文章编号：1004-4353(2016)02-0108-07

具时滞和反馈控制的离散互惠系统的概周期解

张杰华
(阳光学院 基础教研部，福建 福州 350015)

摘要： 研究具有时滞和反馈控制的两种群离散互惠系统模型，通过运用差分不等式和构造适当的 Lyapunov 函数，证明了该系统具有持久性和全局吸引性. 利用差分概周期方程的壳理论，得到了保证该系统存在唯一的概周期解的充分条件.

关键词： 概周期解；全局吸引性；时滞；反馈控制；互惠系统
中图分类号： O175.14　　**文献标识码：** A

Almost periodic solutions of a delayed discrete mutualism model with feedback controls

ZHANG Jiehua
(*Department of Basic Teaching and Research*, *Yango College*, *Fuzhou* 350015, *China*)

Abstract: A two species discrete mutualism system with time delay and feedback controls is studied in this paper. By using the difference inequality theory and constructing the suitable Lyapunov functional, we show that the system is permanent and globally attractive. Further, by applying almost periodic functional hull theory, we obtain a set of sufficient conditions which guarantee the existence of a unique global attractive positive almost periodic sequence solution of the system.

Keywords: almost periodic solution; global attractive; delay; feedback controls; mutualism systems

0 引言

两种群在一个共同的自然环境中生存时，它们之间的相互作用关系之一就是两种群互惠共生. 近年来，已经有许多学者尝试在互惠共生种群模型上展开研究[1-7]. 众所周知，在种群数量较少或者代际明显时，用差分方程(离散的动力模型)来描述种群变化更为符合实际. 在文献[1]中，Y. K. Li 提出如下时滞差分合作模型：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_1(k)\exp\left\{r_1(k)\left[\dfrac{K_1(k)+\alpha_1(k)x_2(k-\tau_2(k))}{1+x_2(k-\tau_2(k))}-x_1(k-\sigma_1(k))\right]\right\}, \\ x_2(k+1)=x_2(k)\exp\left\{r_2(k)\left[\dfrac{K_2(k)+\alpha_2(k)x_1(k-\tau_1(k))}{1+x_1(k-\tau_1(k))}-x_2(k-\sigma_2(k))\right]\right\}. \end{cases} \tag{1}$$

在假设系统(1) 的系数都具有相同周期的周期序列下，Li 证得了系统(1) 至少存在 1 个周期正解. 但由于环境随季节呈现的是非严格意义上的周期性变化，概周期性变化对描述自然界的变化规律更为准确；因此，建立概周期生态系统对种群动力学行为进行研究更具有现实意义. 目前为止，关于离散系统概周期解的研究较少，考虑到生态系统一直受到外界的干扰，如人类的开发等因素，因此研究具有反馈控制

收稿日期： 2016－03－27
作者简介： 张杰华(1983—)，女，讲师，研究方向为微分方程.

的模型具有重要意义.基于此,本文研究如下模型:

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)\exp\left\{r_1(k)\left[\dfrac{K_1(k)+\alpha_1(k)x_2(k-\sigma_2)}{1+x_2(k-\sigma_2)}-x_1(k)-d_1(k)u_1(k)\right]\right\},\\ x_2(k+1)=x_2(k)\exp\left\{r_2(k)\left[\dfrac{K_2(k)+\alpha_2(k)x_1(k-\sigma_1)}{1+x_1(k-\sigma_1)}-x_2(k)-d_2(k)u_2(k)\right]\right\},\\ \Delta u_1(k)=-a_1(k)u_1(k)+b_1(k)x_1(k),\\ \Delta u_2(k)=-a_2(k)u_2(k)+b_2(k)x_2(k).\end{cases}\tag{2}$$

系统(2)中 $x_i(k)\ (i=1,2)$ 是第 i 个种群密度,$u_i(k)\ (i=1,2)$ 是控制变量,且满足下列条件:

(H_1)　r_i,K_i,α_i,a_i,b_i 和 $d_i\ (i=1,2)$ 是有界非负概周期序列,$\alpha_i>K_i$,且 $0<r_i^l\leqslant r_i(k)\leqslant r_i^u$,$0<K_i^l\leqslant K_i(k)\leqslant K_i^u$,$0<\alpha_i^l\leqslant\alpha_i(k)\leqslant\alpha_i^u$,$0<b_i^l\leqslant b_i(k)\leqslant b_i^u$,$0<d_i^l\leqslant d_i(k)\leqslant d_i^u$,$0<a_i^l\leqslant a_i(k)\leqslant a_i^u<1$.

