2(U):\bar{u}=0\}$, $\dot{H}^1(U)=H^1(U)\cap\dot{L}^2(U)$, $E_1=R^2$, $E_0=\dot{H}^1(U)\times\dot{L}^2(U)$;那么,显然有 $E=E_1\oplus E_0$. 在 E_1 上引入通常内积,对于 $\phi_i=(\bar{u}_i,\bar{v}_i)^{\mathrm{T}}\in E_1$, $i=1,2$,定义

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{E_1}=\bar{u}_1\times\bar{u}_2+\bar{v}_1\times\bar{v}_2.\tag{15}$$

在 E_0 上引入与 E 中相似的内积,即对任意 $\phi_i=(u_i,v_i)^{\mathrm{T}}\in E_0$, $i=1,2$,有

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{E_0}=\langle A^{\frac{1}{2}}u_1,A^{\frac{1}{2}}u_2\rangle+\langle u_1,u_2\rangle+\langle v_1,v_2\rangle,\tag{16}$$

其中 $A^{\frac{1}{2}}=\nabla$. 那么,显然有

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_E=|U|\langle\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2\rangle_{E_1}+\langle\phi_1-\bar{\phi}_1,\phi_2-\bar{\phi}_2\rangle_{E_0},\tag{17}$$

其中 $\phi_1=\bar{\phi}_1+\phi_1-\bar{\phi}_1\in E$, $\phi_2=\bar{\phi}_2+\phi_2-\bar{\phi}_2\in E$, $\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2\in E_1$ 且 $\phi_1-\bar{\phi}_1,\phi_2-\bar{\phi}_2\in E_0$.

在内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ 下,容易看出 $E_1\perp E_0$. 下面定义从 E 分别到 E_1 与 E_0 的投射 R 与 Q:

$$R\phi=\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix}\in E_1,\ Q\phi=\phi-\bar{\phi}=\begin{pmatrix}u-\bar{u}\\ v-\bar{v}\end{pmatrix}\in E_0,$$

其中 $\phi=(u,v)^{\mathrm{T}}\in E$. 为了方便,对于 $u\in\widetilde{H}^1(U)$, $v\in L^2(U)$,记 $Qu=u-\bar{u}$, $Qv=v-\bar{v}$,并把 E_1 分解成 E_{11} 与 E_{12}, $E_{11}:=\{(\bar{u},0)^{\mathrm{T}}:\bar{u}\in\mathbf{R}\}$, $E_{12}:=\{(0,\bar{v})^{\mathrm{T}}:\bar{v}\in\mathbf{R}\}$. 在 E_{11} 与 E_{12} 上引入通常内积,并且将投射 R 分解成 R_1 与 R_2, $R_1\phi=\begin{pmatrix}\bar{u}\\ 0\end{pmatrix}\in E_{11}$, $R_2\phi=\begin{pmatrix}0\\ \bar{v}\end{pmatrix}\in E_{12}$, $\phi=\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix}\in E_1$. 从上面的定义可以看出, $E_{11}\perp(E_{12}\oplus E_0)$, $(E_{11}\oplus E_{12})\perp E_0$, \$E=E_{11}\oplus E_{12}\oplus E_0$, $E_{11}^{\perp}=E_{12}\oplus E_0$. 如果在 E_0 中再引进内积,对任意 $\phi_i=(u_i,v_i)^{\mathrm{T}}\in E_0$, $i=1,2$, $\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{E_0'}=\langle A^{\frac{1}{2}}u_1,A^{\frac{1}{2}}u_2\rangle+\langle v_1,v_2\rangle$,则 E_0' 也构成 Hilbert 空间. 由于这个内积导出的范数 $\|\cdot\|_{E_0'}$ 与原有的范数 $\|\cdot\|_{E_0}$ 等价,因而 2 个 Hilbert 空间 E_0 与 E_0' 同构. 以下不区别这 2 个空间,都用 E_0 来表示.