定义 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Z}^+$ 分别为整数集和非负整数集.对于任一有界序列 $\{h(k)\}$,定义 $h^l=\inf\limits_{k\in\mathbf{Z}}\{h(k)\}$,$h^u=\sup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\{h(k)\}$.令 $\sigma=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$,并考虑系统(2)满足如下初始条件:

$$\begin{cases}x_i(\theta)=\varphi_i(\theta)\geqslant 0,\ \theta\in\{-\sigma,-\sigma+1,\cdots,-1,0\},\ \varphi_i(0)>0;\\ u_i(\theta)=\psi_i(\theta)\geqslant 0,\ \theta\in\{-\sigma,-\sigma+1,\cdots,-1,0\},\ \psi_i(0)>0.\end{cases}\tag{3}$$

易知系统(2)满足初始条件(3)的解对任意 $k\in\mathbf{Z}$ 均有定义且是恒正的.

1　相关引理

定义 1[8]　设 S 是集合 D 的任一紧集,τ_n 是一个序列,记

$$H(f)=\{g(k,x):\lim_{n\to\infty}f(k+\tau_n,x)=g(k,x)\ 在\ \mathbf{Z}\times S\ 上一致成立\},$$

则称 $H(f)$ 为 f 的壳.

定义 2[9]　序列 $x:\mathbf{Z}\to R^k$ 称为概周期序列,如果 x 的 ε-移位数集

$$E\{\varepsilon,x\}=\{\tau\in\mathbf{Z}:|x(k+\tau)-x(k)|<\varepsilon,\forall k\in\mathbf{Z}\}$$

关于 $\mathbf{Z}$ 对 $\varepsilon>0$ 是相对稠密集,即对任意 $\varepsilon>0$ 存在一个整数 $l(\varepsilon)>0$ 使得每个长为 $l(\varepsilon)$ 的区间总包含一个整数 $\tau\in E\{\varepsilon,x\}$,使得 $|x(k+\tau)-x(k)|<\varepsilon,\forall k\in\mathbf{Z}$,则 τ 称为 $x(k)$ 的 ε-移位数.

定义 3[10]　设 $X(k)=(x_1(k),x_2(k),u_1(k),u_2(k))$ 是系统(2)的解,若满足:

$$0<\inf_{k\in\mathbf{Z}}x_i(k)\leqslant\sup_{k\in\mathbf{Z}}x_i(k)<+\infty,\ 0<\inf_{k\in\mathbf{Z}}u_i(k)\leqslant\sup_{k\in\mathbf{Z}}u_i(k)<+\infty,\ i=1,2,$$

则称 $X(k)$ 为严格正解.

引理 1[11]　序列 $\{x(k)\}$ 是概周期的当且仅当对任一序列 $\{h_i\}\subset\mathbf{Z}$,存在一个子序列 $\{h_{ij}\}\subset\{h_i\}$,使得当 $j\to\infty$ 时,$\{x(n+h_{ij})\}$ 对 $n\in\mathbf{Z}$ 是一致收敛的,且其极限也是概周期的.

引理 2[2]　假设序列 $\{x(k)\}$ 满足 $x(k)>0$,$a(k)$ 和 $b(k)$ 均为有正的上下界的非负序列,若 $x(k+1)\leqslant x(k)\exp\{a(k)-b(k)x(k)\}$,$k\in\mathbf{N}$,则 $\limsup\limits_{k\to+\infty}x(k)\leqslant\dfrac{\exp(a^u-1)}{b^l}$.

引理 3[12]　假设序列 $\{x(k)\}$ 满足 $x(k+1)\geqslant x(k)\exp\{r(k)(1-ax(k))\}$,$k\geqslant N_0$,$\limsup\limits_{k\to+\infty}x(k)\leqslant x^*$ 且 $x(N_0)>0$,$N_0\in\mathbf{N}$,其中 a 为常数且满足 $ax^*>1$,则 $\liminf\limits_{k\to+\infty}x(k)\geqslant\dfrac{1}{a}\exp(r^u(1-ax^*))$.

引理 4[13]　假设 $A>0$,$y(0)>0$ 且 $y(k+1)\leqslant Ay(k)+B(k)$,$k=1,2,\cdots$,则有 $y(k)\leqslant A^my(k-m)+\sum\limits_{j=0}^{m-1}A^jB(k-j-1)$,$m\leqslant k$.特别地,若 $A<1$ 且 B 有上界 M,则 $\limsup\limits_{k\to+\infty}y(k)\leqslant\dfrac{M}{1-A}$.

引理 5[13]　假设 $A>0$,$y(0)>0$ 且 $y(k+1)\geqslant Ay(k)+B(k)$,$k=1,2,\cdots$,则有 $y(k)\geqslant A^my(k-m)+\sum\limits_{j=0}^{m-1}A^jB(k-j-1)$,$m\leqslant k$.特别地,若 $A<1$ 且 B 有下界 P,则 $\liminf\limits_{k\to+\infty}y(k)\geqslant\dfrac{P}{1-A}$.

2 持久性和全局吸引性

定理 1 设$(x_1(k),x_2(k),u_1(k),u_2(k))$是系统(2)的任一正解,若系统(2)满足$(\mathrm{H}_1)$和

(H_2) $K_i^l > d_i^u N_i$,

则该系统是持久的,即存在正数m_i,n_i,M_i,N_i, $i=1,2$,使得:

$$m_i \leqslant \liminf_{k\to+\infty} x_i(k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} x_i(k) \leqslant M_i,\ n_i \leqslant \liminf_{k\to+\infty} u_i(k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} u_i(k) \leqslant N_i,\ i=1,2. \tag{4}$$

证明 设$(x_1(k),x_2(k),u_1(k),u_2(k))$是系统(2)满足初值条件(3)的任一解.因为$(\mathrm{H}_1)\ \alpha_i > K_i$,所以由系统(2)的第1个方程可得

$$x_1(k+1) \leqslant x_1(k)\exp\left\{r_1(k)\left[\frac{\alpha_1(k)+\alpha_1(k)x_2(k-\sigma_2)}{1+x_2(k-\sigma_2)} - x_1(k) - d_1(k)u_1(k)\right]\right\} \leqslant$$
$$x_1(k)\exp\{r_1(k)\alpha_1(k) - r_1(k)x_1(k)\}.$$

同理,由系统(2)的第2个方程可得$x_2(k+1) \leqslant x_2(k)\exp\{r_2(k)\alpha_2(k) - r_2(k)x_2(k)\}$.应用引理2,有

$$\limsup_{k\to+\infty} x_i(k) \leqslant \frac{1}{r_i^l}\exp\{r_i^u\alpha_i^u - 1\} \overset{\text{def}}{=} M_i,\ i=1,2. \tag{5}$$

因此,对任意的$\varepsilon > 0$,存在$T_1 > 0$,当$k \geqslant T_1$时,有

$$x_i(k) \leqslant M_i + \varepsilon,\ i=1,2. \tag{6}$$

将式(6)代入系统(2)的第3和第4个方程得到$u_i(k+1) \leqslant (1-a_i^l)u_i(k) + b_i(k)(M_i+\varepsilon)$, $i=1,2$.根据引理4,可得$\limsup\limits_{k\to+\infty} u_i(k) \leqslant \dfrac{b_i^u(M_i+\varepsilon)}{a_i^l}$, $i=1,2$.在该不等式中,令$\varepsilon \to 0$得

$$\limsup_{k\to+\infty} u_i(k) \leqslant \frac{b_i^u M_i}{a_i^l} \overset{\text{def}}{=} N_i,\ i=1,2. \tag{7}$$

对任意的$\varepsilon > 0$,不失一般性,由(H_2)不妨假设$K_i^l > d_i^u(N_i+\varepsilon)$,由式(7)知存在$T_2 > T_1$,使得当$k \geqslant T_2$时,有$u_i(k) \leqslant N_i + \varepsilon$, $i=1,2$.将该式代入系统(2)的前2个方程,当$k \geqslant T_2$时,可得

$$x_i(k+1) \geqslant x_i(k)\exp\{r_i(k)[K_i^l - d_i^u(N_i+\varepsilon) - x_i(k)]\} =$$
$$x_i(k)\exp\{r_i(k)[K_i^l - d_i^u(N_i+\varepsilon)][1 - A_i^\varepsilon x_i(k)]\}, \tag{8}$$

其中$A_i^\varepsilon = \dfrac{1}{K_i^l - d_i^u(N_i+\varepsilon)}$, $i=1,2$.易证

$$A_i^\varepsilon M_i = \frac{1}{K_i^l - d_i^u(N_i+\varepsilon)}\,\frac{\exp\{r_i^u\alpha_i^u - 1\}}{r_i^l} = \frac{\alpha_i^u}{K_i^l - d_i^u(N_i+\varepsilon)}\,\frac{\exp\{r_i^u\alpha_i^u - 1\}}{r_i^l\alpha_i^u} > 1.$$

再应用引理3可得$\liminf\limits_{k\to+\infty} x_i(k) \geqslant \dfrac{1}{A_i^\varepsilon}\exp\{r_i^u(K_i^l - d_i^u(N_i+\varepsilon))(1 - A_i^\varepsilon M_i)\}$, $i=1,2$.在该不等式中,令$\varepsilon \to 0$得到

$$\liminf_{k\to+\infty} x_i(k) \geqslant \frac{1}{A_i}\exp\{r_i^u(K_i^l - d_i^u N_i)(1 - A_i M_i)\} \overset{\text{def}}{=} m_i,\ i=1,2, \tag{9}$$

其中$A_i = \dfrac{1}{K_i^l - d_i^u N_i}$.由式(9)知,对任意的$\varepsilon > 0$,存在$T_3 > T_2$,当$k \geqslant T_3$时,有

$$x_i(k) \geqslant m_i - \varepsilon,\ i=1,2. \tag{10}$$

将式(10)代入系统(2)的第3和第4个方程,当$k \geqslant T_3$时,得$u_i(k+1) \geqslant (1-a_i^u)u_i(k) + b_i^l(m_i-\varepsilon)$.再根据引理5可得$\liminf\limits_{k\to+\infty} u_i(k) \geqslant \dfrac{b_i^l(m_i-\varepsilon)}{a_i^u}$, $i=1,2$.令$\varepsilon \to 0$得到

$$\liminf_{k\to+\infty} u_i(k) \geqslant \frac{b_i^l m_i}{a_i^u} \overset{\text{def}}{=} n_i,\ i=1,2. \tag{11}$$

式(5)、(7)、(9)和(11)表明,当(H_1)和(H_2)成立时,系统(2)是持久的.证毕.