2　随机吸引子的存在性

定理 2　如果假设条件(2)—(3)成立，$g\in\dot{H}^1(U)$，那么方程(9)所定义的随机动力系统 $\widetilde{S}(t,\omega)$ 在 $E_{11}^{\perp}=E_{12}\oplus E_0$ 中有唯一的随机吸引子

$$A_0(\omega)=\bigcap_{t>0}\overline{\bigcup_{\tau\geqslant t}\Psi(\tau,\theta_{-\tau}\omega,B_0(\theta_{-\tau}\omega))},\ \text{P-a. s.}\ \omega\in\Omega,$$

其中 $B_0(\omega)$ 是动力系统 $\widetilde{S}(t,\omega)$ 的一个调和随机紧集.

证明　首先在 E_{12} 中考虑方程(11)的解 ψ 的一部分 $R\psi$ 的有界性. 取方程(10)的第 2 个方程的平均值，由格林公式及式(1)中的 Neumann 边界条件，得到

$$-\overline{Au}=\overline{\Delta u}=\frac{1}{|U|}\int_U\Delta u\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|U|}\int_{\partial U}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}x=0.$$

另外，由于 A 是正定的稠密闭算子，$-A$ 为解析半群的极小生成元，并且 $0\leqslant\eta\leqslant1$，因而有

$$-\overline{A^{\eta}v}=-\frac{1}{|U|}\int_U A^{\eta}v\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{|U|}\int_U AA^{\eta-1}u_t\,\mathrm{d}x=\frac{1}{|U|}\int_{\partial U}\frac{\partial A^{\eta-1}u_t}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}x=0.$$

其中 U 是 A 在 $\widetilde{H}^1$ 上生成的半群. 同理可以证明 $\overline{A^{\eta}z(\omega)}=0$. 因而，$\dot{\bar{\psi}}_2=-\bar{\psi}_2-\overline{f(\psi_1)}+\bar{g}$. 两端与 $\bar{\psi}_2$ 做乘积，得到 $\bar{\psi}_2(t,\omega)^2\leqslant\bar{\psi}_2(0,\omega)^2\mathrm{e}^{-t}+2(c_1^2+\bar{g}^2)$，$t\geqslant0$. 由引理(1)可知 $|\bar{u}-\overline{z(\omega)}|$ 是一个调和集，所以存在 $\bar{t}_0(\omega)>0$，当 $t\geqslant t_0$ 时，有

$$|\bar{\psi}_2(t,\omega)|\leqslant4(c_1^2+\bar{g}^2).\tag{18}$$

这表明 E_{12} 中随机动力系统 $R\widetilde{S}$ 拥有一个紧的吸收集 B_{12}.

下面证明随机动力系统 $Q\widetilde{S}_{\varepsilon}$ 在 E_0 中拥有一个紧吸引集.

引理 2　当 $\lambda_1^{1-\eta}>\alpha$，并适当选取 ε 时，存在一个充分小的正常数 $0<\sigma<\min\{\varepsilon/2,\alpha/4\}$，使得

$$\langle M_{\varepsilon}Q\phi,Q\phi\rangle_{E_0}\leqslant-\sigma\|Q\phi\|_{E_0}^2-\frac{\alpha}{2}\|A^{\frac{\eta}{2}}Qv\|^2-\frac{1}{2}\|Qv\|^2,\ \phi=(u,v)^{\mathrm{T}}\in E,$$

并且对任意 $\phi=(u,v)^{\mathrm{T}}\in D(M)\cap E$，有

$$\langle M_{\varepsilon}Q\phi,A^{1-\eta}Q\phi\rangle_{E_0}\leqslant-\sigma\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\phi\|_{E_0}^2-\frac{\alpha}{2}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Qv\|^2-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Qv\|^2.$$