定理 2　设

(H_3) $\lambda_1\mu_1-\lambda_2 r_2^u\omega_2-\lambda_3 b_1^u>0$，$\lambda_3 a_1^l-\lambda_1 r_1^u d_1^u>0$，$\lambda_2\mu_2-\lambda_1 r_1^u\omega_1-\lambda_4 b_2^u>0$，$\lambda_4 a_2^l-\lambda_2 r_2^u d_2^u>0$，其中$\mu_i=\min\left\{r_i^l,\dfrac{2}{M_i}-r_i^u\right\}$，$\omega_i=\max\{\alpha_i^u-K_i^l,|\alpha_i^l-K_i^u|\}$.

若系统(2)满足(H_1)、(H_2)和(H_3)，则系统(2)是全局吸引的，即系统(2)的任意 2 个正解$(x_1(k),x_2(k),u_1(k),u_2(k))$和$(x_1^*(k),x_2^*(k),u_1^*(k),u_2^*(k))$，有：

$$\lim_{k\to+\infty}(x_i(k)-x_i^*(k))=0,\ \lim_{k\to+\infty}(u_i(k)-u_i^*(k))=0,\ i=1,2.$$

证明　由(H_3)，可选择正常数$\delta>0$和充分小的$\varepsilon>0$，使得$\lambda_1\mu_1^\varepsilon-\lambda_2 r_2^u\omega_2-\lambda_3 b_1^u>\delta$，$\lambda_3 a_1^l-\lambda_1 r_1^u d_1^u>\delta$，$\lambda_2\mu_2^\varepsilon-\lambda_1 r_1^u\omega_1-\lambda_4 b_2^u>\delta$，$\lambda_4 a_2^l-\lambda_2 r_2^u d_2^u>\delta$，其中$\mu_i^\varepsilon=\min\left\{r_i^l,\dfrac{2}{M_i+\varepsilon}-r_i^u\right\}$，$i=1,2$. 若$(x_1(k),x_2(k),u_1(k),u_2(k))$和$(x_1^*(k),x_2^*(k),u_1^*(k),u_2^*(k))$是系统(2)的任意正解，根据定理 1，对上面的$\varepsilon$，存在常数$N_0>0$，使得当$k\geqslant N_0$时有$m_i-\varepsilon\leqslant x_i(k)$，$x_i^*(k)\leqslant M_i+\varepsilon$，$n_i-\varepsilon\leqslant u_i(k)$，$u_i^*(k)\leqslant N_i+\varepsilon$，$i=1,2$.

定义$V_{11}(k)=|\ln x_1(k)-\ln x_1^*(k)|$，则由系统(2)可得

$$V_{11}(k+1)=|\ln x_1(k+1)-\ln x_1^*(k+1)|\leqslant|\ln x_1(k)-\ln x_1^*(k)-r_1(k)(x_1(k)-x_1^*(k))|+ r_1(k)|\alpha_1(k)-K_1(k)||x_2(k-\sigma_2)-x_2^*(k-\sigma_2)|+r_1(k)d_1(k)|u_1(k)-u_1^*(k)|.$$

利用中值定理可知$\ln x_1(k)-\ln x_1^*(k)=\dfrac{1}{\theta_1(k)}(x_1(k)-x_1^*(k))$，其中$\theta_1(k)$介于$x_1(k)$和$x_1^*(k)$之间，因此有

$$\Delta V_{11}(k)\leqslant-\left(\frac{1}{\theta_1(k)}-\left|\frac{1}{\theta_1(k)}-r_1(k)\right|\right)|x_1(k)-x_1^*(k)|+ r_1(k)|\alpha_1(k)-K_1(k)||x_2(k-\sigma_2)-x_2^*(k-\sigma_2)|+r_1(k)d_1(k)|u_1(k)-u_1^*(k)|. \tag{12}$$

令$V_{12}(k)=\sum\limits_{s=k-\sigma_2}^{k-1}r_1(s+\sigma_2)|\alpha_1(s+\sigma_2)-K_1(s+\sigma_2)||x_2(s)-x_2^*(s)|$，则

$$\Delta V_{12}(k)=r_1(k+\sigma_2)|\alpha_1(k+\sigma_2)-K_1(k+\sigma_2)||x_2(k)-x_2^*(k)|-r_1(k)|\alpha_1(k)-K_1(k)|\cdot |x_2(k-\sigma_2)-x_2^*(k-\sigma_2)|\leqslant r_1^u\max\{\alpha_1^u-K_1^l,|\alpha_1^l-K_1^u|\}|x_2(k)-x_2^*(k)|- r_1(k)|\alpha_1(k)-K_1(k)||x_2(k-\sigma_2)-x_2^*(k-\sigma_2)|. \tag{13}$$

定义$V_1(k)=V_{11}(k)+V_{12}(k)$. 由式(12)和(13)可得，对任意的$k\geqslant N_0+\sigma$，有

$$\Delta V_1(k)\leqslant-\left(\frac{1}{\theta_1(k)}-\left|\frac{1}{\theta_1(k)}-r_1(k)\right|\right)|x_1(k)-x_1^*(k)|+ r_1^u\max\{\alpha_1^u-K_1^l,|\alpha_1^l-K_1^u|\}|x_2(k)-x_2^*(k)|+r_1(k)d_1(k)|u_1(k)-u_1^*(k)|\leqslant -\min\left\{r_1^l,\frac{2}{M_1+\varepsilon}-r_1^u\right\}|x_1(k)-x_1^*(k)|+r_1^u\omega_1|x_2(k)-x_2^*(k)|+r_1^u d_1^u|u_1(k)-u_1^*(k)|. \tag{14}$$

令

$$V_{21}(k)=|\ln x_2(k)-\ln x_2^*(k)|,$$

$$V_{22}(k)=\sum_{s=k-\sigma_1}^{k-1}r_2(s+\sigma_1)|\alpha_2(s+\sigma_1)-K_2(s+\sigma_1)||x_1(s)-x_1^*(s)|,$$

$$V_2(k)=V_{21}(k)+V_{22}(k).$$

类似于式(12)—(14)的证明，对任意的$k\geqslant N_0+\sigma$，有

$$\Delta V_2(k)\leqslant-\left(\frac{1}{\theta_2(k)}-\left|\frac{1}{\theta_2(k)}-r_2(k)\right|\right)|x_2(k)-x_2^*(k)|+ r_2^u\max\{\alpha_2^u-K_2^l,|\alpha_2^l-K_2^u|\}|x_1(k)-x_1^*(k)|+r_2(k)d_2(k)|u_2(k)-u_2^*(k)|\leqslant$$

$$-\min\left\{r_2^l,\frac{2}{M_2+\varepsilon}-r_2^u\right\}|x_2(k)-x_2^*(k)|+r_2^u\omega_2|x_1(k)-x_1^*(k)|+r_2^ud_2^u|u_2(k)-u_2^*(k)|,\tag{15}$$

其中 $\theta_2(k)$ 介于 $x_2(k)$ 和 $x_2^*(k)$ 之间,且 $\ln x_2(k)-\ln x_2^*(k)=\frac{1}{\theta_2(k)}(x_2(k)-x_2^*(k))$.

定义 $W_i(k)=|u_i(k)-u_i^*(k)|$, $i=1,2$, 则

$$\Delta W_i(k)\leqslant -a_i(k)|u_i(k)-u_i^*(k)|+b_i(k)|x_i(k)-x_i^*(k)|\leqslant$$
$$-a_i^l|u_i(k)-u_i^*(k)|+b_i^u|x_i(k)-x_i^*(k)|.\tag{16}$$

构造 Lyapunov 函数 $V(k)=\lambda_1V_1(k)+\lambda_2V_2(k)+\lambda_3W_1(k)+\lambda_4W_2(k)$. 由式(14)—(16)可知,对任意的 $k\geqslant N_0+\sigma$, 有

$$\Delta V(k)\leqslant -(\lambda_1\mu_1^\varepsilon-\lambda_2r_2^u\omega_2-\lambda_3b_1^u)|x_1(k)-x_1^*(k)|-(\lambda_2\mu_2^\varepsilon-\lambda_1r_1^u\omega_1-\lambda_4b_2^u)|x_2(k)-x_2^*(k)|-$$
$$(\lambda_3a_1^l-\lambda_1r_1^ud_1^u)|u_1(k)-u_1^*(k)|-(\lambda_4a_2^l-\lambda_2r_2^ud_2^u)|u_2(k)-u_2^*(k)|\leqslant$$
$$-\delta\sum_{i=1}^{2}(|x_i(k)-x_i^*(k)|+|u_i(k)-u_i^*(k)|).\tag{17}$$

把上面的不等式两边同时从 $N_0+\sigma$ 到 n 相加,可得

$$\sum_{k=N_0+\sigma}^{n}(V(k+1)-V(k))\leqslant -\delta\sum_{k=N_0+\sigma}^{n}\sum_{i=1}^{2}(|x_i(k)-x_i^*(k)|+|u_i(k)-u_i^*(k)|),$$

从而有 $V(n+1)+\delta\sum_{k=N_0+\sigma}^{n}\sum_{i=1}^{2}(|x_i(k)-x_i^*(k)|+|u_i(k)-u_i^*(k)|)\leqslant V(N_0+\sigma)$, 即

$$\sum_{k=N_0+\sigma}^{n}\sum_{i=1}^{2}(|x_i(k)-x_i^*(k)|+|u_i(k)-u_i^*(k)|)\leqslant\frac{V(N_0+\sigma)}{\delta}.$$