证明　根据式(13)和式(5)，得到

$$\begin{aligned}\langle M_{\varepsilon}Q\phi,Q\phi\rangle_{E_0}={}&-\varepsilon\|\nabla Qu\|^2-(1-\varepsilon)\|Qv\|^2-\alpha\|A^{\frac{\eta}{2}}Qv\|^2+\\&\varepsilon(1-\varepsilon)\langle Qu,Qv\rangle+\varepsilon\alpha\langle A^{\eta}Qu,Qv\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\|A^{\frac{\eta}{2}}u\|\leqslant\lambda_1^{\eta-1}\|A^{\frac{1}{2}}u\|$，整理上式得到

$$\begin{aligned}&\langle M_{\varepsilon}Q\phi,Q\phi\rangle_{E_0}+\sigma\|Q\phi\|_{E_0}^2+\frac{1}{2}\|Qv\|^2+\frac{\alpha}{2}\|A^{\frac{\eta}{2}}Qv\|^2\leqslant\\&\quad-\Big(\varepsilon-\sigma-\frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2}{4\lambda_1(\frac{1}{2}-\varepsilon-\sigma)}-\frac{\varepsilon^2\alpha}{2\lambda_1^{1-\eta}}\Big)\|\nabla Qu\|^2.\end{aligned}$$

因而，当选取 $\varepsilon\leqslant\{\frac{\lambda_1}{4},\frac{\lambda_1^{1-\eta}}{2\alpha},\frac{1}{8}\}$ 时，上式不等号右端小于零. 引理的第 2 个等式可由第一个等式直接得出. 证明完毕.

以下令 D 是 E 的所有调和随机有界子集的集族. 类似于文献[3]可得如下结论：

引理 3　若假设条件(2)—(4)，$g\in\dot{H}^1(U)$ 成立，则存在一个以 0 为中心，以 $\mathscr{Q}(\omega)>0$ 为半径的随机球 $B_0(\omega)\in D$，对于任意 $\hat{B}(\omega)\in D$，存在 $T_{\hat{B}(\omega,\mathscr{Q})}>0$，对于任意 $\varphi_0(\theta_{-t}\omega)\in\hat{B}(\theta_{-t}\omega)$，P-a. e. $\omega\in\Omega$ 有

$$\|Q\varphi(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0(\theta_{-t}\omega))\|_{E_0}\leqslant\mathscr{Q}(\omega),\ \forall\ t\geqslant T_{\hat{B}(\omega,\mathscr{Q})}.\tag{19}$$

把具有初值 $\varphi_0=(u_0,v_0+\varepsilon u_0-z(\omega))^{\mathrm{T}}$ 的方程(12)的解 φ 分解成如下两部分：

$$\varphi=\varphi^a+\varphi^b=(u^a,v^a+\varepsilon u^a)^{\mathrm{T}}+(u^b,v^b+\varepsilon u^b-z(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}},$$

其中 φ^a 为方程

$$\dot{\varphi}^a=M_\varepsilon\varphi^a,\ \varphi_0^a=(u_0,v_0+\varepsilon u_0)^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

的解,φ^b 为方程

$$\dot{\varphi}^b=M_\varepsilon\varphi^b+\widetilde{F}(\theta_t\omega,\varphi),\ \varphi_0^b=(0,-z(\omega))^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

的解.

引理4 若假设条件(2)—(4)成立,则存在一个调和的随机变量 $\mathcal{Q}_1(\omega)>0$,使得对任意 $\{\hat{B}(\omega)\}\in D$ 和 $\varphi_0(\omega)\in\hat{B}(\omega)$ 存在 $T_{\hat{B}}(\omega,\mathcal{Q}_1)>0$,使得方程(12)的解对 P-a. e. $\omega\in\Omega$ 满足如下2个不等式:

$$\|Q\varphi^a(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0(\theta_{-t}\omega))\|_{E_0}\leqslant \mathrm{e}^{-\sigma t}\|\varphi_0^a(\theta_{-t}\omega)\|_{E_0}\to 0,\ t\to+\infty, \tag{22}$$

$$\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0^a(\theta_{-t}\omega))\|_{E_0}\leqslant\mathcal{Q}_1(\omega),\ \forall t\geqslant T_{\hat{B}}(\omega,\mathcal{Q}_1)>0. \tag{23}$$

其中 $Q\varphi^a$ 和 $Q\varphi^b$ 分别满足方程(20)和(21).