于是有 $\sum_{k=N_0+\sigma}^{+\infty}\sum_{i=1}^{2}(|x_i(k)-x_i^*(k)|+|u_i(k)-u_i^*(k)|)\leqslant\frac{V(N_0+\sigma)}{\delta}<+\infty$, 从而可推出

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{2}(|x_i(k)-x_i^*(k)|+|u_i(k)-u_i^*(k)|)=0.$$

故 $\lim_{k\to+\infty}|x_i(k)-x_i^*(k)|=0$, $\lim_{k\to+\infty}|u_i(k)-u_i^*(k)|=0$. 定理 2 证毕.

3 概周期解

由(H_1)知,系统(2)的所有参数 r_i,K_i,α_i,a_i,b_i 和 $d_i(i=1,2)$ 都是概周期序列. 根据引理 1,存在整数序列 τ_n, 当 $n\to\infty$, $\tau_n\to\infty$ 时,对 $i=1,2$ 和任意 $k\in\mathbf{Z}$ 一致有 $r_i(k+\tau_n)\to r_i^*(k)$, $K_i(k+\tau_n)\to K_i^*(k)$, $\alpha_i(k+\tau_n)\to\alpha_i^*(k)$, $a_i(k+\tau_n)\to a_i^*(k)$, $b_i(k+\tau_n)\to b_i^*(k)$, $d_i(k+\tau_n)\to d_i^*(k)$. 故可推出系统(2)的一个壳方程如下:

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)\exp\left\{r_1^*(k)\left[\frac{K_1^*(k)+\alpha_1^*(k)x_2(k-\sigma_2)}{1+x_2(k-\sigma_2)}-x_1(k)-d_1^*(k)u_1(k)\right]\right\},\\ x_2(k+1)=x_2(k)\exp\left\{r_2^*(k)\left[\frac{K_2^*(k)+\alpha_2^*(k)x_1(k-\sigma_1)}{1+x_1(k-\sigma_1)}-x_2(k)-d_2^*(k)u_2(k)\right]\right\},\\ \Delta u_1(k)=-a_1^*(k)u_1(k)+b_1^*(k)x_1(k),\\ \Delta u_2(k)=-a_2^*(k)u_2(k)+b_2^*(k)x_2(k).\end{cases}\tag{18}$$

根据差分概周期理论可知,如果系统(2)满足条件(H_1)—(H_3),则系统(2)的壳方程(18)也满足条件(H_1)—(H_3).

引理 6[10] 若系统(2)的每个壳方程都有唯一的严格正解,则概周期差分系统(2)有唯一的严格正概周期解.

定理 3 若系统(2)满足条件(H_1)—(H_3),则系统(2)存在唯一的概周期解且是全局吸引的.

证明　由引理 6，只需证明系统(2) 的每个壳方程都有唯一的严格正解即可. 首先证明系统(2) 的每个壳方程至少有一个严格正解，其次证明每个壳方程的严格正解是唯一的.

根据概周期泛函基本理论[8]，存在一个整数序列 $\{\tau_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，$\tau_n\to\infty$，且对 $i=1,2$ 和任意 $k\in\mathbf{Z}$ 一致有 $r_i^*(k+\tau_n)\to r_i^*(k)$，$K_i^*(k+\tau_n)\to K_i^*(k)$，$\alpha_i^*(k+\tau_n)\to\alpha_i^*(k)$，$a_i^*(k+\tau_n)\to a_i^*(k)$，$b_i^*(k+\tau_n)\to b_i^*(k)$，$d_i^*(k+\tau_n)\to d_i^*(k)$. 假设$(x_1(k),x_2(k),u_1(k),u_2(k))$是壳方程(18) 的任一正解，根据定理 1，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 N_1，使得当 $k\geqslant N_1$ 时，有 $m_i-\varepsilon\leqslant x_i(k)\leqslant M_i+\varepsilon$，$n_i-\varepsilon\leqslant u_i(k)\leqslant N_i+\varepsilon_i$，$i=1,2$.

定义 $x_{in}(k)=x_i(k+\tau_n)$，$u_{in}(k)=u_i(k+\tau_n)$，其中 $k\geqslant N_1+\sigma-\tau_n$，$n\in\mathbf{Z}^+$，$i=1,2$. 对任意的正整数 q，取 $\{x_{in}(k):n\geqslant q\}$ 和 $\{u_{in}(k):n\geqslant q\}$ 的子列，为了讨论方便，仍记子列为 $\{x_{in}(k)\}$，$\{u_{in}(k)\}$. 易知，当 $n\to\infty$ 时，$\{x_{in}(k)\}$ 和 $\{u_{in}(k)\}$ 在 $\mathbf{Z}$ 的任意有限区间上收敛. 因此，当 $n\to\infty$ 时，存在序列 $\{y_i(k)\}$，$\{v_i(k)\}$，$i=1,2$ 满足 $x_{in}(k)\to y_i(k)$，$u_{in}(k)\to v_i(k)$，$k\in\mathbf{Z}$. 又因为

$$x_{1n}(k+1)=x_{1n}(k)\cdot$$
$$\exp\left\{r_1^*(k+\tau_n)\left[\frac{K_1^*(k+\tau_n)+\alpha_1^*(k+\tau_n)x_{2n}(k-\sigma_2)}{1+x_{2n}(k-\sigma_2)}-x_{1n}(k)-d_1^*(k+\tau_n)u_{1n}(k)\right]\right\},$$
$$x_{2n}(k+1)=x_{2n}(k)\cdot$$
$$\exp\left\{r_2^*(k+\tau_n)\left[\frac{K_2^*(k+\tau_n)+\alpha_2^*(k+\tau_n)x_{1n}(k-\sigma_1)}{1+x_{1n}(k-\sigma_1)}-x_{2n}(k)-d_2^*(k+\tau_n)u_{2n}(k)\right]\right\},$$
$$\Delta u_{in}(k)=-a_i^*(k+\tau_n)u_{in}(k)+b_i^*(k+\tau_n)x_{in}(k),\ i=1,2,$$

所以可推出：

$$y_1(k+1)=y_1(k)\exp\left\{r_1^*(k)\left[\frac{K_1^*(k)+\alpha_1^*(k)y_2(k-\sigma_2)}{1+y_2(k-\sigma_2)}-y_1(k)-d_1^*(k)v_1(k)\right]\right\},$$
$$y_2(k+1)=y_2(k)\exp\left\{r_2^*(k)\left[\frac{K_2^*(k)+\alpha_2^*(k)y_1(k-\sigma_1)}{1+y_1(k-\sigma_1)}-y_2(k)-d_2^*(k)v_2(k)\right]\right\},$$
$$\Delta v_i(k)=-a_i^*(k)v_i(k)+b_i^*(k)y_i(k),\ i=1,2.$$

显然，$(y_1(k),y_2(k),v_1(k),v_2(k))$ 是方程(18) 的解，且满足 $m_i-\varepsilon\leqslant y_i(k)\leqslant M_i+\varepsilon$，$n_i-\varepsilon\leqslant v_i(k)\leqslant N_i+\varepsilon_i$，$k\in\mathbf{Z}$，$i=1,2$. 因为 ε 是任意小的正数，所以 $0<\inf\limits_{k\in\mathbf{Z}}y_i(k)\leqslant\sup\limits_{k\in\mathbf{Z}}y_i(k)<+\infty$，$0<\inf\limits_{k\in\mathbf{Z}}v_i(k)\leqslant\sup\limits_{k\in\mathbf{Z}}v_i(k)<+\infty$，$i=1,2$；因此，系统(2) 的每个壳方程至少有 1 个严格正解.

下面证明每个壳方程都有唯一的严格正解. 假设壳方程(18) 有 2 个严格正解$(x_1^*(k),x_2^*(k),u_1^*(k),u_2^*(k))$和$(y_1^*(k),y_2^*(k),v_1^*(k),v_2^*(k))$. 类似于定理 2 的证明，定义 Lyapunov 泛函如下：

$$V^*(k)=\lambda_1V_1^*(k)+\lambda_2V_2^*(k)+\lambda_3W_1^*(k)+\lambda_4W_2^*(k),\ k\in\mathbf{Z},$$

其中

$$V_i^*(k)=V_{i1}^*(k)+V_{i2}^*(k),\ W_i^*(k)=\left|u_i^*(k)-v_i^*(k)\right|,$$
$$V_{i1}^*(k)=\left|\ln x_i^*(k)-\ln y_i^*(k)\right|,\ i=1,2;$$
$$V_{12}^*(k)=\sum_{s=k-\sigma_2}^{k-1}r_1(s+\sigma_2)\left|\alpha_1(s+\sigma_2)-K_1(s+\sigma_2)\right|\left|x_2^*(s)-y_2^*(s)\right|,$$
$$V_{22}^*(k)=\sum_{s=k-\sigma_1}^{k-1}r_2(s+\sigma_1)\left|\alpha_2(s+\sigma_1)-K_2(s+\sigma_1)\right|\left|x_1^*(s)-y_1^*(s)\right|.$$

类似于式(17) 的讨论，可得

$$\Delta V^*(k)\leqslant-\delta\sum_{i=1}^{2}\left(\left|x_i^*(k)-y_i^*(k)\right|+\left|u_i^*(k)-v_i^*(k)\right|\right),\ k\in\mathbf{Z}.\tag{19}$$

由式(19) 可知，$V^*(k)$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的非增函数. 把上式两边同时从 n 加到 0，可得

$$\delta\sum_{k=n}^{0}\sum_{i=1}^{2}(|x_i^*(k)-y_i^*(k)|+|u_i^*(k)-v_i^*(k)|)\leqslant V^*(n)-V^*(1),\ n<0.$$