证明 由方程(20)可推出

$$\dot{Q}\varphi^a=M_\varepsilon Q\varphi^a. \tag{24}$$

将方程(24)的两端与 $Q\varphi^a\in E_0$ 在 E_0 中作内积,再由引理2可得

$$\|Q\varphi^a(t,\omega,\varphi_0^a(\theta_{-t}\omega))\|_{E_0}^2\leqslant\mathrm{e}^{-2\sigma t}\|\varphi_0^a(\theta_{-t}\omega)\|_{E_0}^2.$$

由此式(22)得证.

将方程 $\dot{Q}\varphi^b=M_\varepsilon Q\varphi^b+Q\widetilde{F}_\varepsilon(\theta_t\omega,\varphi^b)$ 的两端与 $A^{1-\eta}Q\varphi^b$ 作内积,再利用引理2得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b\|_{E_0}^2+\sigma\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b\|_{E_0}^2\leqslant-\frac{\alpha}{2}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_2^b\|^2-\frac{1}{2}\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi_2^b\|^2+\\&\quad\langle Qz(\theta_t\omega),A^{2-\eta}Q\varphi_1^b\rangle+\langle Qz(\theta_t\omega),A^{1-\eta}Q\varphi_1^b\rangle+\\&\quad\langle Q[-f(u)+g+\varepsilon z(\theta_t\omega)-\alpha A^\eta z(\theta_t\omega)],A^{1-\eta}Q\varphi_2^b\rangle.\end{aligned} \tag{25}$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式得到:

$$\langle Qz(\theta_t\omega),A^{2-\eta}Q\varphi_1^b\rangle\leqslant\frac{1}{\sigma}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}z(\theta_t\omega)\|^2+\frac{\sigma}{4}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_1^b\|^2,$$

$$\langle Qz(\theta_t\omega),A^{1-\eta}Q\varphi_1^b\rangle\leqslant\frac{1}{\lambda_1^{\eta/2}\sigma}\|z(\theta_t\omega)\|^2+\frac{\sigma}{4}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_1^b\|^2,$$

$$\langle Qf(\varphi_1^b),A^{1-\eta}Q\varphi_2^b\rangle\leqslant\frac{8\,(c_1\,|\,U\,|)^2}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}+\frac{\alpha}{8}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_2^b\|^2,$$

$$\langle Qg,A^{1-\eta}Q\varphi_2^b\rangle\leqslant\frac{2\,(1+|\,U\,|)^2}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}\|g\|^2+\frac{\alpha}{8}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_2^b\|^2,$$

$$\langle\varepsilon Qz(\theta_t\omega),A^{1-\eta}Q\varphi_2^b\rangle\leqslant\frac{2\varepsilon^2}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}\|z(\theta_t\omega)\|^2+\frac{\alpha}{8}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_2^b\|^2,$$

$$\langle\alpha QA^\eta z(\theta_t\omega),A^{1-\eta}Q\varphi_2^b\rangle\leqslant\frac{2\alpha}{\lambda_1^{1-\frac{\eta}{2}}}\|Az(\theta_t\omega)\|^2+\frac{\alpha}{8}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_2^b\|^2.$$