注意到 $V^*(k)$ 是有界的,所以有 $\sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{i=1}^{2}(|x_i^*(k)-y_i^*(k)|+|u_i^*(k)-v_i^*(k)|)\leqslant+\infty$,从而可得:

$$\lim_{k=-\infty}|x_i^*(k)-y_i^*(k)|=0,\ \lim_{k=-\infty}|u_i^*(k)-v_i^*(k)|=0,\ i=1,2. \tag{20}$$

对任意小的正数 ε,由式(20)可知存在正整数 N_2,使当 $k\leqslant-N_2$ 时,有:

$$|x_i^*(k)-y_i^*(k)|<\varepsilon,\ |u_i^*(k)-v_i^*(k)|<\varepsilon,\ i=1,2.$$

因此当 $k\leqslant-N_2$ 时,有:

$$V_{i1}^*(k)=\frac{1}{\theta_i(k)}|x_i^*(k)-y_i^*(k)|\leqslant\frac{1}{m_i}\varepsilon,$$

$$V_{12}^*(k)=\sigma_2 r_1^u\max\{\alpha_1^u-K_1^l,|\alpha_1^l-K_1^u|\}\varepsilon\leqslant\sigma r_1^u\omega_1\varepsilon,$$

$$V_{22}^*(k)=\sigma_1 r_2^u\max\{\alpha_2^u-K_2^l,|\alpha_2^l-K_2^u|\}\varepsilon\leqslant\sigma r_2^u\omega_2\varepsilon,$$

$$W_i^*(k)\leqslant\varepsilon,\ i=1,2.$$

令 $P=\lambda_1(\frac{1}{m_1}+\sigma r_1^u\omega_1)+\lambda_2(\frac{1}{m_2}+\sigma r_2^u\omega_2)+\lambda_3+\lambda_4$,那么可推出当 $k\leqslant-N_2$ 时,有 $V^*(k)\leqslant P\varepsilon$,故 $\lim_{k=-\infty}V^*(k)=0$. 根据定理 2 可知,$\lim_{k=+\infty}V^*(k)=0$. 由于 $V^*(k)$ 是 $\mathbf{Z}$ 上正的非增函数,所以 $V^*(k)\equiv 0$,即 $x_i^*(k)=y_i^*(k)$,$u_i^*(k)=v_i^*(k)$,对一切 $k\in\mathbf{Z}$,$i=1,2$ 成立. 因此,壳方程(18)的严格正解是唯一的.

综上所述,系统(2)的每个壳方程都有唯一的严格正解. 根据引理 6,系统(2)有唯一的严格正概周期解. 再由定理 2 知,系统(2)是全局吸引的,因此系统(2)存在唯一的概周期解且是全局吸引的. 证毕.

参考文献:

[1] Li Y K. Positive periodic solutions of a discrete mutualism model with time delays[J]. Int J Math Math Sci, 2005, 2005(4):499-506.

[2] Chen F D. Permanence for the discrete mutualism model with time delays[J]. Math Comput Model, 2008,47:431-435.

[3] Liu M, Wang K. Analysis of a stochastic autonomous mutualism model[J]. J Math Anal Appl, 2013,402(1):392-403.

[4] Chen F D, You M S. Permanence for an integrodifferential model of mutualism[J]. Appl Math Comput, 2007,186(1):30-34.

[5] Zhang H, Li Y Q, Jing B, et al. Global stability of almost periodic solution of multispecies mutualism system with time delays and impulsive effects[J]. Appl Math Comput, 2014,232:1138-1150.

[6] Li Z, Han M A, Chen F D. Almost periodic solutions of a discrete almost periodic logistic equation with delay[J]. Appl Math Comput, 2014,232:743-751.

[7] Chen L J, Chen L J, Li Z. Permanence of a delayed discrete mutualism model with feedback controls[J]. Math Comput Model, 2009,50:1083-1089.

[8] Zhang S N. Existence of almost periodic solution for difference systems[J]. Ann Differ Equ, 2000,16(2):184-206.

[9] Fink A M, Seifert G. Liapunov functions and almost periodic solutions for almost periodic systems[J]. J Differential Equations, 1969,5:307-313.

[10] Li Z, Chen F D, He M X. Almost periodie solutions of a diserete Lotka-Volterra competition system with delays [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2011,12(4):2344-2355.

[11] Yuan R, Hong J L. The existence of almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument[J]. Nonlinear Anal, 1997,28(8):1439-1450.

[12] Yang X T. Uniform persistence and periodic solutions for a discrete predator-prey system with delays[J]. J Math Anal Appl, 2006,316(1):161-177.

[13] Fan Y H, Wang L L. Permanence for a discrete model with feedback control and delay[J]. Discrete Dyn Nat Soc, 2008:1-8. Article ID 945109.