将以上不等式应用到不等式(25),整理后得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b\|_{E_0}^2+\sigma\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b\|_{E_0}^2\leqslant 2R_1(\theta_t\omega)$,其中

$$\begin{aligned}R_1(\theta_t\omega)=&\frac{1}{\sigma}\|A^{1-\frac{\eta}{2}}z(\theta_t\omega)\|^2+\frac{1+2\varepsilon^2}{\lambda_1^{\eta/2}\sigma}\|z(\theta_t\omega)\|^2+\frac{8\,(c_1\,|\,U\,|)^2}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}+\\&\frac{2\,(1+|\,U\,|)^2}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}\|g\|^2+\frac{2\alpha}{\lambda_1^{1-\frac{\eta}{2}}}\|Az(\theta_t\omega)\|^2.\end{aligned}$$

再利用 Gronwall 引理,得对于 $t\geqslant 0$ 有

$$\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b(t,\omega,\varphi_0^b(\omega))\|_{E_0}^2\leqslant\mathrm{e}^{-\sigma t}\|A^{\frac{1-\eta}{2}}z(\omega)\|^2+2\int_0^t R_1(\theta_s\omega)\mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\mathrm{d}s. \tag{26}$$

用 $\theta_{-t}(\omega)$ 代替 ω,那么从式(26)可得对所有 $t\geqslant 0$,有

$$\|A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^b(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0^b(\theta_{-t}\omega))\|_{E_0}^2\leqslant\mathrm{e}^{-\sigma t}\|A^{\frac{1-\eta}{2}}z(\theta_{-t}\omega)\|^2+2\int_{-t}^0 R_1(\theta_\tau\omega)\mathrm{e}^{\sigma\tau}\mathrm{d}\tau.$$

由引理 1，取 $\varepsilon=\frac{\sigma}{4}$，则有：

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\parallel A^{\frac{1-\eta}{2}}z(\theta_{-t}\omega)\parallel^{2}\leqslant\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{4}|t|}r^{\frac{1-\eta}{2}}(\omega)\right)^{2}=0,$$

$$\int_{-t}^{0}R_1(\theta_\tau\omega)\mathrm{e}^{\sigma\tau}\mathrm{d}\tau\leqslant\int_{-t}^{0}\widetilde{R}_1(\tau,\omega)\mathrm{e}^{\sigma\tau}\mathrm{d}\tau\leqslant\int_{-\infty}^{0}\widetilde{R}_1(\tau,\omega)\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2}\tau}\mathrm{d}\tau<+\infty.$$

其中

$$\widetilde{R}_1(\tau,\omega)=\frac{1}{\sigma}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{4}|\tau|}r^{1-\frac{\eta}{2}}(\omega)\right)^{2}+\frac{1+2\varepsilon^{2}}{\lambda_1^{\eta/2}\sigma}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{4}|\tau|}r(\omega)\right)^{2}+\frac{8\,(c_1\,|\,U\,|)^{2}}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}+$$
$$\frac{2\,(1+|\,U\,|)^{2}}{\lambda_1^{\eta/2}\alpha}\parallel g\parallel^{2}+\frac{2\alpha}{\lambda_1^{1-\frac{\eta}{2}}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{4}|\tau|}r(\omega)\right)^{2}.$$

令 $\mathscr{Q}_1^2(\omega)=4\int_{-\infty}^{0}\widetilde{R}_1(\tau,\omega)\mathrm{e}^{\sigma\tau}\mathrm{d}\tau$，则存在一 $T_{\hat{B}}(\omega,\mathscr{Q}_1)>0$，当 $t\geqslant T_{\hat{B}}(\omega,\mathscr{Q}_1)$ 时，方程(12) 的解 φ，对 P-a. e. $\omega\in\Omega$，满足式(23) 成立. 从而引理得证.

根据 E_0 范数定义(16)，有

$$\parallel A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi^{b}(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0^{b}(\theta_{-t}\omega))\parallel_{E_0}=\left(\parallel A^{1-\frac{\eta}{2}}Q\varphi_1^{b}\parallel^{2}+\parallel A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi_1^{b}\parallel^{2}+\parallel A^{\frac{1-\eta}{2}}Q\varphi_2^{b}\parallel^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

结合式(19) 和(23) 知，对任意 $\varphi_0(\omega)\in\hat{B}(\omega)\in D$，存在 $K_0>0$，且当 $t\geqslant T_{\hat{B}}(\omega,\mathscr{Q}_1)+T_{\hat{B}}(\omega,\mathscr{Q})$ 时，有

$$\parallel Q\varphi^{b}(t,\theta_t\omega,\varphi_0^{b}(\theta_t\omega))\parallel_{\dot{H}^{1-\frac{\eta}{2}}\times\dot{H}^{\frac{1-\eta}{2}}}\leqslant K_0(\mathscr{Q}_1(\omega)+\mathscr{Q}(\omega)).\tag{27}$$

定义 E_0 的一个闭球 $B_1(\omega)$：

$$B_1(\omega)=\{b(\omega)\in E_0:\parallel b(\omega)\parallel_{\dot{H}^{1-\frac{\eta}{2}}\times\dot{H}^{\frac{1-\eta}{2}}}\leqslant K_0(\mathscr{Q}_1(\omega)+\mathscr{Q}(\omega))\}.\tag{28}$$

由式(22)、(27) 和 $Q\varphi(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0(\theta_{-t}\omega))=Q\varphi^{a}(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0(\theta_{-t}\omega))+Q\varphi^{b}(t,\theta_{-t}\omega,\varphi_0(\theta_{-t}\omega))$ 可推出，对于 P-a. e. $\omega\in\Omega$，有 $d_{E_0}(\varphi(t,\theta_{-t}\omega,B_0(\theta_{-t}\omega)),B_1(\omega))\to0$，$t\to+\infty$. 从而，对于 P-a. e. $\omega\in\Omega$，有

$$d_{E_0}(T_{-\varepsilon}\varphi(t,\theta_{-t}\omega,B_0(\theta_{-t}\omega)),T_{-\varepsilon}B_1(\omega))\to0,\ t\to+\infty.$$

由式(27) 和(28) 知，$QT_{-\varepsilon}B_1(\omega)\subset E_0$ 关于 $\dot{H}^{1-\frac{\eta}{2}}(U)\times\dot{H}^{\frac{1-\eta}{2}}(U)$ 的范数是有界的. 由于 $\widetilde{E}=\dot{H}^{1-\frac{\eta}{2}}(U)\times\dot{H}^{\frac{1-\eta}{2}}(U)$ 嵌入 E_0 是紧的，因而，集合 $\{QT_{-\varepsilon}B_1(\omega)\}$ 在空间 E_0 中是紧的. 结合式(18) 可推出，集合 $B_0(\omega):=(B_1(\omega)+B_{12}(\omega))\subset E_{11}^{\perp}=E_{12}\oplus E_0$ 是 $\widetilde{S}(t,\omega)$ 的一个随机调和紧吸引集，由此定理 2 得证.

参考文献：

[1] Chen G, Russell D L. A mathematical model for linear elastic systems with structural damping[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1980,39(4):433-454.

[2] 韩英豪，程锦辉，刘拓，等. 分形布朗运动驱动的随机偏微分泛函方程的渐近行为[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，2015,38(4):452-459.

[3] Zhou S. Dimension of the global attractor for strongly damped nonlinear wave equations[J]. J Math Anal Appl, 1999,233(1):102-115.

[4] Wang Z, Zhou S, Gu A. Random attractor of the stochastic strongly damped wave equation[J]. Comm in Nonl Sci & Num, 2012,17(4):1649-1658.

[5] Chueshov I. Monotone random systems theory and applications[M]. New York: Springer-Verlag, 2002.

[6] Bates P, Lui K, Wang B. Random attractors for stochastic reaction-diffusion equations on unbounded domains[J]. J Diff Equ, 2009,246(2):845-869.

[7] Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.